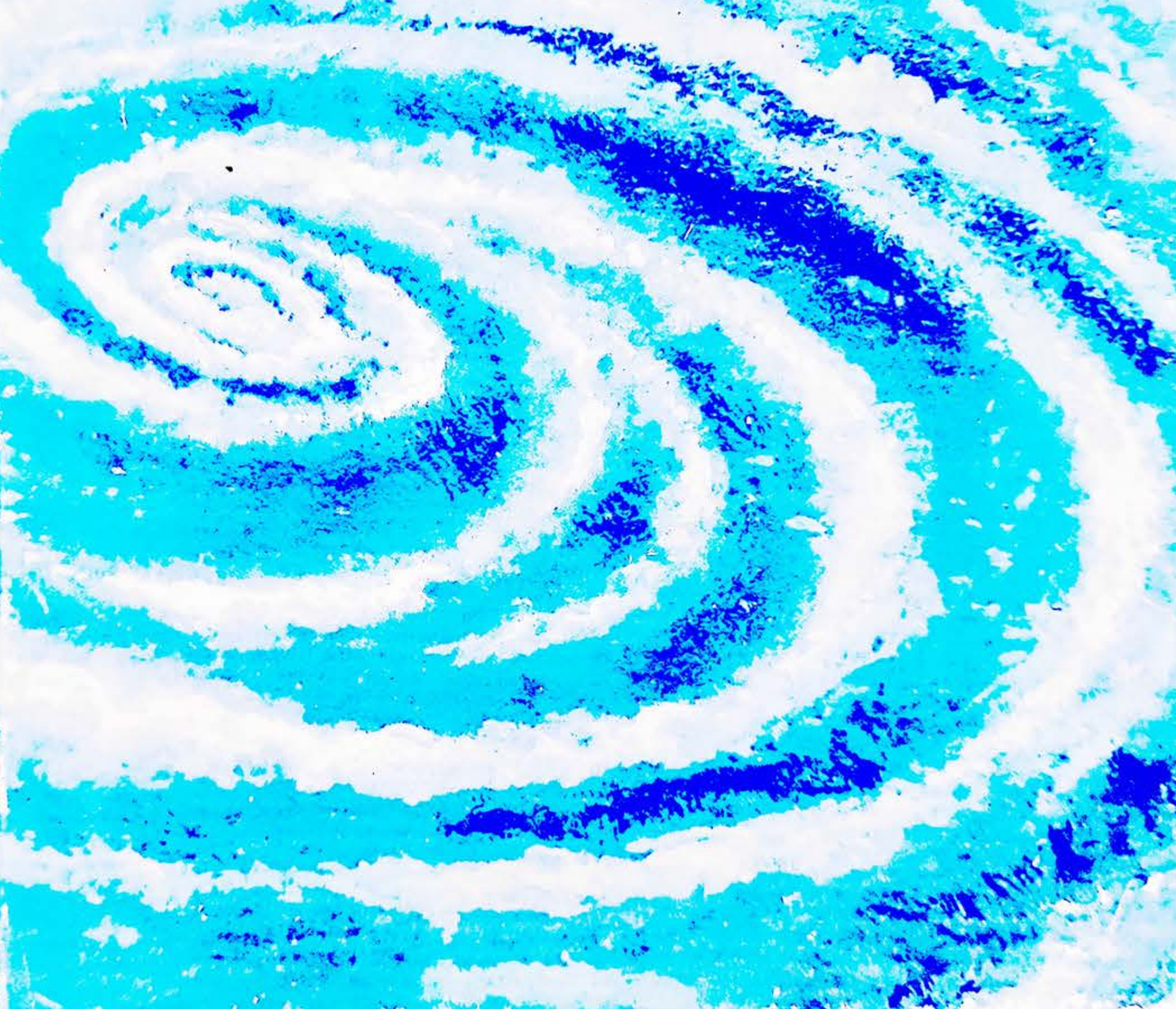


DAVID HALLIDAY

ROBERT RESNICK

Fizică

VOL. I



DAVID HALLIDAY
Profesor de fizică la
Universitatea din Pittsburg

ROBERT RESNICK
Profesor de fizică la Institutul
Politehnic Rensselaer

Fizică

VOL. I



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1975

Prefață la versiunea în limba română

Saltul de la tehnologia empirică, dominantă pînă la jumătatea secolului nostru, la tehnologia actuală bazată pe utilizarea promptă și maximele rezultate ale științei a influențat profund predarea fizicii în institutele politehnice, determinînd pe de o parte o substanțială creștere a ponderii acestei discipline în planurile de învățămînt, iar pe de altă parte modernizarea radicală a conținutului fizicii, aceste cerințe devenind cu atît mai stringente, cu cît și ritmul de perfecționare a tehnologiei a devenit mai susținut. Cursul de fizică generală de profesorii americani David Halliday de la Universitatea din Pittsburgh și Robert Resnick de la Institutul Politehnic Rensselaer constituie un exemplu foarte elocvent asupra modului în care este înțeleasă semnificația pregătirii în fizică a viitorilor ingineri într-o țară în care prestigioasele realizări în dezvoltarea tehnologică nu mai este necesar să fie reliefate.

Ideea fundamentală „Fizica nu este o îngemănare de doctrine fixe ci o știință în dezvoltare” afirmată de autori și urmărită cu consecvență în cele peste 1 200 de pagini ale lucrării, departe de a constitui un prilej pentru improvizații frivole făcute doar de dragul evadării din făgașul convențional, este, dimpotrivă, minunat îmbinată cu prezentarea temeinică și riguroasă a bazelor fenomenologice clasice ale fizicii, absolut indispensabile unei solide însușiri a acestei discipline. Caracterul modern al expunerii constă mai întîi în formularea ideilor clasice într-un mod coerent cu concepțiile actuale ale fizicii; în al doilea rînd acest caracter apare în judicioasa selectare a temelor de fizică în raport cu ponderea pe care acestea le au în ansamblul fizicii moderne și în sfîrșit în alegerea cu grijă a acelor experiențe care beneficiind de cele mai moderne posibilități tehnice permit inducerea cea mai potrivită a adevărurilor din fizică. Punctul de vedere microscopic este introdus la finele fiecărui capitol, după expunerea bazelor fenomenologice, preferîndu-se de obicei interpretările microscopice clasice intuitive, fără a se ocoli însă scoaterea în evidență a deficiențelor acestor interpretări și semnalarea posibilităților fizicii cuantice de a se depăși aceste deficiențe.

Profund convinși de rolul pe care îl are formarea unei corecte gândiri fizice în pregătirea viitorilor ingineri, autorii nu au elaborat acest curs ca un simplu material de informare ci ca un eficient instrument de instruire. Este foarte interesantă, de exemplu, metoda de introducere a ideilor mai întâi sub o formă mai elementară, nu foarte riguroasă, dar cât mai intuitivă și ilustrată de exemple cât mai elocvente, avându-se totuși grija avertizării cititorilor asupra nerigurozităților făcute. De-abia într-o a doua etapă, ideile se rafinează și se prezintă, de data aceasta, cu toată rigoarea. Un mare număr de întrebări „provocatoare”, anexate fiecărui capitol îndeamnă nu numai la meditații asupra aspectelor mai subtile, dar și la consultarea unei bibliografii suplimentare. Participarea cititorului se desăvârșește prin invitația de a rezolva cele aproape o mie de probleme care însoțesc lucrarea. Un material ilustrativ excelent elaborat și, spre lauda celor care au realizat ediția românească, executat în condiții grafice competitive cu ediția originală, cât și numeroase anexe, optimizează condițiile de studiu al manualului.

Dacă în cadrul sistemului de învățământ din Statele Unite ale Americii poziția acestui curs este clar precizată, situându-se ca un curs de fizică generală propedeutic, destinat facultăților de fizică sau de inginerie, în raport cu structura învățământului din țara noastră această poziție este evident mai dificil de situat. Dar poate tocmai din acest motiv numărul celor care profită de lectura acestui curs este sporit, el fiind accesibil și util tuturor celor care au la bază cele douăsprezece clase de învățământ. Și poate cei mai privilegiați lectori ai acestei lucrări vor fi chiar fizicienii formați, care fiind scutiți de servituțile învățării propriu-zise vor putea să guste pe îndelete deosebita claritate a expunerii și să zăbovească mai mult asupra unor nuanțe pe care poate până atunci le-au lăsat neobservate.

PROF. DR. GEORGE C. MOISIL

Prefață

Intervalul de timp dintre descoperirile în științele fundamentale și aplicarea lor în practica inginerască s-a scurtat enorm în ultimele câteva decenii. Baza ingineriei, altă dată în mare măsură empirică, este astăzi în mare măsură științifică. Astăzi se simte necesitatea de a sublinia mai degrabă principiile decât procedeele specifice, de a selecta mai degrabă domeniile de interes contemporan decât pe cele de interes mai vechi și de a pregăti pe student pentru atmosfera de schimbări pe care o va întâlni în timpul carierei sale. Aceste schimbări solicită o revizuire a cursului tradițional de fizică generală pentru ingineri și fizicieni.

Cele mai frecvente critici făcute la diferite nivele asupra manualelor folosite într-un astfel de curs, sint următoarele: (a) conținutul este enciclopedic ceea ce înseamnă că temele nu sint tratate cu suficientă profunzime, discuțiile sint în mare măsură descriptive în loc să fie explicative și analitice și sint abordate prea multe teme; (b) conținutul nu este suficient de „modern” și aplicațiile sint extrase de cele mai multe ori din practica inginerască a trecutului, decât din fizica contemporană; (c) organizarea materialului este prea compartimentată pentru a putea pune în evidență unitatea esențială a fizicii și a principiilor ei; (d) tratarea este mult prea deductivă și nu pune suficient accent pe legătura dintre teorie și experiență. Desigur, este puțin probabil că va fi scris vreodată un manual care să nu fie criticat dintr-un motiv sau altul.

Scrind acest manual noi am fost conștienți de aceste critici și am căutat să ținem seama de ele. Am luat în considerare posibilitatea de a reorganiza tabla de materii. Adoptarea unei tratări din punct de vedere atomic, chiar de la început, sau unei structuri bazate pe energie în variatele ei aspecte se recomandă de la sine. Am tras concluzia că scopurile noastre pot fi atinse cel mai bine modificind alegerea și tratarea temelor în cadrul organizării tradiționale. „A amesteca liber cărțile” ce conțin subiectele sau a abandona cu totul o succesiune care să reprezinte dezvoltarea gândirii fizice, duc ambele la un eșec în alcătuirea sintezelor newtoniană și maxwelliană a fizicii clasice și la o înțelegere superficială a fizicii moderne. După părerea noastră un fundament

solid al fizicii clasice este esențial pentru a clădi suprastructura fizicii contemporane.

Pentru a ilustra modul cum sperăm să ne realizăm scopurile în acest cadru, prezentăm aici principalele trăsături ale acestei cărți.

1. Multe teme sînt tratate mai profund decît s-a făcut de obicei pînă acum și a fost introdus mult material contemporan în cuprinsul cărții. De exemplu, gravitația, teoria cinetică, undele electromagnetice și optica fizică, printre altele, sînt tratate mai profund. Teme contemporane, precum standardele (etaloanele) atomice, secțiunea de ciocnire, forțele inter-moleculare, conversia masă-energie, separarea izotopilor, efectul Hall, modelul electronilor liberi pentru conductibilitate, stabilitatea nucleară, rezonanța nucleară și difracția neutronilor sînt discutate la locul potrivit.

Pentru a permite această tratare mai profundă și includerea materialului contemporan, am omis în întregime sau am tratat doar indirect mult material tradițional, precum mașinile simple, tensiunea superficială, vîscozitatea, calorimetria, schimbarea stării de agregare, umiditatea, pompele, motoarele practice, scările muzicale, acustica arhitecturală, electrochimia, termoelectricitatea, motoarele, circuitele de curent alternativ, electronica, aberațiile lentilelor, colorimetria, fotometria și altele.

2. Am încercat să evidențiem unitatea fizicii pe toate căile. Peste tot în carte subliniem natura generală a ideilor fundamentale, comune tuturor domeniilor fizicii. De exemplu, legile de conservare a energiei, a impulsului, a momentului cinetic și a sarcinii electrice sînt folosite de nenumărate ori. Conceptul de undă și proprietățile sistemelor oscilante, precum rezonanța, sînt folosite în mecanică, acustică, electromagnetism, optică, fizică atomică și nucleară. Conceptul de cîmp este aplicat la gravitație, curgerea fluidelor, electromagnetism și fizica nucleară.

Relațiile reciproce dintre diferitele discipline ale fizicii sînt subliniate prin folosirea analogiilor fizice și matematice și prin metoda similitudinii. De exemplu, sînt subliniate corespondențele dintre sistemul greutate-resort și circuitul LC sau dintre un tub acustic și o cavitate electromagnetică și este notată întrepătrunderea dintre tratarea microscopică și cea macroscopică a fenomenelor termice și a fenomenelor electrice și magnetice. Am încercat să netezim trecerea de la mecanica punctului material la teoria cinetică, subliniind că în aspectele lor clasice, ambele aparțin sintezei newtoniene. Am imaginat de asemenea o trecere netedă de la electromagnetism la optica ondulatorie, punînd accentul frecvent pe sinteza maxwelliană.

Noi discutăm limitele ideilor clasice și domeniul lor de valabilitate și subliniem natura generalizatoare a ideilor contemporane, aplicabile într-un domeniu mai larg. Peste tot căutăm să arătăm legătura dintre teorie și experiență și să dezvoltăm o cunoaștere conștientă a naturii și a utilizării teoriei.

3. Modul de abordare al fizicii cuantice nu este cel descriptiv tradițional. Mai degrabă, noi căutăm să dezvoltăm conceptele contemporane destul de riguros, în măsura și profunzimea adecvate unui curs introductiv. În capitolele anterioare pregătim drumul pentru sublinierea limitărilor teoriei clasice, marcînd aspectele fizicii clasice care se prelungesc în fizica contemporană și alegînd exemple ilustrative care au un aspect

modern. Astfel, punem accentul pe câmpuri mai mult decât pe circuite, pe particule mai mult decât pe corpuri extinse și pe optica ondulatorie curbele de energie potențială moleculară, energia de legătură a deuteriului, ciocnirile nucleare, modelul nuclear al atomului, modelul atomic stabilitatea orbitelor betatronice, rezonanța magnetică nucleară, deplasarea spre roșu și altele, prea numeroase pentru a le putea menționa.

Punctul de vedere este acela de a dezvolta ideile fundamentale ale fizicii cuantice. Capitolul descriptiv obișnuit de fizică nucleară este, de exemplu, omis. În schimb sînt subliniate dualitatea undă-corpusul, principiul incertitudinii, principiul complementarității și principiul de corespondență.

4. Nivelul matematic al cărții noastre presupune un curs paralel de calcul diferențial și integral. Derivata este introdusă în capitolul 3, iar integrala în capitolul 7. Conceptele fizice înrudite de pantă și de arie mărginită de o curbă sînt dezvoltate treptat. Calculul diferențial și integral este folosit în mod curent în a doua jumătate a cărții. Nu sînt evitate ecuațiile diferențiale simple, deși nu este necesar și nu se dă nici un procedeu formal pentru rezolvarea lor. Peste tot este folosită notația vectorială și algebra vectorială, inclusiv produsul scalar și cel vectorial. Ca prototip de vector este luată deplasarea și este dezvoltată ideea de invarianță a relațiilor vectoriale.

5. Numărul problemelor este neobișnuit de mare dar puține sînt probleme „încuietoare”. Multe din ele necesită dezvoltări ale materialului din text, aplicații contemporane sau deducții. Întrebările de la sfîrșitul fiecărui capitol sînt destinate să stimuleze gîndirea; ele pot servi ca bază pentru discuții în clasă, pentru lucrări de control sau pentru studiul individual. Numai rareori se poate răspunde la întrebări printr-o citare directă din text.

6. Cartea conține un număr neobișnuit de mare de exemple, cu variante „încuietoare” folosite doar pentru a pune în evidență ordinul de mărime. Soluțiile algebrice sînt preferate celor numerice. Exemplele extind uneori tratarea din text sau discută punctele mai fine, dar de obicei ele constituie aplicații ale principiilor din fizica contemporană.

7. Manualul a fost conceput astfel încît să acopere cursuri de fizică de diferite durate. Cu textul petit a fost cules mult material suplimentar cu caracter avansat, istoric, sau filozofic, care poate fi omis sau inclus la diferite nivele depinzînd de interesul sau durata cursului. În plus, multe capitole pot fi privite ca opționale (facultative). Fiecare profesor poate face singur o alegere. În instituțiile noastre, capitolul 14 (Statica corpurilor rigide) și capitolele 41 și 42 (Optica geometrică) sînt omise. Alte posibilități sugerate, depinzînd de accentul sau profunzimea dorite, sau de natura cursurilor care se succed, sînt capitolele 12 (Dinamica rotației), capitolele 17 și 18 (Fluide), capitolul 24 (Teoria cinetică II), capitolul 32 (T.e.m. și circuite), capitolul 46 (Polarizarea) și capitolele 47 și 48 (Fizica cuantică).

8. Am adoptat sistemul de unități SI (MKS) peste tot, deși sistemul tehnic este și el uneori folosit în mecanică. Deoarece sistemul CGS este

exclus treptat, an de an, din manualele avansate, ne-am văzut siliți să ne restrângem la o simplă definiție a unităților fundamentale CGS. O listă bogată a factorilor de transformare este dată în anexa G.

Dorim să mulțumim studenților în științe și inginerie atât de la Institutul politehnic Rensselaer cât și de la Universitatea din Pittsburgh care au parcurs odată cu noi cele două ediții preliminare succesive. Criticile constructive din partea colegilor noștri de la fiecare institut și de la unii recenzenți au condus la mai multe schimbări. Benjamin Chi de la I.P.R. a fost de un real folos în toate aspectele de pregătire a manuscrisului. În sfârșit, ne exprimăm recunoștința profundă față de soțiile noastre, nu numai pentru ajutorul dat în dactilografierea și în citirea corecturilor, dar și pentru răbdarea și încurajarea fără de care această carte nu ar fi fost niciodată scrisă.

David Halliday

Universitatea din Pittsburgh
Pittsburgh, Pennsylvania.

Robert Resnick

Institutul Politehnic Rensselaer
Troy, New York.

Cuprinsul volumului I

1. MĂSURAREA	
1-1	Măsurarea 15
1-2	Mărimi fizice, etaloane și unități 16
1-3	Sisteme de referință 17
1-4	Etalonul de lungime 19
1-5	Etalonul de timp 21
1-6	Sisteme de unități 25
2. VECTORI	
2-1	Vectori și scalari 29
2-2	Adunarea (compunerea) vectorilor. Metoda geometrică 30
2-3	Descompunerea și compunerea vectorilor. Metoda analitică 32
2-4	Înmulțirea vectorilor 37
2-5	Vectorii și legile fizicii 40
3. MIȘCAREA UNIDIMENSIONALĂ	
3-1	Mecanica 46
3-2	Cinematica punctului material 46
3-3	Viteza medie 48
3-4	Viteza instantanee 49
3-5	Mișcarea unidimensională — viteza variabilă 50
3-6	Accelerația 54
3-7	Mișcarea unidimensională — accelerația variabilă 55
3-8	Mișcarea unidimensională — accelerația constantă 56
3-9	Bilanțul unităților și dimensiunilor 60
3-10	Corpuri în cădere liberă 62
3-11	Ecuatiile mișcării în căderea liberă 64

4. MIȘCAREA ÎNTR-UN PLAN	
4-1	Deplasarea, viteza și accelerația 72
4-2	Mișcarea într-un plan cu accelerație constantă 73
4-3	Mișcarea unui proiectil 74
4-4	Mișcarea circulară uniformă 80
4-5	Accelerația tangențială în mișcarea circulară 84
4-6	Viteza relativă și accelerația 87
5. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL. I	
5-1	Mecanica clasică 95
5-2	Prima lege a lui Newton 97
5-3	Forța 99
5-4	Masa; legea a doua a lui Newton 101
5-5	Legea a treia a mișcării a lui Newton 103
5-6	Sisteme de unități mecanice 106
5-7	Legile forței 108
5-8	Greutatea și masa 109
5-9	Un procedeu static de măsurare a forțelor 111
5-10	Unele aplicații ale legilor mișcării ale lui Newton 112
6. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL. II	
6-1	Introducere 125
6-2	Forțele de frecare 125
6-3	Dinamica mișcării circulare uniforme 132
6-4	Forțele și pseudoforțele 137

6-5	Mecanica clasică, mecanica relativistă și mecanica cuantică	138	10-3	Conservarea impulsului în timpul ciocnirilor	235
7.	LUCRUL MECANIC ȘI ENERGIA		10-4	Ciocnirile în cazul unidimensional	237
7-1	Introducere	149	10-5	„Adevărata” măsură a unei forțe	244
7-2	Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă	150	10-6	Ciocnirile în cazurile bi- și tridimensional	246
7-3	Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă. Cazul unidimensional	155	10-7	Secțiunea de ciocnire	250
7-4	Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă. Calcul bidimensional	158	10-8	Reacțiile și procesele de deintegrare	254
7-5	Energia cinetică și teorema energiei cinetice	160	11.	CINEMATICA MIȘCĂRII DE rotație	
7-6	Semnificația teoremei energiei cinetice	164	11-1	Mișcarea de rotație	264
7-7	Puterea	164	11-2	Cinematica mișcării de rotație. Variabilele	266
8.	CONSERVAREA ENERGIEI		11-3	Rotația cu accelerație unghiulară constantă	268
8-1	Introducere	170	11-4	Mărimile mișcării de rotație ca vectori	271
8-2	Forțe conservative	170	11-5	Relația dintre cinematica mișcării liniare și cinematica mișcării unghiulare pentru o particulă în mișcare circulară. Forma scalară	274
8-3	Energia potențială	175	11-6	Relația dintre cinematica mișcării liniare și cinematica mișcării unghiulare pentru o particulă în mișcare circulară. Forma vectorială	276
8-4	Sisteme conservative unidimensionale	179	12.	DINAMICA MIȘCĂRII DE rotație. I	
8-5	Soluția completă a problemei pentru forțe unidimensionale care depind numai de poziție	183	12-1	Introducere	284
8-6	Sisteme conservative bi- și tridimensionale	186	12-2	Momentul unei forțe care acționează asupra unei particule	284
8-7	Forțe neconservative	188	12-3	Momentul cinetic al unei particule	287
8-8	Conservarea energiei	191	12-4	Sisteme de particule	291
8-9	Masa și energia	192	12-5	Energia cinetică de rotație și momentul de inerție	292
9.	CONSERVAREA IMPULSULUI		12-6	Dinamica rotației unui corp rigid	299
9-1	Centrul de masă	203	12-7	Mișcarea compusă de translație și de rotație a unui corp rigid	307
9-2	Mișcarea centrului de masă	209			
9-3	Impulsul unei particule	211			
9-4	Impulsul unui sistem de particule	212			
9-5	Conservarea impulsului	214			
9-6	Unele aplicații ale principiului conservării impulsului	215			
9-7	Sisteme cu masă variabilă	219			
10.	CIOCNIRI				
10-1	Ce este o ciocnire?	232			
10-2	Impulsul forței și impulsul particulei	234			

13. DINAMICA ROTĂȚIEI (II) ȘI CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

13-1	Introducere	321
13-2	Titirezul	321
13-3	Momentul cinetic și viteza unghiulară	326
13-4	Conservarea momentului ci- netic	332
13-5	Alte aspecte ale conservării momentului cinetic	337
13-6	Dinamica rotației. Rezumat .	338

14. ECHILIBRUL CORPURILOR RIGIDE

14-1	Corpuri rigide	347
14-2	Echilibrul unui corp rigid .	347
14-3	Centrul de greutate	350
14-4	Exemple de echilibru	354
14-5	Echilibrul stabil, instabil și indiferent al corpurilor ri- gide într-un câmp gravita- țional	360

15. OSCILAȚII

15-1	Oscilații	369
15-2	Oscilatorul armonic simplu	372
15-3	Mișcarea armonică simplă	375
15-4	Considerațiile energetice în mișcarea armonică simplă .	379
15-5	Aplicații ale mișcării armo- nice simple	384
15-6	Legătura dintre mișcarea armonică simplă și mișca- rea circulară uniformă . .	390
15-7	Compunerea mișcărilor ar- monice	393
15-8	Oscilațiile a două corpuri .	395
15-9	Mișcarea armonică amorti- zată	398
15-10	Oscilațiile forțate și rezo- nanța	400

16. GRAVITAȚIA

16-1	Introducere istorică	411
16-2	Legea gravitației universale	416
16-3	Constanța gravitației uni- versale G	418
16-4	Masa inertă și masa gravi- tațională	421
16-5	Variația accelerației gravi- taționale	423

16-6	Efectul gravitațional al unei distribuții sferice a masei .	426
16-7	Mișcările planetelor și sate- liților	430
16-8	Cîmpul gravitațional	434
16-9	Energia potențială gravi- tațională	436
16-10	Energia potențială a sate- melor alcătuite din mai multe particule	439
16-11	Considerații energetice în mișcările planetelor și sate- liților	441
16-12	Pămîntul ca sistem de refe- rință inerțial	443
16-13	Principiul echivalenței . . .	444

17. STATICA FLUIDELOR

17-1	Fluidele	454
17-2	Presiunea și densitatea . . .	455
17-3	Variația presiunii într-un fluid în repaus	456
17-4	Principiul lui Pascal și prin- cipiul lui Arhimede	461
17-5	Măsurarea presiunii	463

18. DINAMICA FLUIDELOR

18-1	Conceptele generale ale curgerii fluidelor	471
18-2	Linii de curent	473
18-3	Ecuatia de continuitate . . .	474
18-4	Ecuatia lui Bernoulli	476
18-5	Aplicații ale ecuației Ber- noulli și ecuației de conti- nuitate	479
18-6	Conservarea impulsului în mecanica fluidelor	484
18-7	Cîmpurile vitezelor de curgere	484

19. UNDELE ÎN MEDII ELASTICE

19-1	Unde mecanice	494
19-2	Tipuri de unde	495
19-3	Unde progresive	498
19-4	Principiul suprapunerii . . .	501
19-5	Viteza undelor	503
19-6	Puterea și intensitatea în mișcarea ondulatorie	507
19-7	Interferența undelor	509
19-8	Unde complexe	512
19-9	Unde staționare	514
19-10	Rezonanța	519

20. UNDELE SONORE	
20-1	Sunete, ultrasunete și infra- sunete
20-2	Propagarea și viteza undelor longitudinale
20-3	Unde longitudinale progresi- ve
20-4	Unde longitudinale stațio- nare
20-5	Sistemele vibrante și surse sonore
20-6	Ușă
20-7	Efectul Doppler

21. TEMPERATURA	
21-1	Descrierea microscopice și descrierea interoscopice . . .
21-2	Equilibrul termic. Principiul zero al termodinamicii . . .
21-3	Măsurarea temperaturii . . .
21-4	Termometrul cu gaz la vo- lum constant
21-5	Scara de temperatură a ga- zului ideal
21-6	Scara Celsius și scara Fah- renheit
21-7	Scara practică internaționa- lă a temperaturilor
21-8	Dilatarea termică

22. CĂLDURA ȘI PRIMUL PRINCIPIU AL TERMODINAMICII	
22-1	Căldura — o formă a ener- giei
22-2	Căldura specifică
22-3	Căldurile molare ale solide- lor
22-4	Conducția călduri
22-5	Echivalentul mecanic al căl- duri
22-6	Căldura și lucrul mecanic . . .
22-7	Primul principiu al termo- dinamicii
22-8	Unele aplicații ale primului principiu al termodinamicii . .

23. TEORIA CINETICĂ A GAZELOR. I	
23-1	Introducere
23-2	Gazul ideal. O descriere ma- croscopică
23-3	Gazul ideal. Definiția mi- croscopică

23-4	Calculul cinetic al presiunii . .
23-5	Interpretarea cinetică a temperaturii
23-6	Forțele intermoleculare . . .
23-7	Căldurile specifice ale unui gaz ideal
23-8	Echipartitia energiei

24. TEORIA CINETICĂ A GAZELOR. II	
24-1	Drumul liber mediu
24-2	Distribuția vitezelor mole- culare
24-3	Confirmarea experimentală a distribuției lui Maxwell . .
24-4	Miscarea browniană
24-5	Ecuția de stare a lui van der Waals

25. ENTROPIA ȘI AL DOILEA PRINCIPIU AL TERMODINAMICII	
25-1	Introducere
25-2	Procese reversibile și ire- versibile
25-3	Ciclul Carnot
25-4	Al doilea principiu al ter- modinamicii
25-5	Randamentul mașinilor . . .
25-6	Scara termodinamică a tem- peraturilor
25-7	Entropia. Procese reversi- bile
25-8	Entropia. Procese irever- sibile
25-9	Entropia și principiul II . . .
25-10	Entropia și dezordinea . . .

TEME SUPLIMENTARE	
I. Relația dintre cinematica li- niară și cinematica unghiula- ră pentru o particulă care se mișcă în plan	
II. Vectori polari și vectori axiali . . .	
III. Ecuația undelor pentru o coardă întinsă	
IV. Deducerea legii de distribuție a vitezelor a lui Maxwell . . .	
Răspunsurile la probleme cu nu- măr impar	
ANEXE	
Indice alfabetic	

Capitolul 1

Măsurarea

1-1. Măsurarea

Cînd au fost întocmite planurile pentru a plasa primul cablu trans-atlantic de telegraf, compania care avea sarcina de a-l construi a angajat un tînăr inginer William Thomson (1824—1907), drept consultant. Pentru a rezolva unele probleme ridicate de acest proiect Thomson a făcut multe măsurători electrice de precizie. El a folosit adesea instrumente pe care el însuși le-a inventat. Sfaturile sale, bazate pe propriile sale experiențe, au fost ignorate, în special din cauză că principiile implicate nu erau clar înțelese sau acceptate de cei de la conducere. Eșecurile ulterioare ale proiectului au condus mai tîrziu la o reconsiderare mai îngrijită a vederilor lui Thomson. Adoptarea acestora a dus la instalarea cu succes a cablului în 1858¹. Această experiență l-a ajutat pe Thomson să-și formeze propria sa concepție citată des:

Am spus adesea că atunci cînd putem măsura mărimea despre care vorbim și o putem exprima printr-un număr, atunci noi știm ceva despre ea; dar cînd nu o putem exprima printr-un număr, cunoașterea noastră este slabă și nesatisfăcătoare; ea poate constitui un început de cunoaștere, dar avansăm puțin, în ideile noastre, către nivelul de Știință indiferent despre ce chestiune este vorba.

Deși alți oameni de știință vor nega faptul că ei se ocupă numai de idei care sînt strict măsurabile, nici unul nu va nega importanța mare a măsurătorilor în știință. Adesea, în istoria științei, discrepanțe mici dar semnificative între teorie și măsurători precise au condus la dezvoltarea unor teorii noi și mai generale. Astfel de progrese în înțelegerea noastră n-ar fi avut loc dacă oamenii de știință s-ar declara satisfăcuți numai cu o explicare calitativă a fenomenelor din natură.

¹ În 1892 Thomson, pe atunci unul dintre cei mai cunoscuți oameni de știință ai Angliei, a fost ridicat la rangul de lord Kelvin. Printre alte realizări, el a fost unul din fondatorii termodinamicii.

1-2. Mărimi fizice, etaloane și unități

Elementele constructive ale fizicii sînt mărimile fizice prin care se exprimă legile fizicii. Printre acestea sînt: forța, timpul, viteza, densitatea, temperatura, sarcina, susceptibilitatea magnetică și numeroase altele. Multe dintre acestea, precum forța, temperatura, fac parte din vocabularul nostru de toate zilele. Cînd acești termeni sînt folosiți astfel, semnificația lor poate fi vagă sau poate diferi de semnificația lor științifică.

Pentru scopurile fizicii mărimile fundamentale trebuie definite clar și precis. O concepție, susține că definiția unei mărimi fizice este formulată dacă se dă procedeul de măsurare a acelei mărimi. Acesta se numește *punctul de vedere operațional*, deoarece definiția este, de la rădăcină, o succesiune de operații de laborator care conduc la un număr cu o unitate de măsură. Operațiile pot include și calcule matematice.

Mărimile fizice sînt împărțite în *mărimi fundamentale* și *mărimi derivate*. O astfel de împărțire este arbitrară prin faptul că o mărime dată poate fi privită ca fundamentală într-un anumit șir de operații și ca mărime derivată într-un alt șir de operații. Mărimile derivate sînt acelea ale căror operații de definiție se bazează pe alte mărimi fizice. Exemple de mărimi, considerate de obicei ca mărimi derivate, sînt viteza, accelerația și volumul. Mărimile fundamentale nu sînt definite cu ajutorul altor mărimi fizice. Numărul mărimilor considerate fundamentale este egal cu numărul minim necesar pentru a da o descriere consistentă și neambiguă a tuturor mărimilor din fizică. Exemple de mărimi, considerate de obicei fundamentale, sînt lungimea și timpul. Definițiile lor operaționale implică două trepte: întîi alegerea unui *etalon* (standard), și al doilea, stabilirea procedeului de comparare a etalonului cu mărimea ce trebuie măsurată, astfel încît sînt determinate un număr și o unitate, ca măsură a acelei mărimi.

Un etalon ideal are două caracteristici principale: este accesibil și invariabil. Aceste două cerințe sînt adesea incompatibile și trebuie să facem un compromis între ele. La început s-a pus un accent mai mare pe accesibilitate, dar cerințele sporite ale științei și tehnicii au impus nevoia unei invariabilități mai mari. Cunoscutul yard, foot, inch, de exemplu, descînd direct de la brațul omenească, piciorul și degetul mare. Astăzi asemenea măsuri grosolane pentru lungime nu mai sînt satisfăcătoare și trebuie folosit un etalon mult mai puțin variabil, chiar în dauna accesibilității.

Să presupunem că am ales etalonul nostru de lungime sub forma unei bare a cărei lungime noi o *definim* ca fiind un metru. Dacă prin compararea directă a acestei bare cu o altă bară conchidem că cea de a doua bară este de trei ori mai lungă decît etalonul, spunem că bara a doua are o lungime de trei metri. În practică, majoritatea mărimilor nu pot fi măsurate printr-o comparare directă cu un etalon primar. De obicei este necesară o determinare indirectă, folosind procedee mai complicate. Se fac anumite ipoteze pentru a lega rezultatele unei măsurători indirecte de măsurătoarea directă.

Să presupunem de exemplu, că trebuie cunoscută, la un moment dat, distanța de la o stație de lansare a rachetelor pînă la suprafața Lunii. O cale indirectă de a determina această distanță ar fi să trimitem

un semnal radar de la stație, care va fi reflectat de suprafața Lunii înapoi către un receptor de la stația emițătoare. Dacă se măsoară timpul dintre emiterea și recepționarea semnalului și se cunoaște viteza semnalului radar, atunci distanța poate fi obținută ca produsul dintre viteză și jumătate din intervalul de timp. Noi presupunem aici, că viteza semnalului este constantă și că semnalul s-a propagat în linie dreaptă. Viteza trebuie măsurată într-o experiență auxiliară și deci acolo intervine etalonul de lungime în procedeul operațional.

Distanțele astronomice, cum sînt distanțele de la stele la Pămînt, nu pot fi măsurate pe o cale directă. Puține stele sînt atît de aproape încît să se poată face măsurători de triangulație. Poziția stelei în raport cu fondul format de stelele mult mai depărtate este supusă observației la intervale de 6 luni, cînd Pămîntul s-a deplasat de la un punct al orbitei sale în punctul diametral opus. Din aceste date distanța căutată poate fi obținută folosind diametrul orbitei terestre ca unitate. Distanțele nebuloaselor, de mai multe milioane de ani lumină, pînă la Pămînt sînt măsurate prin procedee indirecte mai complicate decît triangulația (un an lumină este egal cu aproximativ 10^{16} metri; vezi problema 6).

Așa cum folosim metode indirecte pentru măsurarea distanțelor mari, tot astfel trebuie să folosim o metodă indirectă pentru a măsura distanțele mici, cum sînt cele din atomi și molecule. De exemplu, raza efectivă a protonului a fost măsurată cu ajutorul experiențelor de împrăștiere a particulelor și s-a găsit ca fiind de $1,2 \cdot 10^{-15}$ m. Tabela 1-1 arată domeniul vast peste care se întind măsurătorile de lungime.

1-3. Sisteme de referință

O aceeași mărime fizică poate avea diferite valori dacă este măsurată de observatori care se mișcă unul față de altul. Viteza unui tren are o anumită valoare dacă este măsurată de un observator de pe sol, o valoare diferită dacă este măsurată dintr-un vehicul aflat în mișcare și valoarea zero dacă este măsurată de un observator care șade chiar în tren. Nici una din aceste valori nu are vreun avantaj fundamental față de cealaltă; fiecare este la fel de „corectă” din punctul de vedere al observatorului care a făcut măsurătoarea.

În general, valoarea măsurată a unei mărimi fizice depinde de sistemul de referință al observatorului care face măsurătoarea. Acest lucru este destul de clar dacă mărimea fizică este o viteză, ca mai sus. Aceasta este de asemenea adevărat, și dacă mărimea fizică este deplasarea unei particule, intervalul de timp dintre două evenimente, cîmpul electric sau cîmpul magnetic, de exemplu, deși o apreciere completă a acestor patru exemple trebuie amînată pînă la studiul teoriei relativității.

În perioada timpurie a fizicii se credea că există un sistem de referință particular, așa-numitul sistem de referință absolut, care ar avea anumite avantaje fundamentale față de toate celelalte sisteme de referință. Pentru un observator aflat în repaus într-un astfel de sistem mărimile fizice ar avea valorile lor „adevărate” sau „absolute”. Acest

UNELE LUNGIMI MĂSURATE

Tabela 1-1

	Metri
Distanța pînă la cel mai depărtat quasar pînă în prezent detectat ¹ (1964)	$6 \cdot 10^{25}$
Distanța pînă la cea mai apropiată nebuloasă (Marea Nebuloasă din Andromeda)	$2 \cdot 10^{22}$
Raza Galaxiei noastre	$6 \cdot 10^{19}$
Distanța pînă la cea mai apropiată stea (Alpha Centauri)	$4,3 \cdot 10^{16}$
Raza medie a orbitei celei mai depărtate planete (Pluton)	$5,9 \cdot 10^{12}$
Raza Soarelui	$6,9 \cdot 10^8$
Raza Pămîntului	$6,4 \cdot 10^6$
Cea mai înaltă ascensiune a unui balon liber (1959)	$4,6 \cdot 10^4$
Înălțimea unui om	$1,8 \cdot 10^0$
Grosimea acestei cărți (vol. I)	$4 \cdot 10^{-2}$
Grosimea unei pagini din această carte	$1 \cdot 10^{-4}$
Dimensiunea unui virus de poliomielită	$1,2 \cdot 10^{-8}$
Raza unui atom de hidrogen	$5,0 \cdot 10^{-11}$
Raza efectivă a unui proton	$1,2 \cdot 10^{-15}$

punct de vedere este astăzi abandonat deoarece, timp de mai multe decenii, eforturile experimentale de a găsi acest sistem de referință absolut au eșuat complet.

Să considerăm sisteme de referință care se mișcă cu viteză constantă unul față de altul și față de stelele fixe. Astfel de sisteme de referință (neaccelerate, fără rotație) se numesc *sisteme de referință inerțiale*. Experiența arată că toate sistemele de referință inerțiale sînt echivalente în ceea ce privește măsurarea fenomenelor fizice. Observatorii din diferite sisteme pot obține diferite valori numerice pentru mărimile fizice măsurate, dar *relațiile dintre mărimile măsurate, adică legile fizicii vor fi aceleași pentru toți observatorii*.

Să presupunem, de exemplu, că observatorii din diferite sisteme inerțiale măsoară impulsurile particulelor care participă la o ciocnire atomică. Ei vor obține valori numerice diferite atît pentru impulsurile particulelor individuale, cît și pentru impulsul total al sistemului de particule. Fiecare observator va nota însă faptul că impulsul total al sistemului de particule, oricare ar fi valoarea pe care a măsurat-o, este același după ciocnire ca și înainte de ciocnire. Cu alte cuvinte, fiecare observator va nota faptul că ciocnirea se supune *legii de conservare a impulsului*; vom discuta această lege amănunțit în capitolul 9.

Deși legile fizicii sînt aceleași în toate sistemele de referință, valorile măsurate ale mărimilor fizice, după cum am văzut, pot să nu fie aceleași. De aceea, este important ca studentul să-și dea totdeauna seama care este sistemul său de referință în problema particulară abordată.

¹ quasar — radio sursă cvasi-stelară

1-4. Etalonul de lungime¹

Primul etalon de lungime cu adevărat internațional a fost o bară dintr-un aliaj de platină-iridiu numit *metru standard* (sau *metru etalon*) păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de lângă Paris, Franța. Distanța dintre două linii (trăsături) fine, gravate pe dopuri de aur aflate la capetele barei (cînd bara este la $0,00^{\circ}\text{C}$ și susținută mecanic într-un mod prescris) este prin definiție *un metru*. Din punct de vedere istoric, metrul trebuia să fie o fracțiune convenabilă (o zecime de milionime) din distanța de la Pol la Ecuator de-a lungul meridianului care trece prin Paris. Totuși, măsurători precise făcute după ce a fost construit metrul etalon, arată că acesta diferă puțin (aproximativ cu $0,023\%$) de la valoarea sa prevăzută.

Deoarece metrul etalon nu a fost prea accesibil, au fost executate copii precise după acesta și trimise la laboratoare de standardizare ale cîtorva țări. Aceste etaloane secundare au fost folosite pentru a etalona alte rigle de măsură, și mai accesibile. Astfel, pînă nu de mult orice riglă, micrometru sau șubler cu vernier deriva din metrul etalon printr-un lanț complicat de comparații, folosind microscopie și mașini de divizat. Această afirmație era valabilă și pentru *yard*-ul folosit în țările de limbă engleză. Din 1959 *yard*ul a fost definit printr-o înțelegere internațională astfel

$$1 \text{ yard} = 0,9144 \text{ m, exact,}$$

ceea ce este echivalent cu

$$1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm, exact.}$$

Există mai multe obiecții relativ la bara-metru ca etalon primar de lungime: ea este potențial destructibilă prin foc sau război, de exemplu; ea nu este precis reproductibilă; ea nu este prea accesibilă. Cel mai important este faptul că precizia cu care pot fi făcute comparațiile necesare de lungimi, cu ajutorul tehnicii de comparare a trăsăturilor fine, folosind un microscop, nu mai este suficient de înaltă pentru a satisface cerințele moderne ale științei și tehnicii. Precizia maximă ce se poate obține cu metrul-etalon luat ca referință este de aproximativ 1 la 10^7 ; o eroare de acest ordin în alezajul unui giroscop de ghidare ar putea duce la o greșală de lovire a unei ținte de pe Lună de cîteva mii de mile.

Sugestia ca lungimea de undă a unei unde de lumină să fie folosită ca etalon de lungime a fost făcută pentru prima dată în 1864 de către Hyppolyte Louis Fizeau (1819—1896). Dezvoltarea ulterioară a *interferometriei* (vezi capitolul 43), a înarmat pe oamenii de știință cu un dispozitiv optic de precizie, în care, undele de lumină pot fi folosite ca o lungime etalon pentru comparație. Undele luminoase au lungimi de undă de aproximativ $5 \cdot 10^{-5}$ cm și măsurarea lungimii unor bare de cîteva centimetri lungime, poate fi făcută cu o precizie pînă la o fracțiune mică dintr-o lungime de undă. O precizie de 1 la 10^8 în compararea lungimilor, folosind undele luminoase, este în mod inerent posibilă. Imediat

¹ Vezi „Metrul” de H. Barrell, în *Contemporary Physics*, vol. 3, p. 415, anul 1963, pentru o discuție excelentă privind etalonul de lungime.

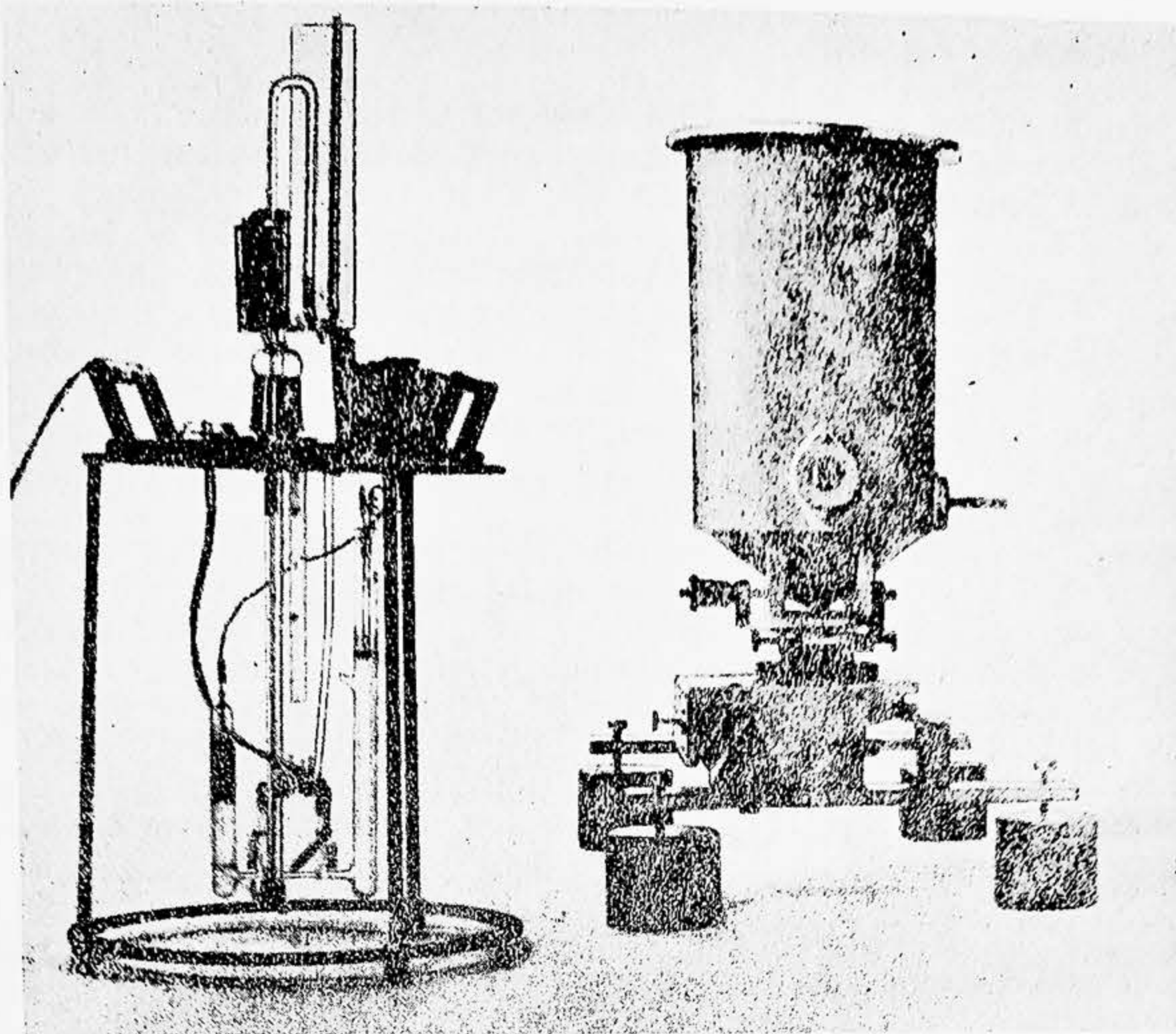


Figura 1-1, O sursă de lumină cu ^{86}Kr este arătată fără vasul în care ea este păstrată. În timpul funcționării lampa este răcită cu azot lichid. (Prin, amabilitatea lui National Physical Laboratories, Teddington, England.)

ce s-a născut nevoia unor astfel de precizii sporite în compararea lungimilor, au fost făcute eforturi pentru a determina sursa optimă de lumină.

În 1961 a fost adoptat, prin convenție internațională, un etalon atomic de lungime. A fost aleasă, lungimea de undă în vid a radiației portocalii (notată spectroscopic cu $2p_{10}-5d_5$) emisă de atomii unui anumit izotop al kriptonului (^{86}Kr), într-o descărcare electrică. Anume, un metru este astăzi definit ca fiind egal cu 1 650 763,73 lungimi de undă din această lumină. S-a ajuns la acest număr de lungimi de undă, printr-o măsurare îngrijită a lungimii metrului etalon, cu ajutorul acestor unde luminoase. Această comparație a fost făcută astfel încât noul etalon bazat pe lungimea de undă a luminii să fie cât mai identic posibil cu vechiul etalon bazat pe bară-metru. Figura 1-1 arată o sursă de lumină portocalie a kriptonului-86, folosită ca bază pentru etalonul de lungime.

Alegerea unui etalon atomic oferă nu numai avantajul preciziei mărite în măsurători de lungime. Atomii care generează lumina sînt disponibili peste tot și toți atomii de o anumită specie sînt identici și emit

lumină, de aceeași lungime de undă. Prin urmare un astfel de etalon atomic este în același timp accesibil și invariabil. Lungimea de undă particulară aleasă caracterizează în mod unic izotopul kripton-86 și este foarte precisă. Acest izotop poate fi obținut cu un înalt grad de puritate, relativ ușor și ieftin.

1-5. Etalonul de timp

Măsurarea timpului are două aspecte diferite. Pentru scopuri civile și pentru anumite scopuri științifice, noi vrem să cunoaștem timpul zilei astfel încât să ne putem aranja evenimentele într-o anumită succesiune. În majoritatea lucrărilor științifice noi vrem să cunoaștem cât de mult durează un eveniment. Altfel spus, dacă avem de a face cu un sistem oscilant, cum este un oscilator de microunde sau un rezonator acustic, noi vrem să știm frecvența oscilațiilor sale. Astfel, orice etalon de timp trebuie să răspundă la ambele întrebări: „Ce oră este?” și două întrebări legate între ele: „Cât timp durează?” sau „Care este frecvența sa?”¹. Tabela 1-2 arată domeniul larg al intervalelor de timp care pot fi măsurate.

Orice fenomen care se repetă poate fi folosit pentru măsurarea timpului; măsurarea constă în numărarea repetițiilor. Pot fi folosite, de exemplu: un pendul care oscilează, un resort în spirală sau un cristal de

Tabela 1-2

UNELE INTERVALE DE TIMP MĂSURATE

	Secunde
Vîrsta Pămîntului	$1,3 \cdot 10^{17}$
Vîrsta Piramidei lui Keops	$1,5 \cdot 10^{11}$
Durata medie de viață a unui om (SUA)	$2 \cdot 10^9$
Durata revoluției Pămîntului în jurul Soarelui (1 an)	$3,1 \cdot 10^7$
Durata rotației Pămîntului în jurul axei sale (1 zi)	$8,6 \cdot 10^4$
Perioada satelitului Echo II	$5,1 \cdot 10^3$
Timpul de înjumătățire al neutronilor liberi	$7,0 \cdot 10^2$
Timpul între două bătăi normale ale inimii	$8,0 \cdot 10^{-1}$
Perioada diapazonului care dă nota La	$2,3 \cdot 10^{-3}$
Timpul de înjumătățire al miuonilor	$2,2 \cdot 10^{-6}$
Perioada de oscilație a microundelor de 3 cm	$1,0 \cdot 10^{-10}$
Perioada tipică de rotație a unei molecule	$1 \cdot 10^{-13}$
Timpul de înjumătățire a pionilor neutri	$2,2 \cdot 10^{-16}$
Perioada de oscilație a radiației gamma de 1 MeV (calculată)	$4 \cdot 10^{-21}$
Timpul de trecere a unei particule elementare rapide printr-un nucleu de dimensiuni medii (calculat)	$2 \cdot 10^{-23}$

¹ Vezi „Măsurarea cu precizie a timpului” de Louis Essen, în *Physics Today*, iulie 1960, pentru o discuție excelentă privind etalonul de timp.

cuart. Dintre nenumăratele fenomene repetitive care se produc în natură, rotația Pământului în jurul axei sale, rotație care determină durata unei zile, a fost folosită ca etalon de timp din cele mai vechi timpuri. Ea constituie încă baza etalonului nostru de timp civil sau legal, o secundă (solară medie) fiind definită ca egală cu $1/86\,400$ dintr-o zi (solară medie). Timpul definit pe baza rotației Pământului se numește *timp universal (TU)*.

În 1956, din motive care vor fi expuse mai jos, Congresul Internațional de Măsuri și Greutăți a redefinit secunda pentru scopurile științifice care cer o înaltă precizie, pe baza mișcării orbitale a Pământului în jurul Soarelui. Și anume, s-a definit secunda ca fiind egală cu fracțiunea $1/31\,556\,925,9747$ din anul tropic 1900; alegerea unei anumite orbite a Pământului în această definiție face automat ca etalonul de timp să fie *invariabil*. Timpul definit pe baza mișcării orbitale a Pământului se numește *timpul efemeridelor (TE)*.

Atât TU cât și TE trebuie determinate pe baza observațiilor astronomice. Deoarece aceste observații trebuie extinse pe mai multe săptămâni (în cazul TU) sau pe mai mulți ani (în cazul TE) este necesar un ceasornic terestru secundar, bun, etalonat pe baza observațiilor astronomice. *Ceasornicul cu cristal de cuarț*, bazat pe vibrațiile periodice naturale, întreținute electric, ale unei lame de cuarț, servește foarte bine ca etalon

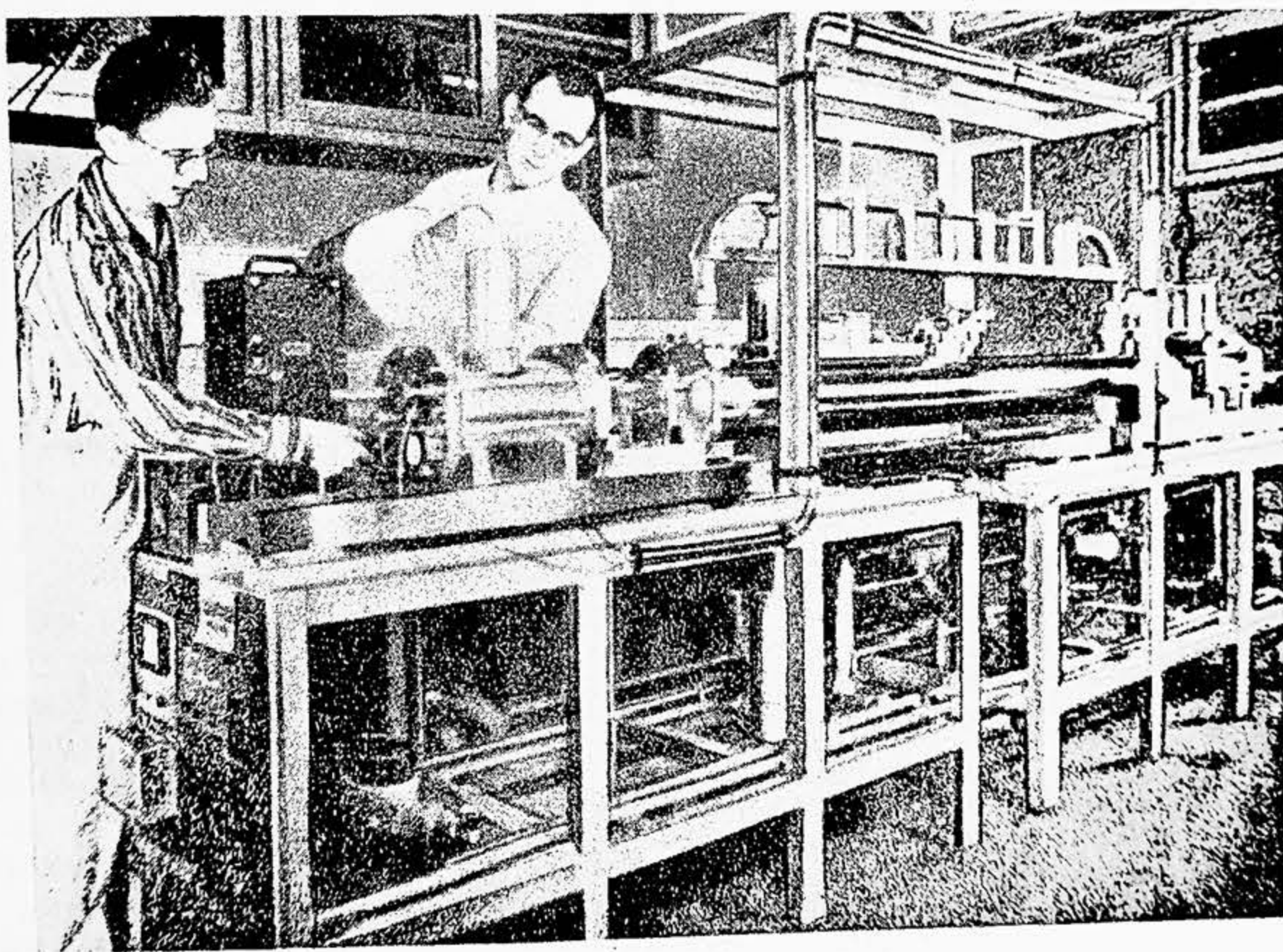


Figura 1-2. Acest ceas atomic cu cesiu de la Boulder Laboratories of the National Bureau of Standards măsoară frecvența și intervalele de timp cu o precizie echivalentă cu o rămânere în urmă de mai puțin de 1 s în 3 000 ani.

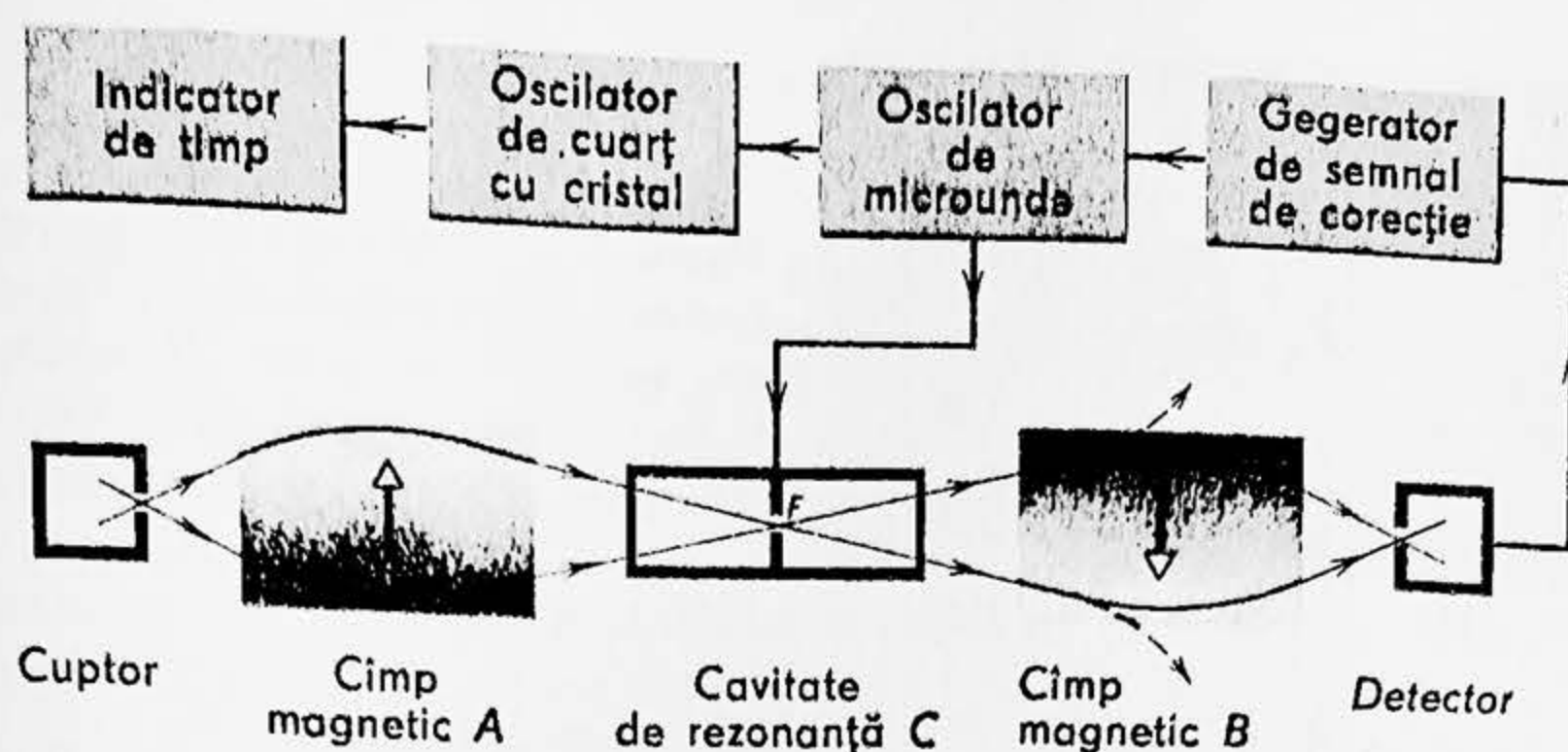


Figura 1-3. O diagramă schematică a unui ceasornic atomic cu cesiu. Săgețile verticale în regiunile cîmpului magnetic care apare umbrît sînt îndreptate de la regiunea de cîmp puternic spre regiunea de cîmp slab a unui cîmp magnetic neuniform, așa cum sugerează și umbrirea variabilă.

secundar de timp. Cele mai bune ceasornice cu cristal de cuarț reproduc timpul de un an cu o eroare maximă de 0,02 s.

Una dintre cele mai obișnuite utilizări ale etalonului de timp este determinarea frecvențelor. În domeniul radio, compararea frecvențelor cu ceasornicul cu cuarț poate fi făcută electronic cu o precizie de cel puțin $1:10^{10}$ și în adevăr multe situații cer o astfel de precizie. Totuși, această precizie este de aproximativ o sută ori mai mare decît precizia cu care ceasornicul cu cuarț poate fi el însuși etalonat pe baza observațiilor astronomice. Pentru a satisface necesitatea unui etalon mai bun de timp, au fost construite ceasornice atomice în mai multe țări, folosindu-se vibrațiile atomice periodice ca etalon.

Un tip particular de ceasornic atomic, bazat pe o frecvență caracteristică asociată atomului de cesiu, funcționează permanent la Laboratorul Național de Fizică (National Physical Laboratory) din Anglia din 1955. Figura 1-2 arată un ceasornic asemănător de la Biroul de Standarde al S.U. (U.S. Bureau of Standards).

Un atom de cesiu se comportă ca un magnet minuscul. El suferă o deflexie unilaterală atunci cînd se mișcă printr-un cîmp magnetic neuniform; mărimea și direcția deflexiei depind de intensitatea cîmpului acestui magnet și de orientarea axei magnetului în acest cîmp.

Într-un ceasornic atomic cu cesiu, cuptorul din figura 1-3 servește ca sursă de atomi de cesiu, care intră într-un cîmp magnetic neuniform A și sînt deviați de acesta. Atomii trec apoi printr-o fantă F situată în centrul unei cavități rezonante C și intră în cîmpul magnetic neuniform B. Dacă nu se produce nici o schimbare în intensitatea magnetică efectivă a atomilor în timpul cînd ei trec prin cavitate, cîmpul B anulează exact deviațiile produse de cîmpul A și atomii lovesc detectorul.

Dacă cavitatea C este umplută cu radiația produsă de un oscilator de microunde și dacă această radiație are o frecvență critică, net definită ν_{Cs} , atomii de cesiu își pot schimba intensitatea magnetică efectivă în timpul cît trec prin

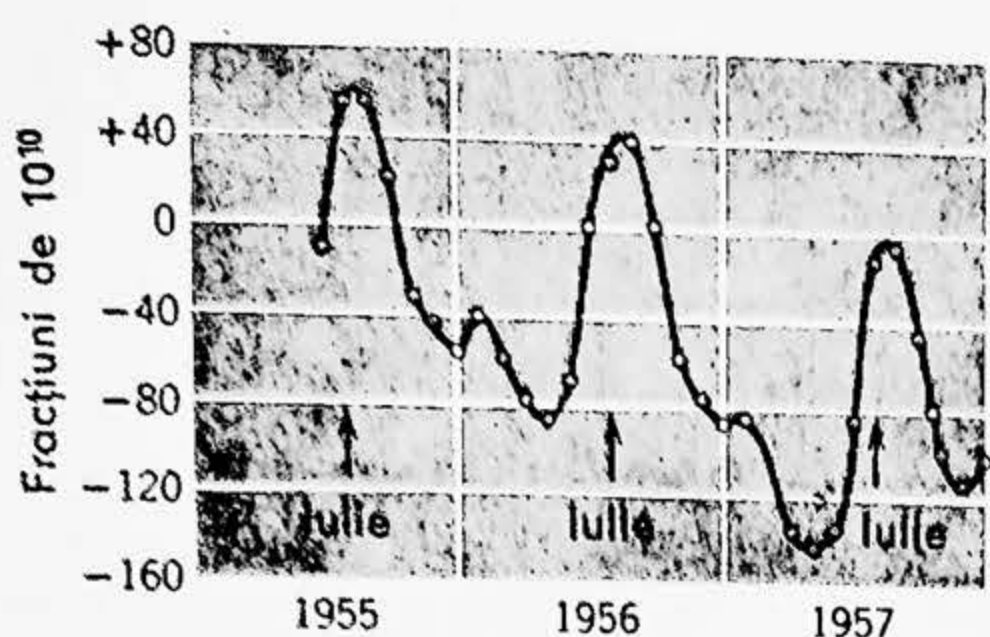


Figura 1-4. Variația vitezei de rotație a Pământului evidențiată prin comparație cu un ceasornic cu cesiu. (Adaptat după L. Essen, Physics Today, Iulie 1960.)

cavitate¹. Dacă se întâmplă aceasta, atunci deflecția atomilor în câmpul B se va schimba (vezi liniile întrerupte) și fasciculul atomic nu va mai lovi detectorul. În modul acesta, aparatul cu fasciculul atomic din figura 1-3 poate fi privit ca un dispozitiv sensibil pentru a determina faptul că oscilatorul de microunde are sau nu o frecvență anumită, net definită ν_{Cs} . În adevăr, se poate aranja astfel încât variațiile în semnalul de ieșire al detectorului să poată fi trimise ca semnale de corecție către oscilatorul de microunde pentru a asigura întotdeauna menținerea precisă a frecvenței sale la valoarea caracteristică ν_{Cs} . Acest oscilator poate fi folosit, la rândul său, pentru a controla frecvența unui ceasornic cu cristal de cuarț care, la rândul său, poate fi pus să controleze mișcarea acelor unui ceasornic etalon sau să furnizeze semnale de timp mai convenabile.

Atomii de cesiu din aparatul din figura 1-3 acționează analog pendulului dintr-un ceasornic cu pendul; în fiecare caz avem o frecvență caracteristică care este folosită pentru a controla dispozitivul orologic.

Frecvența atomică fundamentală ν_{Cs} pe care se bazează ceasornicul cu cesiu a fost măsurată și exprimată în limitele secunde etalon definită pe baza mișcării orbitale a Pământului, astfel: $\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,700 \pm 20$ vibrații/s din timpul efemeridelor, orbita terestră particulară fiind anul tropic 1957.

Figura 1-4 arată, în comparație cu ceasornicul cu cesiu, variații ale vitezei de rotație a Pământului în decursul a aproximativ trei perioade anuale. Observați că viteza de rotație a Pământului este mare vara și mică iarna (emisfera nordică) și manifestă o descreștere continuă de la an la an. Din cauza acestei variabilități a rotației Pământului, evidențiată atât de clar în figura 1-4, dar cunoscută și din observațiile astronomice, TU a fost înlocuit cu TE pentru cercetările științifice de precizie.

În legătură cu figura 1-4 este legitim să ne întrebăm cum putem fi siguri că rotația Pământului și nu ceasornicul de cesiu este „de vină”. Există două răspunsuri. (1) Simplitatea relativă a atomului, comparată cu Pământul, ne face să prescriem orice diferențe dintre cele două indicatoare de timp fenomenelor fizice de pe Pământ. Frecarea dintre apă

¹ Un atom poate exista în mai multe configurații discrete sau stări staționare, fiecare cu o energie bine definită. Atomul poate trece de la o stare la alta dacă este iradiat cu, sau stimulat să emită, unde luminoase sau alte radiații cu anumite frecvențe bine definite. Radiațiile cu frecvențele care nu aparțin acestui șir discret nu vor avea în general nici un efect. Atunci când se produc astfel de tranziții între configurații, multe proprietăți ale atomului, printre care intensitatea sa magnetică efectivă, se pot schimba.

și uscat, datorită marcelor de exemplu, produce o încetinire a rotației Pământului. De asemenea, mișcarea sezonieră a vînturilor introduce o variație sezonieră regulată a rotației. Alte variații pot fi explicate prin topirea calotelor polare de gheață și prin deplasările altor mase terestre. (2) Sistemul solar conține alte indicatoare de timp, cum sînt planetele în mișcarea lor orbitală și sateliții acestor planete; rotația Pământului manifestă de asemenea variații în raport cu acestea, variații asemănătoare cu variația arătată în figura 1-4, dar observabile cu mai mică precizie.

Etalonul de timp poate fi făcut disponibil în localități îndepărtate cu ajutorul transmisiilor radio. Multe țări întrețin stații radio pentru acest scop. Una dintre acestea este stația WWV, situată în Fort Collins, Colorado și condusă de Biroul National de Standarde. Ea emite pe frecvențele purtătoare de 2,5; 5; 10; 15 și $25 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$, stabilizate cu o precizie de $1 : 10^{10}$ prin comparație cu un ceasornic cu cesiu. La intervale de 5 min, WWV emite alternativ un ton pur de 440 s^{-1} (nota La) și un ton de 600 s^{-1} . De zece ori pe oră el emite semnale de timp folosind un sistem de codificare digital binar; semnalele sînt bazate pe rotația Pământului, adică ele se referă la timpul universal. Se fac corecții pentru fluctuațiile axei terestre și pentru variația anuală a vitezei de rotație a Pământului.

În 1964 secunda bazată pe ceasornicul cu cesiu a fost adoptată *temporar* ca etalon internațional de către cea de-a 12-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți care a avut loc la Paris. Această acțiune mărește precizia măsurărilor de timp pînă la $1 : 10^{11}$, o îmbunătățire de circa 200 peste precizia furnizată prin metodele astronomice. Dacă două ceasornice cu cesiu funcționează cu această precizie și dacă nu există alte surse de erori atunci ceasornicele vor diferi doar printr-o secundă la un interval de cinci mii de ani.

Ceasornicele atomice sînt încă în faza dezvoltării rapide și după 1965, acesta este motivul pentru care „secunda pe bază de cesiu” a fost adoptată doar temporar. De exemplu, maserul cu hidrogen promite să dea un ceasornic cu o eroare de numai o secundă la 33 milioane ani.

1-6. Sisteme de unități

După cum s-a mai subliniat, există un anumit grad de arbitrar în alegerea mărimilor fundamentale¹. De exemplu, lungimea, timpul și masa pot fi alese ca mărimi fundamentale. Toate celelalte mărimi mecanice, precum forța, momentul forței, densitatea etc. pot fi exprimate prin aceste mărimi fundamentale. Am putea însă foarte bine să alegem forța în locul masei drept mărime fundamentală. Alegînd însă mărimile fundamentale și determinînd unitățile acestora, noi determinăm prin aceasta automat unitățile mărimilor derivate. Cel mai frecvent folosite în știință și tehnică sînt trei sisteme diferite de unități. Acestea sînt: sistemul metru-kilogram-secundă sau MKS, sistemul Gauss în care unitățile mecanice

¹ Vezi „Dimensiuni, unități și etaloane” de A. G. McNish, în *Physics Today*, aprilie 1957.

PREFIXELE FOLOSITE PENTRU MULTIPLII
ȘI SUBMULTIPLII MĂRIMILOR METRICE

10^{-1}	deci-	deca-	10^1
10^{-2}	centi-	hecto-	10^2
10^{-3}	mili-	kilo-	10^3
10^{-6}	micro-	mega-	10^6
10^{-9}	nano-	giga-	10^9
10^{-12}	pico-	tera-	10^{12}

fundamentale sînt centimetrul, gramul și secunda (sistemul CGS) și sistemul tehnic metrul-kilogramul-forță-secunda sau sistemul MKfS. Gramul și kilogramul sînt unități de masă în timp ce kilogramul-forță este o unitate de forță; acestea vor fi definite și discutate în capitolul 5.

Noi vom folosi în special sistemul MKS peste tot în text, cu excepția mecanicii unde va fi folosit și sistemul MKfS. Sistemul metric este folosit în mod universal în cercetările științifice și asigură unități obișnuite în comerț în majoritatea țărilor din lume.

Unele prefixe folosite pentru a numi multiplii și submultiplii mărimilor metrice sînt arătate în tabela 1-3. Astfel, 1 milimetru = 10^{-3} metri, 1 nanosecundă = 10^{-9} secunde, 1 megavolt = 10^6 V etc.

O parte a literaturii de fizică este scrisă în sistemul Gauss. Studentului în fizică trebuie să-i devină familiare mai multe sisteme de unități și trebuie să-și dezvolte îndemînarea de a opera cu ele. Legile fizicii care exprimă relații între mărimi fizice observabile, sînt însă aceleași (neschimbate) în conținutul și semnificația lor fizică, indiferent de sistemul de unități folosit pentru a le exprima.

Întrebări

1. Credeți că o definiție a unei mărimi fizice pentru care nu se cunoaște sau nu se dă nici un procedeu de măsurare, are sens?

2. Conform concepției operaționale, dacă nu putem prescrie o operație realizabilă pentru determinarea unei mărimi fizice, mărimea nu este detectabilă cu mijloace fizice și trebuie respinsă ca neavînd nici o realitate fizică. Nu toți oamenii de știință acceptă acest punct de vedere. Care sînt meritele și lipsurile acestui punct de vedere după părerea dv.?

3. Ce alte caracteristici, în afară de accesibilitate și invariabilitate, considerați ca fiind dezirabile pentru un etalon fizic?

4. Dacă cineva v-ar spune că, peste noapte, toate dimensiunile, tuturor obiectelor s-au redus la jumătate din valoarea lor inițială, cum ați putea respinge această afirmație?

5. Cum ați critica următoarea afirmație: „O dată ce ați ales un etalon fizic, prin însăși semnificația de etalon, este el invariabil”?

6. Ce înțelege un observator de pe Pământ prin „sus” și „jos”? Folosesc toți acești observatori același sistem de referință? Cum s-ar putea face mai clar sensul („sus” și „jos”) pentru orice observator?

7. De ce era necesar să se specifice temperatura la care trebuiau făcute comparațiile cu metrul etalon? Poate fi numită lungimea mărime fundamentală dacă o altă mărime fizică, precum temperatura, trebuie specificată în alegerea unui etalon?

8. Poate fi măsurată lungimea de-a lungul unei linii curbe? Dacă da, atunci cum?

9. Puteți sugera o cale de măsurare: (a) a razei Pământului; (b) a distanței dintre Soare și Pământ; (c) a razei Soarelui?

10. Puteți sugera o cale de măsurare: (a) a grosimii unei coli de hârtie; (b) a grosimii peliculei unui balon de săpun; (c) a diametrului unui atom?

11. Ce criterii trebuie să satisfacă un bun ceasornic?

12. Numiți mai multe fenomene repetitive care se produc în natură și care ar putea servi ca etaloane rezonabile de timp.

13. Timpul necesar Lunii pentru a reveni într-o anumită poziție dată, văzută pe fondul stelelor fixe, se numește lună siderală. Intervalul de timp între două faze identice ale Lunii se numește lună lunară. Luna lunară este mai lungă decât luna siderală. De ce?

14. Dacă omul ar coloniza alte planete, ce neajunsuri ar prezenta etaloanele noastre actuale de lungime și timp? Ce neajunsuri ar avea etaloanele atomice?

15. Puteți imagina un mod de definire a etalonului de lungime pe baza unui etalon de timp sau invers? (Gândiți-vă la un ceasornic cu pendul.) Dacă este așa, pot fi lungimea și timpul considerate ambele ca mărimi fundamentale?

Probleme

1. Exprimați înălțimea dv. în sistemul metric de unități.

2. Pentru marcarea distanțelor pe șosele se folosesc intervalele de 100 iarde și 100 metri între indicatoare. Care interval este mai lung? Cu câți metri este el mai lung? Cu câte „picioare” (feet) este mai lung?

3. O rachetă a atins o altitudine de 300 km. Cât este această distanță în mile?

4. Strungarii ar dori să aibă o câlibre etalon (de control) (de 1 inch lungime, de exemplu) cu o precizie de 0,0000001 inch. Arătați că metrul din platină-iridiu nu poate măsura cu această precizie, în schimb metrul pe bază de crypton-86 poate. Folosiți datele din acest capitol.

5. Presupuneți că distanța medie de la Pământ la Soare este de 400 de ori mai mare decât distanța medie de la Pământ la Lună. Acum considerați o eclipsă totală de Soare și formulați concluziile ce pot fi trase despre: (a) relația dintre diametrul Soarelui și diametrul Lunii; (b) volumele relative ale Soarelui și Lunii. (c) Găsiți unghiul format de razele vizuale duse la capetele diametrului unei monede care eclipsează exact Luna plină și din acest rezultat experimental, cunoscând distanța dintre Lună și Pământ ($=3,80 \cdot 10^5$ km), evaluați diametrul Lunii.

6. Distanțele astronomice sînt atît de mari în comparație cu cele terestre încît pentru înțelegerea ușoară a distanțelor relative dintre obiectele astro-

nomice, sînt folosite unități de lungime mult mai mari. O *unitate astronomică* (UA) este egală cu distanța medie de la Pămînt la Soare, aproximativ $93,9 \cdot 10^6$ mîle ($1,49 \cdot 10^8$ km). Un *parsec* este distanța la care o unitate astronomică subîntinde un unghi de 1 secundă de arc. Un *an lumină* este distanța pe care ar parcurge-o lumina în timp de un an, propagîndu-se prin vid cu o viteză de 186 000 mîle/sec ($3,00 \cdot 10^8$ m/s). (a) Exprimați distanța de la Pămînt la Soare în parseci și în ani-lumină. (b) Exprimați un an lumină și un parsec în mîle.

7. Presupunînd că durata zilei crește uniform cu 0,001 s într-un secol, calculați efectul cumulativ asupra măsurării timpului pentru douăzeci de secole. O astfel de încetinire a rotației Pămîntului este indicată de observațiile asupra aparițiilor eclipselor de Soare în timpul acestei perioade.

8. (a) O unitate de timp folosită uneori în fizica microscopică este „pulsul”. Un puls este egal cu 10^{-8} s. Sînt mai multe pulsuri într-o secundă decît secunde într-un an? (b) Omenirea există de aproximativ 10^6 ani, în

timp ce Universul are o vîrstă de aproximativ 10^{10} ani. Dacă vîrsta Universului se ia egală cu o zi, cîte secunde va reprezenta existența omenirii?

9. (a) Raza protonului este de aproximativ 10^{-15} m; raza Universului observabil este de aproximativ 10^{26} m. Indicați o distanță cu semnificație fizică care să fie situată aproximativ la jumătate între aceste două extreme, într-o scară logaritmică. (b) Timpul mediu de viață al unui pion neutru (o particulă elementară) este de aproximativ $2 \cdot 10^{-16}$ s. Vîrsta Universului este de aproximativ $4 \cdot 10^9$ ani. Indicați un interval de timp, cu sens fizic, care să fie situat aproximativ la mijloc între aceste două extreme, într-o scară logaritmică.

10. Din figura 1-4, calculați cu cit diferă perioada de rotație a Pămîntului în mijlocul verii de perioada de rotație din primăvara următoare.

11. Un distrugător naval probează cinci ceasornice. Exact la amiază, determinată de un semnal de timp WWV, ceasornicele indicau următoarele ore în zilele succesive ale unei săptămîni:

Cea- sorni- Duminică cul	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sîmbătă	
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

Cum ați aranja aceste cinci ceasornice, în ordinea valorii lor relative, ca

indicatoare bune de timp? Justificați alegerea dv.

Vectori

2-1. Vectori și scalari

Schimbarea (variația) poziției unei particule se numește *deplasare*. Dacă o particulă se mișcă din poziția A în poziția B (fig. 2-1, a), putem reprezenta deplasarea sa trasând o linie de la A la B ; direcția și sensul deplasării pot fi indicate punând o săgeată în B care să indice faptul că deplasarea a avut loc *de la A la B* . Traectoria particulei nu trebuie să fie neapărat o linie dreaptă de la A la B ; săgeata reprezintă numai efectul net al mișcării, nu mișcarea reală.

În figura 2-1, b , de exemplu, noi reprezentăm o traiectorie urmată de o particulă de la A la B . Traectoria nu este aceeași cu deplasarea AB . Dacă am lua instantanee ale particulei în momentul când ea se găsea în A și apoi când ea se găsea într-o poziție intermediară P , am obține vectorul deplasare AP , reprezentând efectul net al mișcării în timpul acestui interval, deși n-am ști traectoria reală dintre aceste puncte. Mai mult, o deplasare precum $A'B'$ (fig. 2-1, a) care este paralelă cu AB , orientată în același mod și egală ca lungime cu AB , reprezintă aceeași *variație* a poziției ca și AB . Noi nu facem vreo distincție între aceste două deplasări. O deplasare este de aceea caracterizată printr-o *lungime*, o *direcție* și un *sens* pe această direcție.

Într-un mod analog putem reprezenta deplasarea următoare de la B la C (fig. 2-1, c). Efectul net al celor două deplasări va fi același ca o deplasare de la A la C . Spunem atunci că AC este *suma* sau *rezultanta* deplasărilor AB și BC . Observați că această sumă nu este o sumă algebrică și că un singur număr nu o poate caracteriza.

Mărimile care se comportă asemănător deplasărilor se numesc *vectori*¹. Vectorii sînt deci mărimi care au atît o intensitate (mărime sau

¹ Cuvîntul *vector* vine din l. latină și înseamnă *purtător*, ceea ce sugerează o deplasare. O referire generală bună asupra vectorilor este cartea *Analiza vectorială și tensorială* de G. E. Hay, Dover Publications, 1953.

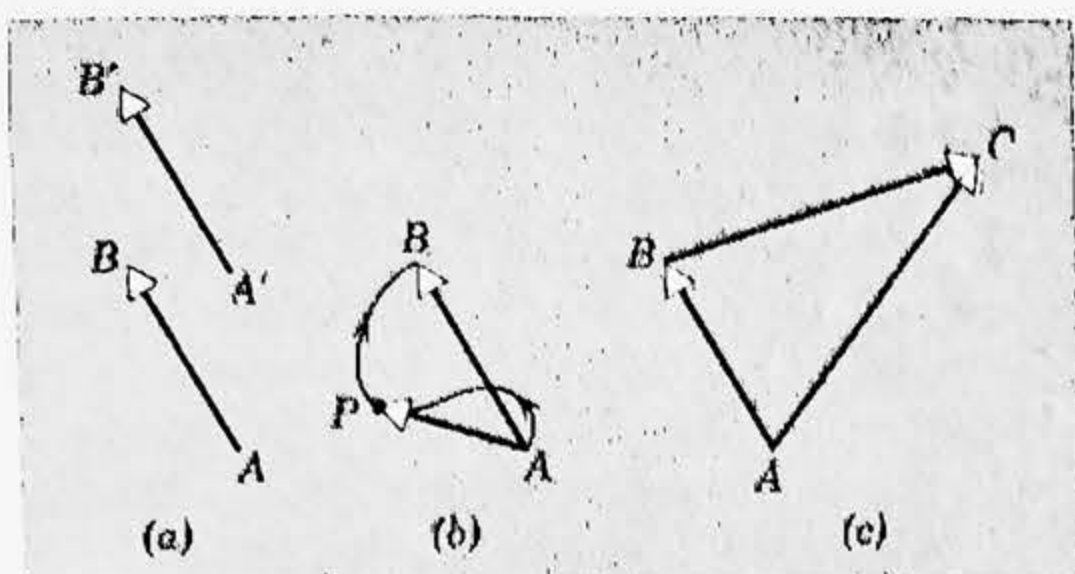


Figura 2-1. Vectori deplasare. (a) Vectorii AB și $A'B'$ sînt identici deoarece ei au aceeași lungime, direcție și sînt îndreptați în același sens. (b) Traectoria reală a particulei în mișcare de la A la B poate fi curba arătată; deplasarea rămîne vectorul AB . Într-un punct intermediar P deplasarea de la A este vectorul AP . (c) După deplasarea AB particula suferă o altă deplasare BC . Efectul net al celor două deplasări este reprezentat de vectorul AC .

modul) cît și o direcție și un sens pe această direcție. Vectorii se compun după anumite reguli de compunere. Aceste reguli sînt stabilite mai jos. Vectorul deplasare poate fi considerat ca un reprezentant. Alte mărimi fizice care sînt vectori sînt: forța, viteza, accelerația, intensitatea cîmpului electric și inducția magnetică. Multe din legile fizicii pot fi exprimate într-o formă compactă folosind vectori; consecințele care implică aceste legi sînt adesea mult simplificate dacă exprimăm mărimile prin vectori.

Mărimile care pot fi complet caracterizate de un număr și o unitate, și care au deci numai intensitate sau mărime, se numesc *scalari*. Cîteva mărimi fizice care sînt scalari sînt: masa, lungimea, timpul, densitatea, energia și temperatura. Scalarii pot fi tratați cu ajutorul regulilor din algebra elementară.

2-2. Adunarea (compunerea) vectorilor, metoda geometrică

Pentru a reprezenta un vector într-o diagramă desenăm o săgeată. Alegem lungimea săgeții proporțională cu mărimea vectorului (adică alegem o scară) și alegem direcția și sensul săgeții în direcția și sensul vectorului, astfel încît vîrfurile săgeții să dea sensul pe această direcție. De exemplu, o deplasare de 4 m spre nord-est la o scară de 1,0 cm per 1 m, va fi reprezentată printr-o săgeată de 4,0 cm lungime, trasată sub un unghi de 45° față de direcția orizontală, cu vîrfurile săgeții spre capătul din dreapta. Un vector ca acesta se reprezintă convenabil în tipar printr-o literă grasă (aldină), cum este \mathbf{d} . În scrierea de mînă este convenabil să punem o săgeată deasupra literei pentru a indica o mărime vectorială, precum \vec{d} .

Adesea ne va interesa numai mărimea vectorului și nu direcția sa. Mărimea lui \vec{d} poate fi scrisă ca $|\vec{d}|$, numită valoare absolută sau modulul lui \vec{d} ; mai frecvent reprezentăm mărimea printr-o literă cursivă, precum d . Litera grasă înseamnă ambele proprietăți ale vectorului: mărime (modul) și direcție (și sens).

Să considerăm acum figura 2-2 în care am redesenat și renotat vectorii din figura 2-1, c. Relația dintre aceste deplasări (vectori) poate fi scrisă astfel

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}. \quad (2-1)$$

Regulile care trebuie urmate pentru a efectua această adunare (vectorială) pe cale geometrică sînt următoarele: pe o diagramă, la o anumită scară, desemnăm vectorul deplasare \vec{a} ; apoi desenăm vectorul \vec{b} cu originea sa la capătul lui \vec{a} și apoi trasăm o linie de la originea lui \vec{a} pînă la vîrful lui \vec{b} pentru a construi astfel suma vectorială \vec{r} . Aceasta este

o deplasare echivalentă ca lungime și direcție cu deplasările succesive \vec{a} și \vec{b} . Acest procedeu poate fi generalizat pentru a obține suma oricărui număr de deplasări succesive.

Deoarece vectorii sînt mărimi noi, trebuie să ne așteptăm la reguli noi pentru operațiile cu ei. Simbolul „+” din ecuația 2-1 are o semnificație diferită de cel din aritmetică sau algebra elementară. El ne arată că trebuie să efectuăm un alt șir de operații.

Folosind figura 2-3 putem verifica două proprietăți importante ale adunării vectoriale:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\text{legea comutativității}) \quad (2-2)$$

și

$$\vec{d} + (\vec{e} + \vec{f}) = (\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f}. \quad (\text{legea asociativității}) \quad (2-3)$$

Aceste legi ne arată că ordinea sau modul de grupare a vectorilor în operația de adunare nu are nici o importanță; suma este aceeași. În această privință, adunarea vectorială și adunarea scalară urmează aceleași reguli.

Operația de scădere poate fi inclusă în algebra noastră vectorială, definind în prealabil vectorul cu semn schimbat ca fiind un alt vector

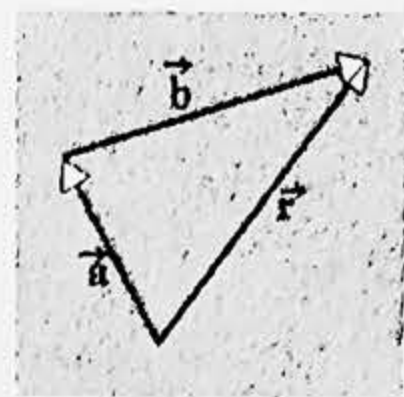


Figura 2-2. Suma vectorială $\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$. A se compara cu figura 2-1, c.

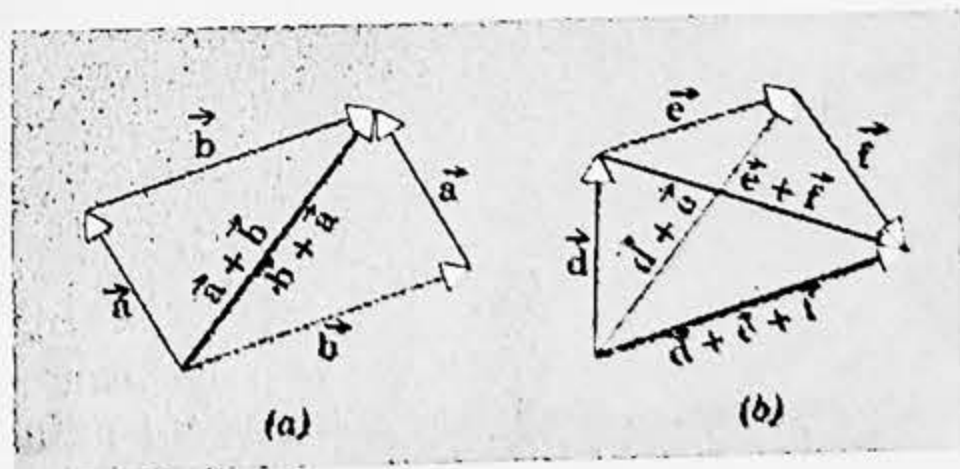


Figura 2-3. (a) Legea comutativității pentru sumele de vectori, care afirmă că $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. (b) Legea asociativității care afirmă că $\vec{d} + (\vec{e} + \vec{f}) = (\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f}$.

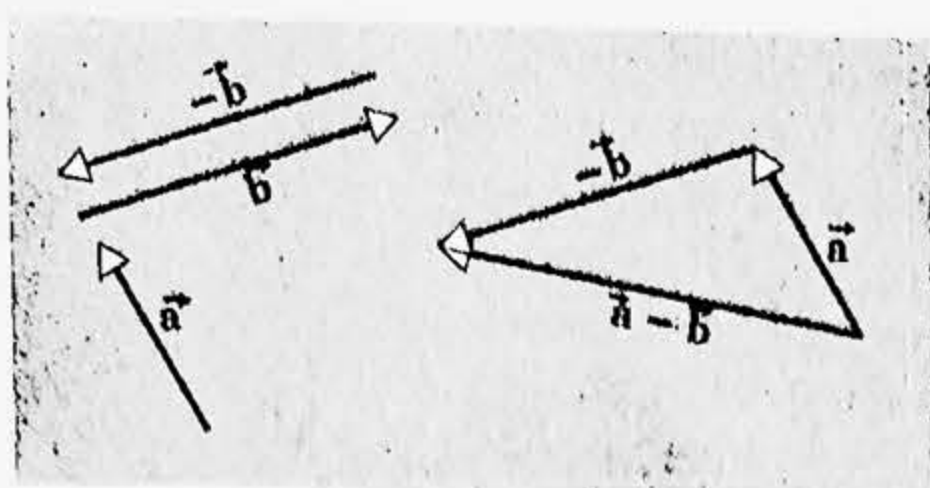


Figura 2-4. Diferența vectorială $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

de același modul, de aceeași direcție dar de sens opus. Atunci

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \quad (2-4)$$

așa cum se arată în figura 2-4.

Amintim că, deși am folosit deplasările pentru a ilustra aceste operații, regulile stabilite se aplică tuturor mărimilor vectoriale.

2-3. Descompunerea și compunerea vectorilor, metoda analitică

Metoda geometrică de compunere a vectorilor nu este prea utilă pentru vectorii în spațiul tridimensional; uneori ea este chiar incomodă în cazul bidimensional. O altă cale de adunare a vectorilor este metoda analitică care implică descompunerea unui vector în componente într-un anumit sistem de coordonate.

Figura 2-5, a prezintă un vector \vec{a} a cărui origină este plasată în originea unui sistem rectangular de coordonate. Dacă coborâm perpendiculare din vârful lui \vec{a} pe axe, mărimile a_x și a_y astfel obținute se numesc *componentele* vectorului \vec{a} . Procedul se numește *descompunerea unui vector în componentele sale*. Figura 2-5 arată, pentru comoditate, un caz bidimensional; extensiunea concluziilor noastre la cazul tridimensional este clară.

Un vector poate avea mai multe sisteme de componente. De exemplu, dacă rotim axa x și axa y din figura 2-5, a, cu 10° în sens antiorar (trigonometric), componentele lui \vec{a} vor fi diferite. Mai mult, putem folosi un sistem de coordonate oblice, adică unghiul dintre cele două axe nu trebuie să fie neapărat 90° . În modul acesta, componentele unui vector

sînt în mod unic determinate numai dacă specificăm (indicăm) sistemul de coordonate folosit. Pentru a-i găsi componentele, vectorul nu trebuie desenat neapărat cu originea situată în originea sistemului de coordonate — deși noi am făcut aceasta din comoditate; el poate fi deplasat oriunde în cadrul sistemului de coordonate și, atîta timp cît unghiurile sale cu direcțiile axelor

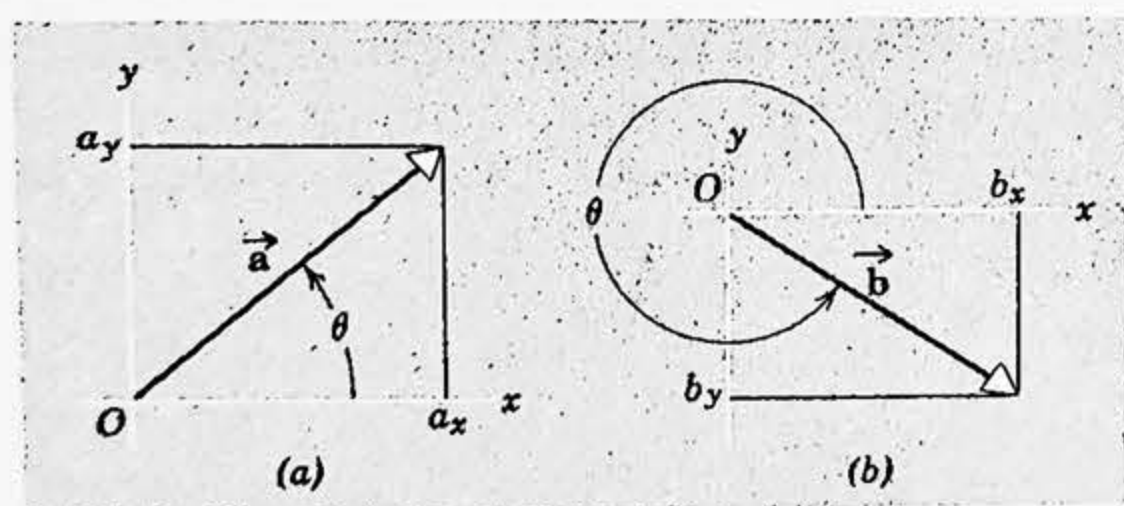


Figura 2-5. Două exemple de descompunere a unui vector în componentele sale scalare într-un sistem de coordonate particular.

lor de coordonate sînt menținute neschimbate, componentele sale nu se vor schimba.

Componentele a_x și a_y din figura 2-5, a se află ușor din relațiile

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{și} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (2-5)$$

unde θ este unghiul pe care vectorul \vec{a} îl face cu direcția pozitivă a axei x măsurat în sens antiorar (sens trigonometric) de la această axă. Observați că, în funcție de unghiul θ componentele a_x și a_y pot fi pozitive sau negative. De exemplu, în figura 2-5, b, b_y este negativ iar b_x este pozitiv. Componentele unui vector se comportă ca niște mărimi scalare deoarece, într-un anumit sistem de coordonate, este nevoie doar de un număr prevăzut cu un semn algebric, pentru a caracteriza o astfel de componentă.

Odată ce vectorul este descompus în componentele sale, componentele însele pot fi folosite pentru a caracteriza vectorul. În locul celor două numere a (modulul vectorului) și θ (direcția vectorului față de axa x) avem acum cele două numere a_x și a_y . Putem trece de la o descriere la alta a vectorului, fie prin componentele sale a_x , a_y , fie prin modulul a și direcția θ . Pentru a obține pe a și θ din a_x și a_y , deducem din figura 2-5, a că:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2-6, a)$$

și

$$\operatorname{tg} \theta = a_y / a_x. \quad (2-6, b)$$

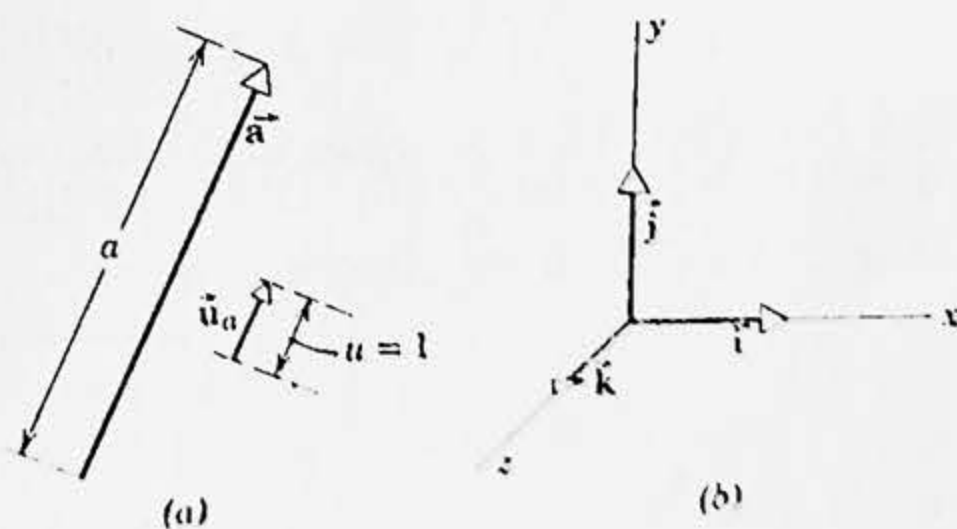
Cadrantul în care se află θ este determinat de semnele lui a_x și a_y .

În descompunerea unui vector în componentele sale este uneori util să introducem un vector de modul egal cu unitatea într-o direcție dată. Astfel, vectorul \vec{a} din figura 2-6, a poate fi scris, de exemplu, așa:

$$\vec{a} = \vec{u}_a a, \quad (2-7)$$

unde \vec{u}_a este *vectorul unitate* (versor) în direcția lui \vec{a} . Adesea este comod să trasăm versorii de-a lungul axelor sistemului de coordonate ales. În cazul sistemelor de coordonate ortogonale se folosesc de obicei simboluri speciale \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} pentru versorii direcțiilor pozitive ale axelor

Figura 2-6. (a) Vectorul \vec{a} poate fi scris sub forma $\vec{u}_a a$ în care \vec{u}_a este versorul în direcția lui \vec{a} . (b) Versorii \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} , folosiți pentru a specifica direcțiile pozitive ale axelor x , y respectiv z .



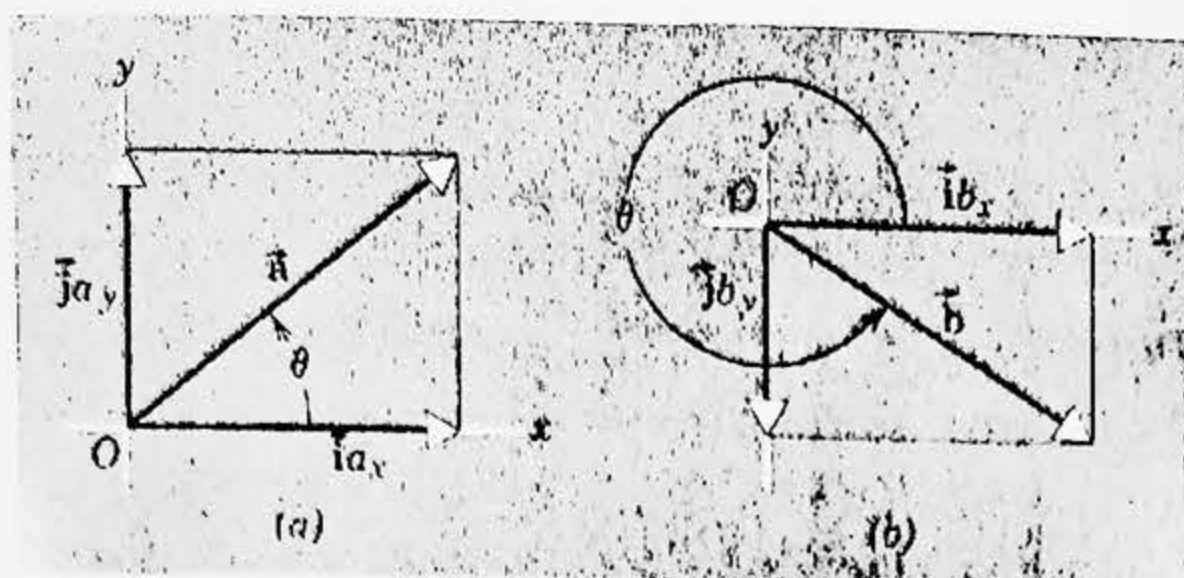


Figura 2-7. Două exemple de descompunere a unui vector în componentele sale vectoriale într-un sistem de coordonate particular; faceți comparație cu figura 2-5.

lor x , y și respectiv z ; vezi figura 2-6, b. Observați că \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} nu trebuie neapărat desenați în origine. Ca oricare alt vector, ei pot fi translați oriunde în cadrul sistemului de coordonate, atîta timp cît direcțiile lor față de axe de coordonate nu sînt schimbate.

Vectorii \vec{a} și \vec{b} din figura 2-5 pot fi scriși cu ajutorul componentelor lor și a versorilor astfel:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y \quad (2-8, a)$$

și

$$\vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y; \quad (2-8, b)$$

vezi figura 2-7. Relația vectorială din ecuația (2-8, a) este echivalentă cu relația scalară din ecuația (2-6); fiecare din ele leagă vectorul (\vec{a} sau a și θ) de componentele sale (a_x și a_y). Uneori vom numi cantitățile $\vec{i}a_x$ și $\vec{j}a_y$ din ecuația (2-8, a) componentele *vectoriale* ale lui \vec{a} ; ele sînt desenate ca vectori în figura 2-7, a. Cuvîntul singur *componentă* se va referi în continuare la cantitățile scalare a_x și a_y .

Să considerăm acum adunarea vectorilor cu ajutorul metodei analitice. Fie \vec{r} suma celor doi vectori \vec{a} și \vec{b} situați în planul $x-y$, astfel încît

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (2-9)$$

Într-un sistem de coordonate dat, doi vectori, cum sînt \vec{r} și $\vec{a} + \vec{b}$, pot fi egali numai dacă componentele lor corespunzătoare sînt egale sau

$$r_x = a_x + b_x \quad (2-10, a)$$

și

$$r_y = a_y + b_y. \quad (2-10, b)$$

Aceste două ecuații algebrice, luate împreună, sînt echivalente cu o singură relație vectorială (2-9). Din ecuațiile (2-6) putem afla pe r și unghiul θ pe care îl face \vec{r} cu axa x , adică

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

și

$$\operatorname{tg} \theta = r_y / r_x.$$

Astfel avem următoarea regulă analitică pentru adunarea vectorilor: descompunem fiecare vector în componentele sale într-un anumit sistem de coordonate; suma algebrică a componentelor individuale de-a lungul unei anumite axe este egală cu componenta vectorului sumă de-a lungul aceleiași axe; vectorul sumă poate fi reconstituit din moment ce sînt cunoscute componentele sale. Această metodă de adunare a vectorilor poate fi generalizată la mai mulți vectori și la spațiul tridimensional (vezi problemele 6 și 11).

Avantajul metodei de descompunere a vectorilor în componente, față de adunarea lor directă, cu folosirea relațiilor trigonometrice potrivite, este acela că avem de a face totdeauna cu triunghiuri dreptunghice și astfel calculele se simplifică.

În adunarea vectorilor cu ajutorul metodei analitice, alegerea axelor de coordonate determină simplitatea procedurii. Uneori, componentele vectorilor în raport cu un anumit sistem de axe sînt cunoscute chiar de la început, astfel încît alegerea axelor este evidentă. Alteori, o alegere judicioasă a axelor poate simplifica mult munca de descompunere a vectorilor în componente. De exemplu, axele pot fi orientate astfel încît cel puțin unul din vectori să fie așezat paralel cu una din axe.

Exemplul 1. Un aeroplan parcurge 130 km pe un drum rectiliniu care formează un unghi de $22,5^\circ$ spre est față de direcția nord. Ce drum spre nord și ce drum spre est parcurge aeroplanul începînd din punctul de plecare?

Alegem direcția pozitivă a axei x spre est și direcția pozitivă a axei y spre nord. Apoi (fig. 2-8) trasăm un vector deplasare de la origine (punctul de plecare), formînd un unghi de $22,5^\circ$ cu axa y (nord), înclinat spre direcția pozitivă a axei x (est). Lungimea vectorului se alege astfel încît să reprezinte 130 km. Dacă numim acest vector \vec{d} , atunci d_x dă distanța parcursă spre est de la punctul de plecare, iar d_y dă distanța parcursă spre nord de la punctul de plecare. Avem

$$\theta = 90,0^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ,$$

astfel încît (vezi ecuațiile 2-5)

$$d_x = d \cos \theta = 130 \text{ km} \cdot \cos 67,5^\circ = 50 \text{ km}$$

și

$$d_y = d \sin \theta = 130 \text{ km} \cdot \sin 67,5^\circ = 120 \text{ km}.$$

Exemplul 2. Un automobil parcurge 30 km spre răsărit pe un drum orizontal. Apoi cotește la o intersecție spre nord și parcurge 40 km pînă se oprește. Aflați deplasarea rezultantă a vehiculului.

Alegem un sistem de referință fix față de pămînt, cu direcția pozitivă a axei x a sistemului de coordonate îndreptată spre est și direcția pozitivă a axei y îndreptată spre nord. Cele două deplasări succesive, \vec{a} și \vec{b} , sînt apoi desenate ca în figura 2-9. Deplasarea rezultantă \vec{r}

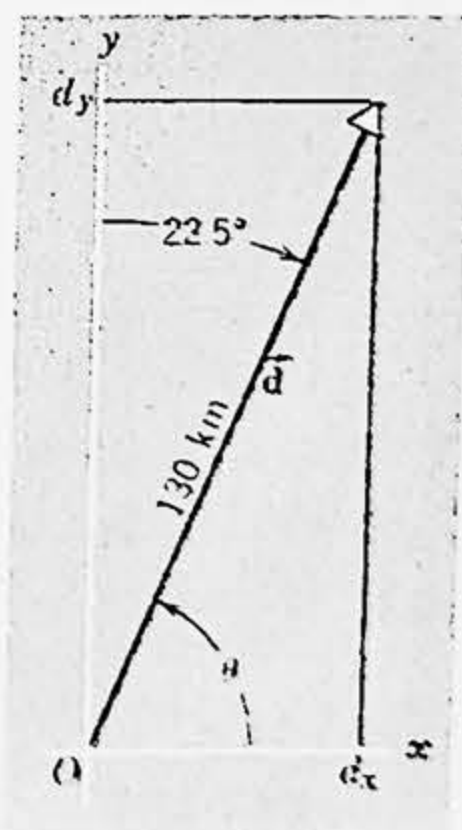


Figura 2-8. Exemplul 1.

se obține prin adunare: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$. Deoarece \vec{b} nu are componentă x iar \vec{a} nu are componentă y , obținem (vezi ecuațiile 2-10)

$$r_x = a_x + b_x = 30 \text{ km} + 0 = 30 \text{ km},$$

$$r_y = a_y + b_y = 0 + 40 \text{ km} = 40 \text{ km}.$$

Mărimea și direcția lui \vec{r} sînt deci (vezi ecuațiile 2-6)

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(30 \text{ km})^2 + (40 \text{ km})^2} = 50 \text{ km},$$

$$\operatorname{tg} \theta = r_y / r_x = \frac{40 \text{ km}}{30 \text{ km}} = 1,33; \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,33 = 53^\circ.$$

Vectorul deplasare rezultat \vec{r} are o mărime de 50 km și formează un unghi de 53° la nord de est.

Exemplul 3. Trei vectori coplanari sînt exprimați în raport cu un anumit sistem de coordonate rectangulare astfel:

$$\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j},$$

$$\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j},$$

și

$$\vec{c} = -3\vec{j},$$

unde componentele sînt date în unități arbitrare. Să se afle vectorul \vec{r} sumă a acestor vectori.

Din ecuațiile (2-10) avem

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1$$

și

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2.$$

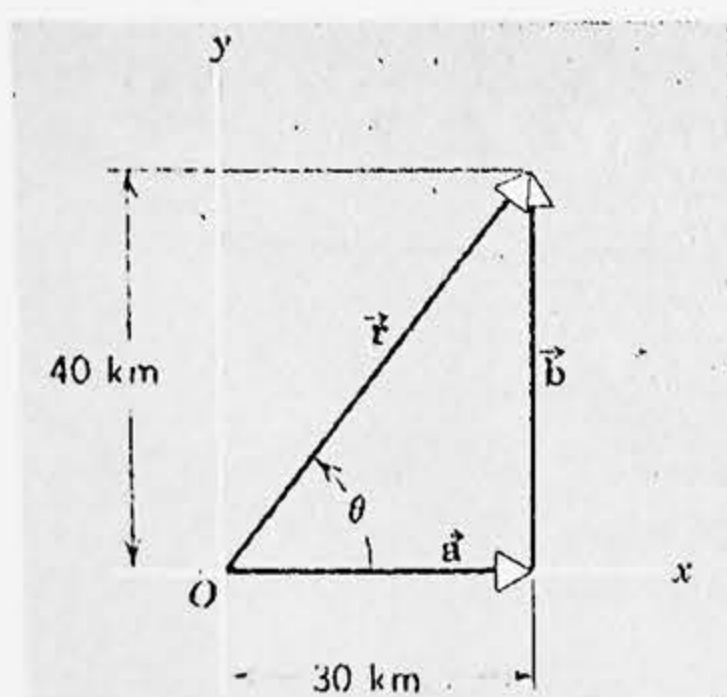


Figura 2-9. Exemplul 2.

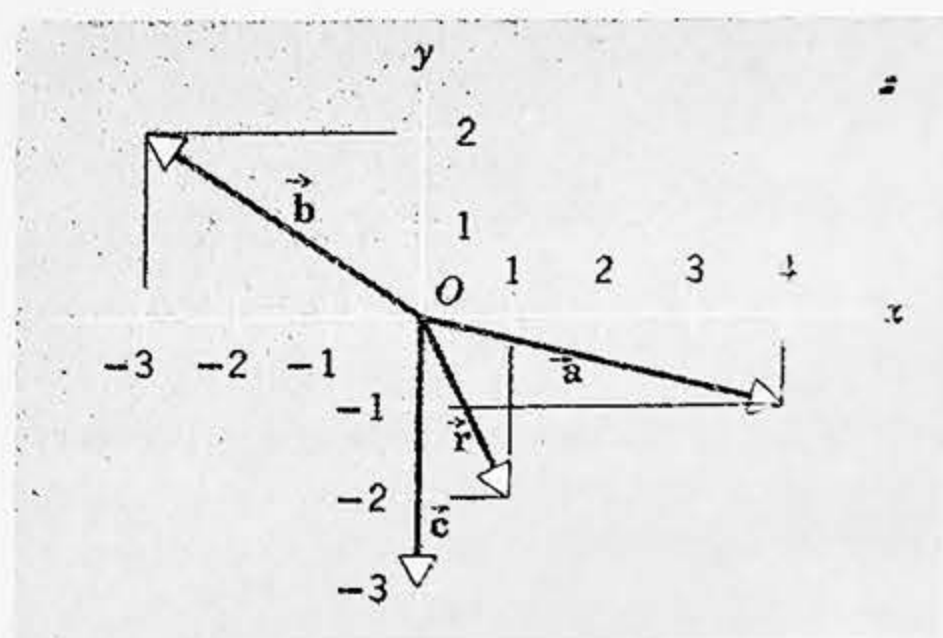


Figura 2-10. Trei vectori \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} și suma lor vectorială \vec{r} .

În modul acesta,

$$\vec{r} = i\vec{r}_x + j\vec{r}_y = i - 2j.$$

Figura 2-10 arată cei 4 vectori. Din ecuațiile (2-6) putem calcula mărimea lui \vec{r} și anume $\sqrt{5}$ și unghiul pe care îl face \vec{r} cu direcția pozitivă a axei x , măsurat în sens trigonometric de la această axă, anume

$$\text{arc tg } (-2/1) = 297^\circ.$$

2-4. Înmulțirea vectorilor¹

Am presupus în discuția precedentă că vectorii care se adună sînt de același tip; adică, se adună vectori deplasare cu vectori deplasare, sau vectori viteză cu vectori viteză. Așa cum n-ar avea sens să adunăm cantități scalare de naturi diferite, precum masa și temperatura, tot astfel n-ar avea sens să adunăm cantități vectoriale de naturi diferite, precum deplasarea și intensitatea cîmpului electric.

Totuși, la fel ca în cazul scalarilor, vectori de naturi diferite pot fi înmulțiți între ei pentru a genera mărimi cu dimensiuni fizice noi. Deoarece vectorii au atît direcție și sens cît și modul, înmulțirea vectorilor nu poate urma aceleași reguli ca și înmulțirea scalarilor. Trebuie să stabilim noi reguli de înmulțire pentru vectori.

Este util să definim trei tipuri de operații de înmulțire pentru vectori: 1) înmulțirea unui vector cu un scalar, 2) înmulțirea a doi vectori astfel încît să se obțină un scalar și 3) înmulțirea a doi vectori, astfel încît să se obțină un alt vector. Există și alte posibilități, însă nu le vom considera aici.

Înmulțirea unui vector cu un scalar are o semnificație simplă: produsul unui scalar k cu un vector \vec{a} , scris $k\vec{a}$, se definește ca fiind un nou vector al cărui modul este de k ori mai mare decît modulul lui \vec{a} . Noul vector are aceeași direcție și același sens cu \vec{a} dacă k este pozitiv și sensul opus dacă k este negativ. Pentru a împărți un vector la un scalar, înmulțim pur și simplu vectorul cu inversul scalarului.

Atunci cînd înmulțim o mărime vectorială cu o altă mărime vectorială, trebuie să facem distincție între *produsul scalar* și *produsul vectorial*. *Produsul scalar* a doi vectori \vec{a} și \vec{b} , notat $\vec{a} \cdot \vec{b}$, este definit prin relația

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \Phi, \quad (2-11)$$

¹ Materialul din acest paragraf va fi folosit mai tîrziu în text. Produsul scalar este folosit pentru prima dată în capitolul 7 iar produsul vectorial în capitolul 11. Profesorul poate amîna acest paragraf după dorință. Prezentarea acestui material aici, oferă o tratare unitară a algebrei vectoriale și servește drept referință convenabilă pentru materialul următor.

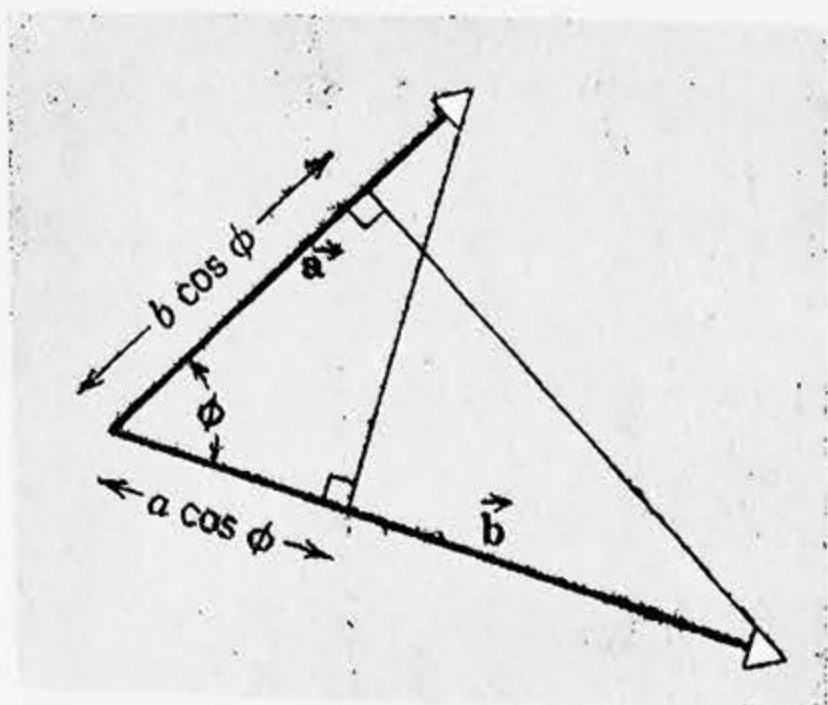


Figura 2-11. Produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b} (= ab \cos \Phi)$ este produsul mărimii unui vector (de exemplu, a) cu componenta celuilalt vector pe direcția primului vector ($b \cos \Phi$, de exemplu).

unde a este modulul vectorului \vec{a} , b este modulul vectorului \vec{b} iar $\cos \Phi$ este cosinusul unghiului Φ dintre cei doi vectori¹ (vezi fig. 2-11).

Deoarece a și b sînt scalari, iar $\cos \Phi$ este un număr pur, *produsul scalar a doi vectori este un scalar*. Produsul scalar a doi vectori poate fi privit ca fiind produsul modului unuia din vectori cu componenta celuilalt vector pe direcția primului.

Am fi putut defini $\vec{a} \cdot \vec{b}$ printr-o operație arbitrară, de exemplu, $a^{1/3} b^{1/3} \tan(\Phi/2)$, dar aceasta n-ar fi de nici un folos în fizică. Cu definiția dată de noi produsului scalar, numeroase mărimi fizice importante pot fi exprimate ca produse scalare a doi vectori. Unele dintre acestea sînt:

lucrul mecanic, energia potențială gravitațională, potențialul electric, puterea electrică și densitatea de energie electromagnetică. Cînd vor fi discutate mai tîrziu astfel de mărimi, vom sublinia legătura lor cu produsul scalar al vectorilor.

Produsul vectorial a doi vectori \vec{a} și \vec{b} se notează $\vec{a} \times \vec{b}$ și este un alt vector \vec{c} , anume $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Modulul lui \vec{c} este definit prin

$$c = ab \sin \Phi, \quad (2-12)$$

unde Φ este unghiul dintre \vec{a} și \vec{b} .

Direcția lui \vec{c} , adică a produsului vectorial dintre \vec{a} și \vec{b} , este definită ca fiind perpendiculara pe planul format de \vec{a} și \vec{b} . Pentru a preciza sensul vectorului \vec{c} ne vom referi la figura 2-12. Să ne imaginăm un șurub drept a cărui axă este perpendiculară pe planul format de \vec{a} și \vec{b} și să-l rotim de la \vec{a} la \vec{b} , prin unghiul Φ dintre ei. Atunci direcția de înaintare a șurubului va da direcția și sensul produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ (fig. 2-12, a). O altă cale convenabilă de a obține direcția și sensul unui produs vectorial este următoarea. Să ne imaginăm o axă perpendiculară pe planul lui \vec{a} și \vec{b} trecînd prin originea lor. Acum să strîngem degetele *mîinii drepte* în jurul acestei axe și să împingem vectorul \vec{a} către vectorul \vec{b} prin unghiul mai mic dintre ei, cu vîrfurile degetelor, ținînd

¹ Între doi vectori există două unghiuri diferite ce depind de sensul rotației. Noi întotdeauna alegem unghiul cel mai mic dintre cele două unghiuri, în definirea produsului vectorilor.

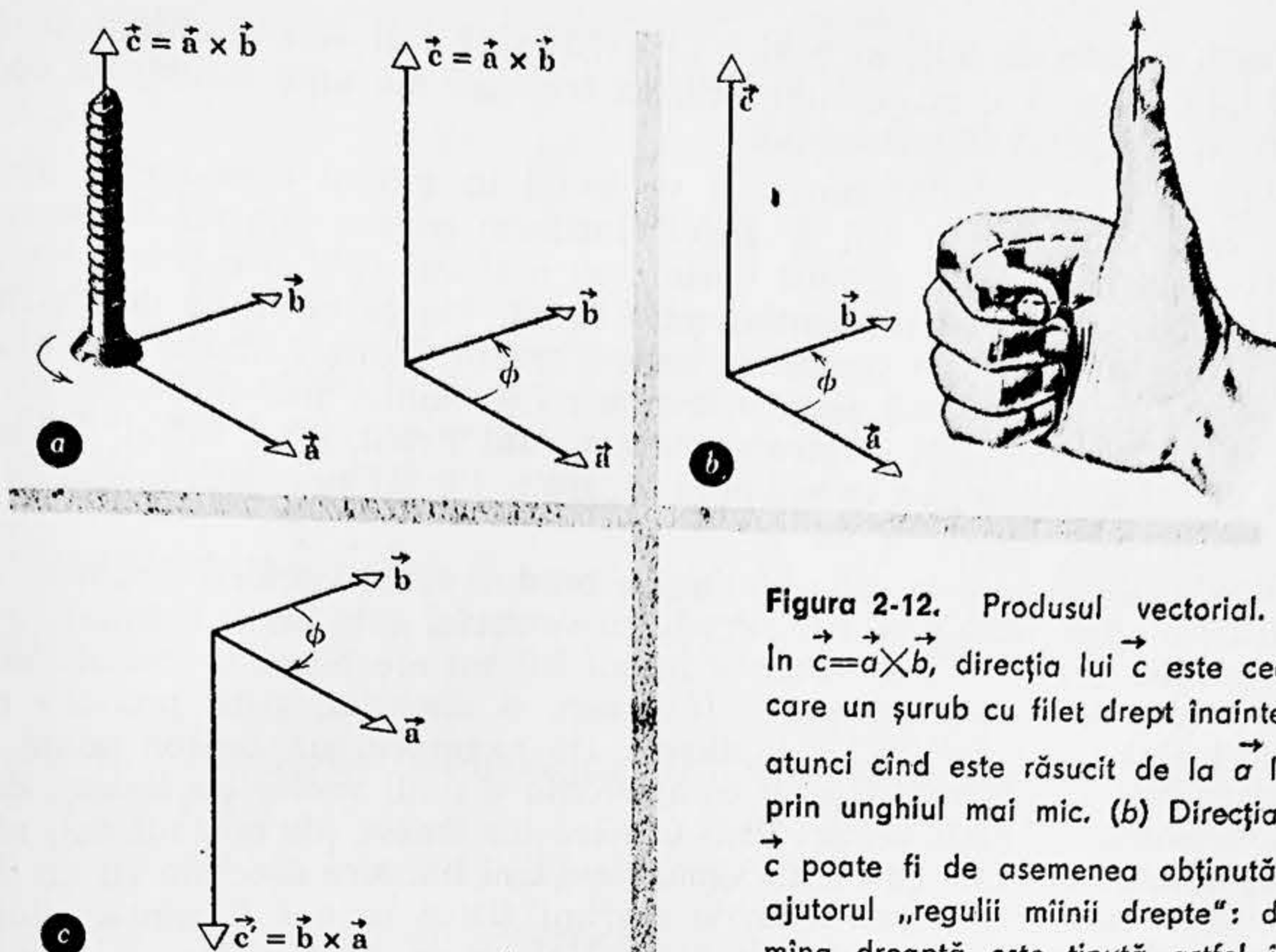


Figura 2-12. Produsul vectorial. (a) În $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, direcția lui \vec{c} este cea în care un șurub cu filet drept înăștează atunci când este răsucit de la \vec{a} la \vec{b} prin unghiul mai mic. (b) Direcția lui \vec{c} poate fi de asemenea obținută cu ajutorul „regulii mîinii drepte”: dacă mîna dreaptă este ținută astfel încît degetele îndoite să urmărească rotația lui \vec{a} către \vec{b} , atunci degetul mare ridicat va indica direcția și sensul lui \vec{c} . (c) Produsul vectorial își schimbă semnul atunci cînd ordinea factorilor este inversată: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

degetul mare ridicat; direcția degetului mare ridicat dă, atunci, direcția și sensul produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ (fig. 2-12, b)¹.

Observăm că $\vec{b} \times \vec{a}$ nu este același cu vectorul $\vec{a} \times \vec{b}$, astfel încît ordinea factorilor într-un produs vectorial este importantă. Aceasta nu este valabil pentru scalari, deoarece ordinea factorilor în algebră sau aritmetică nu afectează produsul rezultat. În adevăr, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (fig. 2-12, c). Aceasta se poate deduce din faptul că modulul $ab \sin \Phi$ este egal cu modulul $ba \sin \Phi$, însă sensul lui $\vec{a} \times \vec{b}$ este opus sensului lui $\vec{b} \times \vec{a}$; aceasta se întîmplă datorită faptului că șurubul drept înăștează într-un sens atunci cînd este rotit de la \vec{a} la \vec{b} prin unghiul Φ , însă avansează în sensul opus atunci cînd este rotit de la \vec{b} la \vec{a} prin unghiul Φ . Studentul poate obține același rezultat aplicînd regula mîinii drepte.

¹ Procedeu descris în figura 2-12 este o convenție. Cei doi vectori, cum au fost \vec{a} și \vec{b} , formează un plan și există două sensuri care pleacă dinspre acest plan. Cel ales (prin convenție) folosește mîna dreaptă sau un șurub drept; mîna stîngă sau șurubul stîng ne-ar fi condus la o altă alegere a sensului lui $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dacă Φ este de 90° , \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} ($=\vec{a} \times \vec{b}$) sînt toți sub unghiuri drepte unul față de altul și ne dau direcțiile a trei axe ale unui sistem de coordonate dextrogir, tridimensional.

Rațiunea de a defini produsul vectorial în modul acesta este aceea că el se dovedește a fi util de fizică. Întîlnim adesea mărimi fizice care sînt vectori și al căror produs definit ca mai sus este o mărime vectorială, avînd o importantă semnificație fizică. Unele exemple de mărimi fizice care sînt produse vectoriale sînt: momentul forței, momentul cinetic, forța care acționează asupra unei sarcini mobile într-un cîmp magnetic și fluxul energiei electromagnetice. Mai tîrziu, cînd astfel de mărimi vor fi discutate, se va sublinia legătura lor cu produsul vectorial a doi vectori.

Produsul scalar este cel mai simplu produs a doi vectori. Ordinea înmulțirii nu afectează produsul. Produsul vectorial este cazul cel mai simplu imediat următor. Aici ordinea înmulțirii nu afectează produsul decît prin semn, ceea ce înseamnă o inversare a sensului. Alte produse de vectori sînt utile dar mai complicate. De exemplu, un tensor poate fi generat prin înmulțirea fiecărei componente a unui vector cu fiecare din componentele celui alt vector. Prin urmare un tensor (de ordinul doi) are nouă numere asociate cu el, un vector are trei numere asociate cu el, iar un scalar numai un număr. Unele mărimi fizice ce pot fi reprezentate prin tensori sînt: tensiunile mecanice și electrice, momentele de inerție și deformațiile elastice. Sînt posibile mărimi fizice și mai complexe. În această carte însă vom avea de a face numai cu scalari și vectori.

2-5. Vectorii și legile fizicii

Vectorii sînt foarte utili în fizică. Este util să examinăm ceva mai profund motivele pentru care se întîmplă aceasta. Să presupunem că avem trei vectori \vec{a} , \vec{b} și \vec{r} care au componentele $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ și respectiv r_x, r_y, r_z într-un anumit sistem de coordonate xyz . Să presupunem mai departe că cei trei vectori sînt legați între ei astfel încît

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (2-13)$$

Printr-o simplă extensiune a ecuațiilor (2-10) aceasta înseamnă că

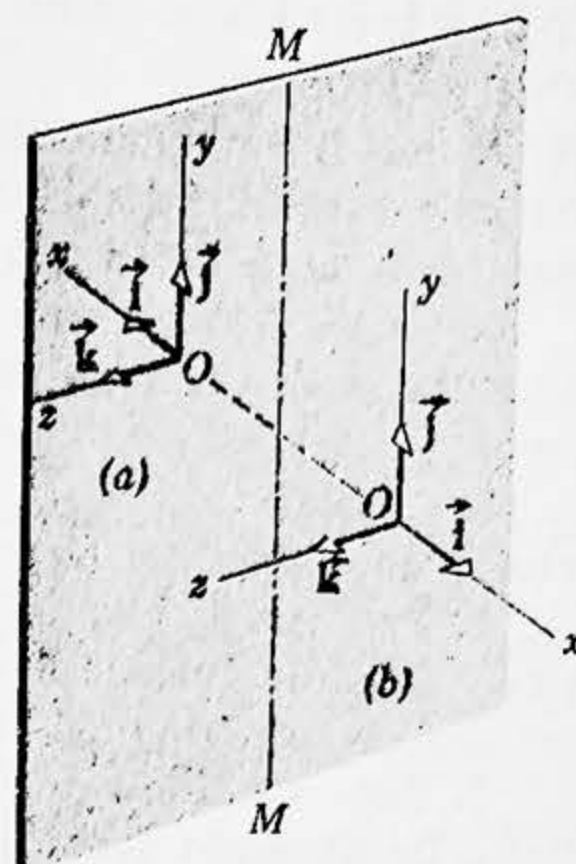
$$r_x = a_x + b_x; \quad r_y = a_y + b_y \quad \text{și} \quad r_z = a_z + b_z. \quad (2-14)$$

Să considerăm acum un alt sistem de coordonate $x'y'z'$ care are următoarele proprietăți: (1) originea sa nu coincide cu originea primului sistem de coordonate xyz și (2) cele trei axe ale sale nu sînt paralele cu axele corespunzătoare ale primului sistem. Cu alte cuvinte, al doilea sistem de coordonate a fost *translatat* și *rotit* față de primul.

Componentele vectorilor \vec{a} , \vec{b} și \vec{r} în noul sistem vor fi în general diferite; le putem reprezenta prin

$$a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}; \quad b_{x'}, b_{y'}, b_{z'} \quad \text{și respectiv}$$

Figura 2-13. Se arată: (a) un sistem de coordonate stîng (levogir) și (b) un sistem de coordonate drept (dextrogir). Observăm că (a) și (b) sînt legate prin faptul că fiecare poate fi privit ca imagine a celuilalt în oglinda MM. Caracterul drept sau stîng al unui sistem de coordonate nu poate fi schimbat prin rotirea sa. Observăm că în (b) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, în timp ce în (a), $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$.



r_x', r_y', r_z' . Aceste noi componente sînt însă legate între ele (vezi problema 34) astfel:

$$r_x' = a_x' + b_x'; \quad r_y' = a_y' + b_y'; \quad \text{și} \quad r_z' = a_z' + b_z' \quad (2-15)$$

Adică, în noul sistem de coordonate vom găsi din nou că (vezi ecuațiile 2-13)

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Într-un limbaj mai formal: *relațiile dintre vectori*, ecuația (2-13) fiind doar un singur exemplu, *sînt invariante* (adică, *rămîn neschimbate*) *în raport cu translația sau rotația axelor de coordonate*. Acum, este o constatare experimentală faptul că experiențele pe care se bazează legile fizicii și deci *legile fizicii* înseși rămîn neschimbate ca formă atunci cînd rotim sau translatăm sistemul de referință, analog relațiilor de mai sus. Astfel, limbajul vectorilor este un limbaj ideal în care se pot exprima legile fizice. Dacă putem exprima o lege sub forma vectorială, invarianța legii la translații și rotații ale sistemului de coordonate este asigurată prin această proprietate pur geometrică a vectorilor.

Se credea pînă aproximativ în 1956 că toate legile fizicii ar fi invariante față de un alt tip de transformări de coordonate și anume la substituția unui sistem de coordonate dextrogir printr-un sistem de coordonate levogir (vezi fig. 2-13). În acel an însă, au fost studiate unele experiențe cu dezintegrarea anumitor particule elementare în care rezultatul experienței *depindea* de caracterul dextrogir sau levogir al sistemului de coordonate folosit pentru a exprima aceste rezultate. Cu alte cuvinte, experiența și imaginea sa într-o oglindă ar da rezultate diferite!¹ Acest rezultat surprinzător a dus la o reexaminare a întregii probleme a simetriei legilor fizicii; din 1965 aceste studii rămîn printre cele mai interesante din fizica modernă.

¹ C. N. Yang și T. D. Lee au cîpătat premiul Nobel în 1957 pentru prezicerea teoretică a acestui fapt.

Întrebări

1. Pot fi combinați doi vectori de mărimi diferite astfel încât să dea o rezultantă nulă? Dar trei vectori?

2. Poate fi zero un vector dacă una din componentele sale nu este zero?

3. Are sens să numim o mărime vector dacă modulul ei este zero?

4. Enumerați câteva mărimi scalare. Depinde valoarea unei mărimi scalare de sistemul de referință ales?

5. Putem ordona evenimentele în timp. De exemplu evenimentul b poate

precede evenimentul c , dar urmează după evenimentul a , dându-ne o ordine temporală a evenimentelor a, b, c . Prin urmare există un sens al timpului, prin care se distinge trecutul, prezentul și viitorul. Este, din această cauză, timpul un vector? Dacă nu, de ce nu?

6. Se aplică legea comutativității și legea asociativității scăderii vectorilor?

7. Poate fi produsul scalar o cantitate negativă?

Probleme

1. Sînt adunați doi vectori \vec{a} și \vec{b} . Să se arate că modulul rezultantei nu poate fi mai mare decît $a+b$ sau mai mic decît $|a-b|$, unde barele verticale înseamnă valoarea absolută (modulul).

2. Care sînt proprietățile a doi vectori \vec{a} și \vec{b} dacă avem

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a+b=c$,

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$,

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Să considerăm două deplasări, una de modul 3 m și cealaltă de modul 4 m. Să se arate cum pot fi combinați vectorii deplasare pentru a da o deplasare rezultantă de modul: (a) 7 metri, (b) 1 metru și (c) 5 metri.

4. Doi vectori \vec{a} și \vec{b} au moduli egali, de exemplu 10 unități. Ei sînt orientați ca în figura 2-14 și vectorul lor sumă este \vec{r} . Să se afle: (a) componentele x și y ale lui \vec{r} ; (b) modulul lui \vec{r} și (c) unghiul pe care \vec{r} îl face cu axa x .

5. Fiind dați doi vectori $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$, să se afle modulul și direcția lui \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ și $\vec{a} - \vec{b}$.

6. Să se generalizeze metoda analitică de descompunere și compunere la cazul a *trei sau mai mulți vectori*.

7. Un vehicul se deplasează spre est cu o distanță de 50 km. Apoi spre nord cu 30 km și apoi într-o direcție de 30° la est de nord cu 25 km. Să se traseze diagrama vectorilor și să se determine deplasarea totală a vehiculului de la punctul său de plecare.

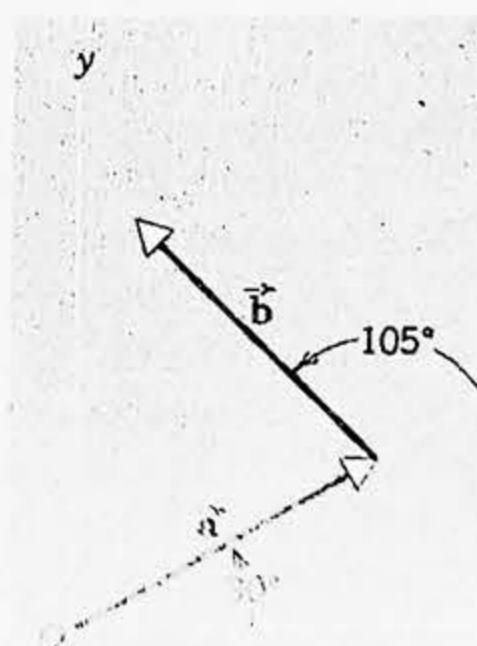


Figura 2-14.

8. Un jucător de golf execută trei lovituri pentru a introduce mingea în gaură când se află pe verde. Prima lovitură deplasează mingea cu 4,0 m spre nord, a doua lovitură cu 2,0 m spre sud-est, iar a treia lovitură cu 1,0 m spre sud-vest. Ce deplasare ar fi necesară pentru a băga mingea în gaură din prima lovitură?

9. O particulă suferă trei deplasări succesive într-un plan, după cum urmează: 4,0 metri spre sud-vest, 5,0 metri spre est, 6,0 metri într-o direcție de 60° spre nord-vest. Alegând axa y spre nord și axa x spre est, să se afle: (a) componentele fiecărei deplasări, (b) componentele deplasării rezultante, (c) mărimea și direcția deplasării rezultante și (d) deplasarea care ar fi necesară pentru a aduce înapoi particula la punctul de plecare.

10. Folosind o scară de 1 cm pentru 1 m, să se adune pe cale grafică deplasările din problema 9. Să se determine din grafic mărimea și direcția rezultantei.

11. Să se generalizeze metoda analitică de descompunere și compunere a doi vectori pentru cazul a trei dimensiuni.

12. (a) Un om își părăsește poarta, se plimbă 1,0 km spre răsărit, 2,0 km spre nord și apoi scoate un ban din buzunar și îl lasă să cadă de pe o stîncă de 0,50 km înălțime. Să se aleagă un sistem de coordonate și să se scrie o expresie, folosind versori, pentru deplasarea banului. (b) Omul se întoarce apoi la poarta sa, folosind un alt drum la întoarcere. Care este deplasarea rezultantă pentru drumul de întoarcere?

13. Să se afle suma vectorilor deplasare \vec{c} și \vec{d} ale căror componente în kilometri de-a lungul a trei direcții perpendiculare sînt

$$c_x = 5,0, c_y = 0, c_z = -2,0;$$

$$d_x = -3,0, d_y = 4,0; d_z = 6,0.$$

14. Un vector \vec{d} are modulul de 2,5 metri și este orientat spre nord. Care sînt moduli și direcțiile vectorilor?

$$(a) -\vec{d}; \quad (b) \vec{d}/2,0;$$

$$(c) -2,5 \vec{d} \text{ și } (d) 4,0 \vec{d}?$$

15. O cameră are dimensiunile $3,0 \text{ m} \times 3,6 \text{ m} \times 4,2 \text{ m}$. O muscă zburînd dintr-un colț ajunge în colțul diametral opus. (a) Care este modulul deplasării sale? (b) Poate fi lungimea drumului ei mai mică decît această distanță? Mai mare decît această distanță? Egală cu această distanță? (c) Să se aleagă un sistem convenabil de coordonate și să se afle componentele vectorului deplasare în acest sistem de referință.

16. Dacă în problema 15 musca nu zboară ci se tîrăște, care va fi lungimea celui mai scurt drum necesar?

17. Un om zboară de la Washington la Manila. Să se descrie vectorul deplasare. Care este modulul său dacă latitudinea și longitudinea celor două orașe sînt 39° N , 77° V și 15° N , 121° E ?

18. Doi vectori \vec{a} și \vec{b} fac un unghi θ între ei și au originile în același punct. Să se arate, considerînd componentele de-a lungul a două axe perpendiculare, că lungimea vectorului rezultat este

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}.$$

19. Să se arate că pentru orice vector \vec{a} avem $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ și $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

20. Se folosește sistemul de coordonate xyz standard (dextrogir). Se dă un vector \vec{a} în direcția $+x$, un vector \vec{b} în direcția $+y$ și o cantitate scalară d . (a) Care este direcția lui $\vec{a} \times \vec{b}$? (b) Care este direcția lui $\vec{b} \times \vec{a}$? (c) Care este direcția lui \vec{b}/d ? (d) Care este mărimea lui $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

21. Un vector \vec{a} cu modulul de 10 unități și un alt vector \vec{b} cu modulul de 6 unități, au direcții ce formează între ele 60° . Să se afle: (a) produsul scalar al celor doi vectori și (b) produsul vectorial al celor doi vectori.

22. În sistemul de coordonate din figura 2-6, b să se arate că

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

și

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

23. În sistemul de coordonate dextrorogir din figura 2-6, b să se arate că

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}.$$

24. (a) Am văzut că legea comutativității nu se aplică produselor vectoriale, adică $\vec{a} \times \vec{b}$ nu este egal cu $\vec{b} \times \vec{a}$. Să se arate că legea comutativității se aplică produselor scalare, adică $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. (b) Să se arate că legea distributivității se aplică atât produselor scalare cât și produselor vectoriale, adică:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

și

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

(c) Se aplică legea asociativității produselor vectoriale, adică $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$? Are sens să vorbim de o lege a asociativității pentru produsele scalare?

25. Produsul scalar exprimat prin componente. Fie doi vectori reprezentați cu ajutorul componentelor (coordonatelor) lor astfel:

$$\vec{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

și

$$\vec{b} = i b_x + j b_y + k b_z$$

Să se arate analitic că:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(Indicație: vezi problema 22.)

26. Să se folosească definiția produsului scalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \Phi$ și faptul că $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (vezi problema 25) pentru a obține unghiul dintre doi vectori dați de $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ și $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

27. Produsul vectorial exprimat prin componente. Să se arate pe cale analitică că $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$. (Indicație: vezi problema 23.)

28. Să se arate că modulul unui produs vectorial este numeric egal cu aria paralelogramului format cu cei doi vectori ca laturi (vezi fig. 2-15). Sugerează acest fapt modul în care un element de arie orientat în spațiu ar putea fi reprezentat printr-un vector?

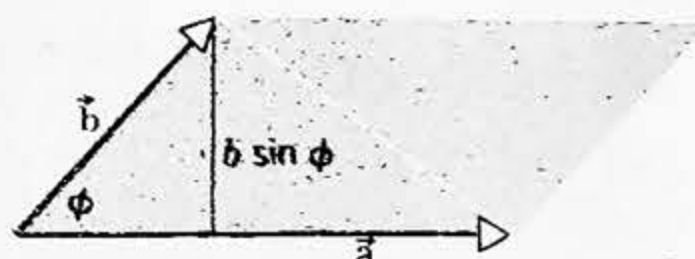


Figura 2-15.

29. Să se arate că aria triunghiului cuprins între vectorii \vec{a} și \vec{b} este $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$, unde barele verticale înseamnă valoarea absolută (vezi fig. 2-15).

30. Să se arate că $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ este egal în modul cu volumul paralelipipedului format cu cei trei vectori \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} .

31. Fie \vec{b} și \vec{c} diagonalele fețelor adiacente ale unui cub de muchie a ,

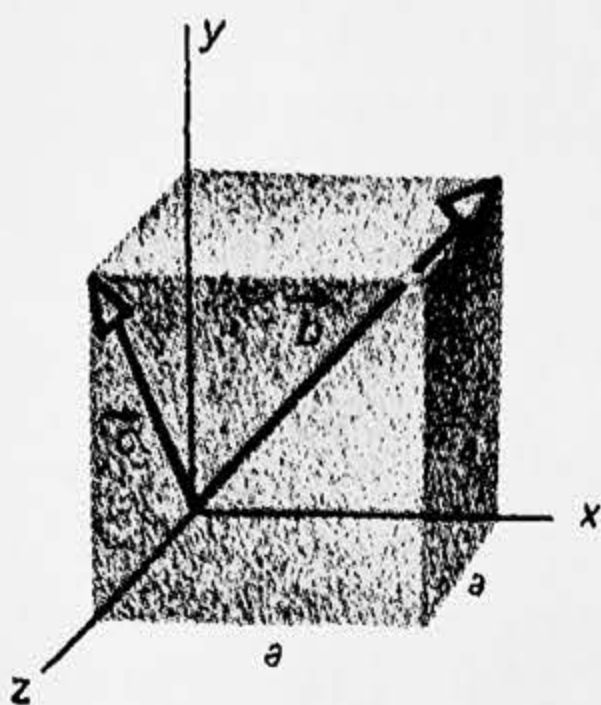


Figura 2-16.

ca în figura 2-16. (a) Să se afle componentele vectorului \vec{d} definit prin

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}.$$

(b) Să se afle valorile produselor $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{d} \cdot \vec{c}$ și $\vec{d} \cdot \vec{b}$.

32. Fie \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} trei vectori oarecari necoplanari. Ei nu sînt neapărat orientați sub unghiuri drepte unul față de altul. (a) Să se arate că

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

(b) Fie

$$\vec{A} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{v}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{v}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{v},$$

unde $v = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Să se calculeze produsul scalar al fiecărui vector \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} cu fiecare vector \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} . (c) Dacă \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} au dimensiunea unei lungimi, ce dimensiune vor avea vectorii \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} ?

33. Fie N un număr natural mai mare decît unu; atunci

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{N} + \dots + \cos (N-1) \frac{2\pi}{N} = 0,$$

adică

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

De asemenea

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Să se demonstreze aceste două relații considerînd suma a N vectori de lungime egală, fiecare vector făcînd cu vectorul precedent un unghi egal cu $2\pi/N$.

34. Invarianța adunării vectoriale la rotații ale sistemului de coordonate.

Figura 2-17 arată doi vectori \vec{a} și \vec{b} și două sisteme de coordonate care diferă prin aceea că axele x și x' precum și axele y și y' formează între ele un unghi Φ . Să se arate analitic că $\vec{a} + \vec{b}$ are același modul și direcție, indiferent care sistem de coordonate este folosit pentru efectuarea calculelor.

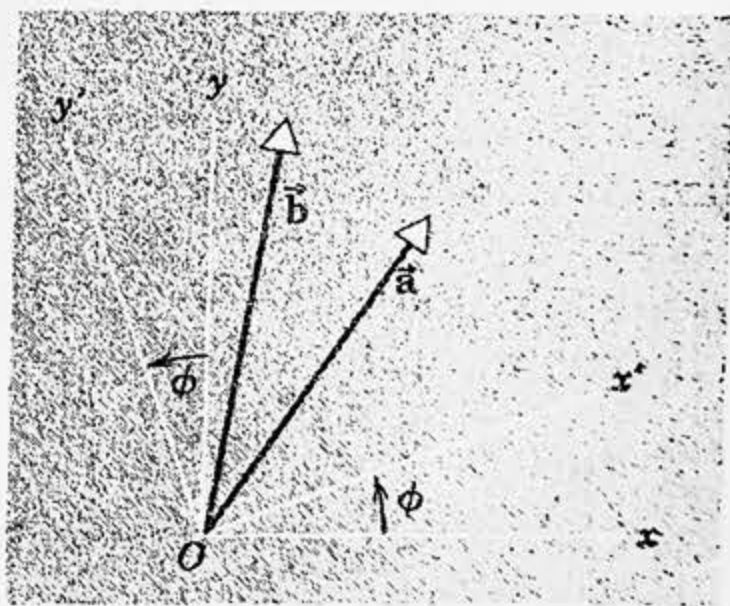


Figura 2-17.

Mișcarea unidimensională

3-1. Mecanica

Mecanica, cea mai veche știință fizică, este studiul mișcării obiectelor. Calculul traiectoriei unui obuz de artilerie sau a unei sonde spațiale expediate de pe Pământ spre Marte figurează printre problemele sale. Tot astfel este analiza urmelor lăsate în camerele cu bule, reprezentând ciocnirile, dezintegrarea și interacțiile particulelor elementare (vezi fig. 10-11 și anexa H, vol. II).

Atunci când descriem mișcarea, avem de a face cu acea parte a mecanicii care se numește *cinematică*. Atunci când legăm mișcarea de forțele care o produc și de proprietățile obiectelor mobile, avem de a face cu *dinamica*. În acest capitol vom defini unele mărimi cinematice și le vom studia amănunțit în cazul particular al mișcării unidimensionale (într-o singură dimensiune). În capitolul 4 vom discuta unele cazuri ale mișcării bidimensionale și tridimensionale. Capitolul 5 se ocupă cu cazul mai general al dinamicii.

3-2. Cinematica punctului material

Un obiect real se poate roti în timpul deplasării sale. De exemplu o minge de baseball se poate roti în timpul deplasării sale, ca un întreg, pe o anumită traiectorie. De asemenea, un corp poate vibra în timpul deplasării sale, ca de exemplu o picătură de apă în cădere. Aceste complicații pot fi evitate considerând mișcarea unui corp foarte mic numit *particulă* sau *punct material*. Din punct de vedere matematic o particulă este tratată ca un punct, un obiect fără dimensiuni, astfel încât nu sînt implicate considerații privind rotația și vibrația.

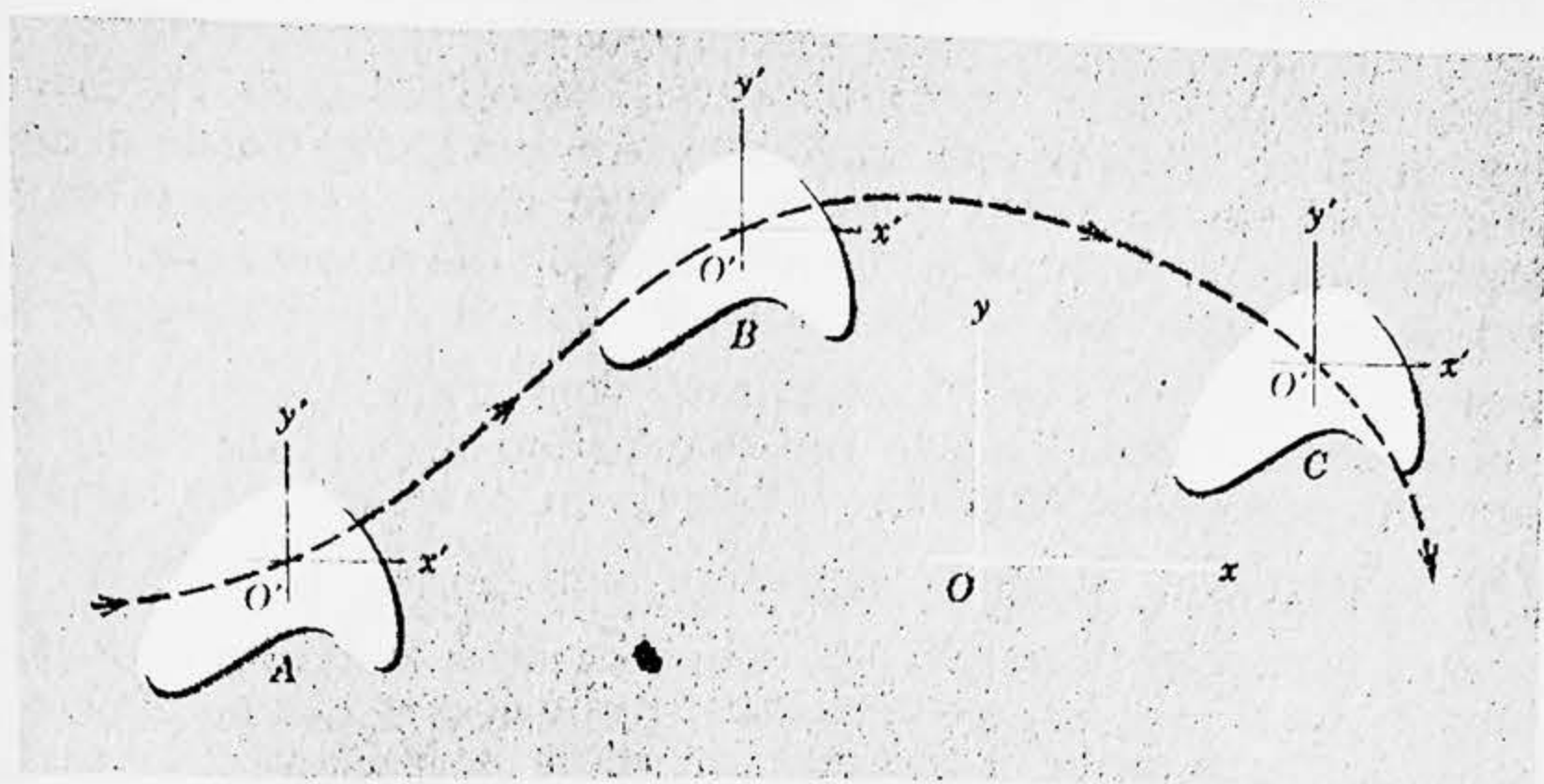


Figura 3-1. Mișcarea de translație a unui obiect. Mișcarea se poate produce în spațiul cu trei dimensiuni, însă în figură sînt arătate numai două dimensiuni pentru simplitate.

În realitate nu există un astfel de obiect în natură, adică un obiect fără dimensiuni. Conceptul de „particulă” sau de „punct material” este, cu toate acestea, foarte util, deoarece obiectele reale se comportă adesea cu o bună aproximație ca și cum ar fi particule. Un corp nu trebuie să fie neapărat „mic” în sensul obișnuit al cuvîntului pentru a fi tratat ca un punct material. De exemplu, dacă considerăm distanța de la Pămînt la Soare, atunci în raport cu această distanță Pămîntul și Soarele pot fi de obicei considerate drept particule. Putem afla o mulțime de fapte despre mișcarea Soarelui și a planetelor, fără vreo eroare apreciabilă tratînd aceste corpuri drept puncte materiale. Mingile de baseball, moleculele, protonii și electronii pot fi adesea tratați ca puncte materiale. Chiar dacă un corp este prea mare pentru a fi considerat drept particulă într-o anumită problemă particulară, el poate fi întotdeauna gîndit ca fiind format dintr-un mare număr de particule și rezultatele de la studiul mișcării punctului material pot fi utile în analiza problemei. Pentru simplificare însă, noi vom restrînge tratarea de față la mișcarea unei singure particule.

Corpurile care au numai o mișcare de translație se comportă ca particule (puncte materiale). Un observator va numi o mișcare, mișcare de *translație* dacă axele unui sistem de referință, considerat legat rigid de obiect, de exemplu x' , y' și z' , rămîn permanent paralele cu axele sistemului său propriu de referință, de exemplu x , y și z . În figura 3-1 de exemplu, se vede mișcarea de translație a unui obiect care se mișcă de la poziția A spre poziția B și apoi spre C. Observăm că traiectoria urmată nu trebuie să fie neapărat o linie dreaptă. Observăm de asemenea că în timpul mișcării fiecare punct al corpului suferă aceleași deplasări ca oricare alt punct. Putem presupune că un astfel de corp este o particulă, deoarece descriind mișcarea unui singur punct al corpului, noi descriem prin aceasta mișcarea corpului ca un întreg.

3-3. Viteza medie

Viteza unei particule reprezintă variația poziției sale, raportată la unitatea de timp. Poziția unei particule într-un anumit sistem de referință este dată de un *vector de poziție* dus din originea sistemului de coordonate pînă la particulă. În momentul t_1 , fie o particulă aflată în punctul A în figura 3-2, a, poziția sa în planul $x-y$ fiind descrisă de vectorul de poziție \vec{r}_1 . Pentru simplitate vom trata mișcarea numai în două dimensiuni; extensiunea la trei dimensiuni nefiind dificilă.

Fie, într-un moment ulterior t_2 , particula în punctul B , descris de vectorul de poziție \vec{r}_2 . Vectorul deplasare care descrie variația (schimbarea) poziției particulei în timpul mișcării ei de la A la B este $\Delta\vec{r} (= \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, iar timpul scurs în timpul mișcării între aceste două puncte este $\Delta t (= t_2 - t_1)$. Viteza medie a particulei în acest interval este definită prin

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\text{deplasarea (un vector)}}{\text{timpul scurs (un scalar)}} \quad (3-1)$$

O bară deasupra unei litere indică valoarea medie a mărimii respective.

Mărimea \vec{v} este un vector deoarece ea s-a obținut prin împărțirea vectorului $\Delta\vec{r}$ la scalarul Δt . Viteza implică deci atît o direcție cît și o intensitate (modul). Direcția sa este direcția lui $\Delta\vec{r}$ și mărimea sa este $|\Delta\vec{r}/\Delta t|$. Mărimea este exprimată în unități de distanță împărțite la unități de timp, cum sînt de exemplu metri pe secundă sau kilometri pe oră.

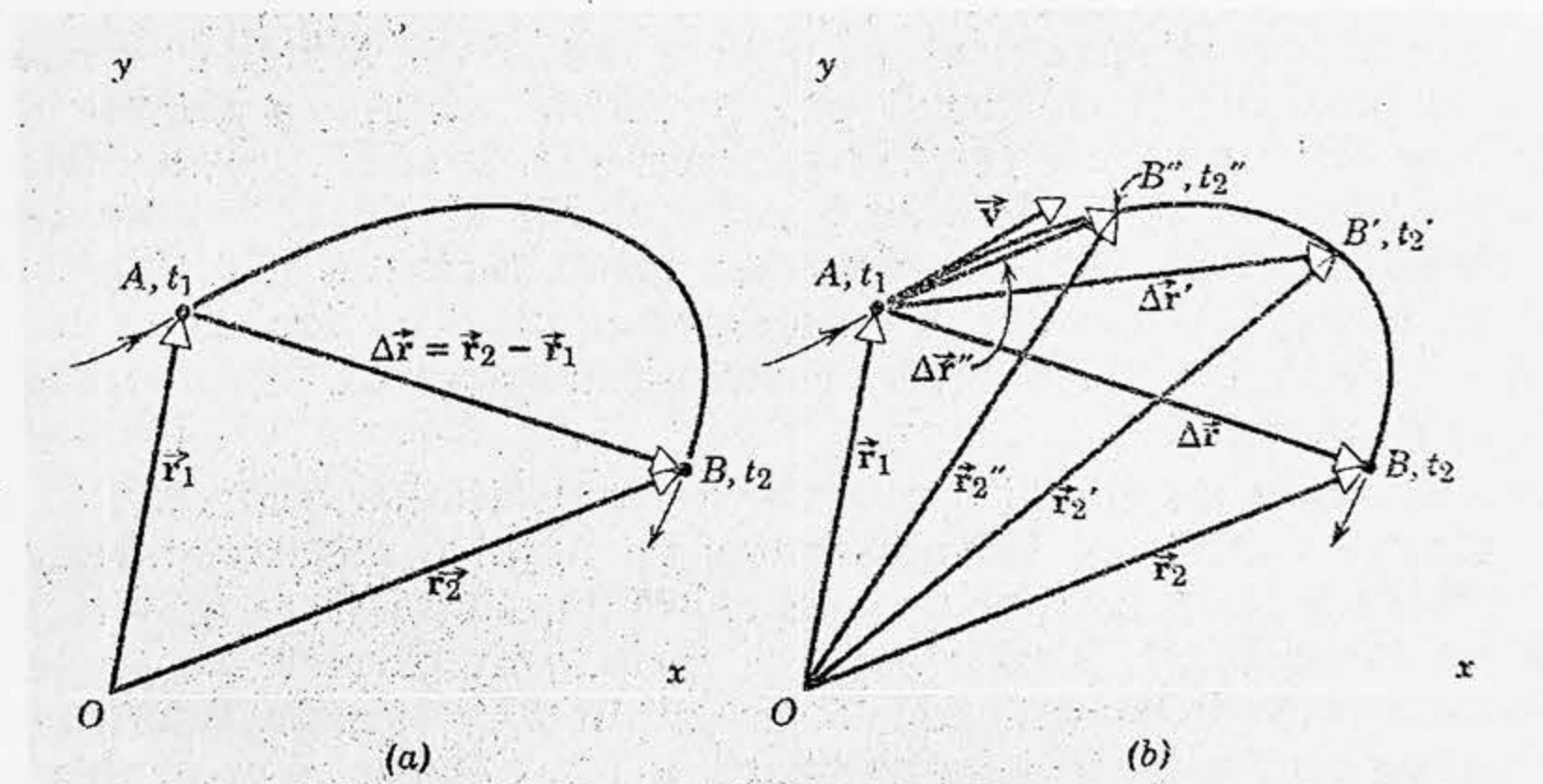


Figura 3-2. (a) O particulă se mișcă de la A la B în timpul $\Delta t (= t_2 - t_1)$ suferind o deplasare $\Delta\vec{r} (= \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Viteza medie \vec{v} între A și B are direcția $\Delta\vec{r}$. (b) Când B se apropie mai mult de A , viteza medie tinde către viteza instantanee \vec{v} din A ; \vec{v} este tangent la traiectorie în A .

Viteza definită prin ecuația (3-1) se numește *viteză medie* deoarece măsurarea deplasării nete și a timpului scurs nu ne spune nimic despre mișcarea între A și B . Traectoria ar putea fi curbă sau rectilie; mișcarea ar putea fi uniformă sau neregulată. Viteza medie conține doar deplasarea totală și timpul total scurs. De exemplu, să presupunem că un om pleacă de acasă într-o excursie cu automobilul, întorcându-se acasă într-un timp Δt de la plecare. Viteza sa medie în timpul plimbării este zero deoarece deplasarea sa pentru acest interval particular de timp Δt este zero.

Dacă am măsura timpul de sosire al particulei în mai multe puncte de-a lungul drumului real dintre A și B din figura 3-2, a , am putea descrie mișcarea mai amănunțit. Dacă viteza medie este aceeași (în mărime și direcție) între oricare două puncte de-a lungul traectoriei, conchidem că particula se mișcă cu *viteză constantă*, adică de-a lungul unei linii drepte (direcție constantă) și uniform (mărime constantă).

3-4. Viteza instantanee

Să presupunem că o particulă se mișcă astfel încât viteza sa medie, măsurată pentru mai multe intervale diferite de timp, nu este constantă. Se spune că această particulă se mișcă cu viteză variabilă. Atunci trebuie să determinăm viteza particulei în fiecare moment de timp, numită *viteză instantanee* (sau momentană).

Viteza poate varia atât în mărime cât și în direcție sau în ambele. Pentru mișcarea reprezentată în figura 3-2, a , viteza medie în intervalul de timp $t_2 - t_1$ poate diferi atât în mărime cât și în direcție de viteza medie obținută într-un alt interval de timp $t'_2 - t_1$. În figura 3-2, b ilustrăm aceasta alegând punctul B succesiv mai apropiat de punctul A . Punctele B' și B'' arată două poziții intermediare ale particulei corespunzând momentelor t'_2 și t''_2 și descrise de vectorii de poziție \vec{r}'_2 și respectiv \vec{r}''_2 . Vectorii deplasare $\Delta \vec{r}$, $\Delta \vec{r}'$ și $\Delta \vec{r}''$ diferă ca direcție și devin din ce în ce mai mici. În mod analog, intervalele corespunzătoare de timp $\Delta t (= t_2 - t_1)$, $\Delta t' (= t'_2 - t_1)$ și $\Delta t'' (= t''_2 - t_1)$ devin din ce în ce mai mici.

Continuând acest proces astfel încât B să se apropie de A , vom găsi că raportul dintre deplasare și timpul scurs tinde către o valoare bine definită. Deși în acest proces deplasarea devine extrem de mică și intervalul de timp la care o împărțim devine de asemenea mic, raportul nu este neapărat o cantitate mică. În mod analog, deși crește mai încet, vectorul deplasare se apropie de o direcție limită, cea a tangentei la traectoria particulei în punctul A . Această valoare limită a raportului $\Delta \vec{r} / \Delta t$ se numește *viteză instantanee* în punctul A , sau viteza particulei la momentul t_1 .

Dacă $\Delta \vec{r}$ este deplasarea într-un interval de timp mic Δt , care urmează după momentul t , viteza la momentul t este valoarea limită pe

care o ia raportul $\Delta \vec{r} / \Delta t$ atunci cînd atît $\Delta \vec{r}$ cît și Δt tind către zero. Cu alte cuvinte, dacă notăm cu \vec{v} viteza instantanee, atunci

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Direcția lui \vec{v} este direcția limită pe care o ia $\Delta \vec{r}$ atunci cînd B tinde către A sau cînd Δt tinde către zero. După cum am văzut, această direcție limită este cea a tangentei la traiectoria particulei în punctul A .

În notațiile calculului diferențial, valoarea limită a raportului $\Delta \vec{r} / \Delta t$ atunci cînd Δt tinde către zero se scrie $d\vec{r}/dt$ și se numește *derivata* lui \vec{r} în raport cu t . Avem deci

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3-2)$$

Mărimea v a vitezei instantanee se numește *viteză absolută* și reprezintă modulul lui \vec{v} . Adică

$$v = |\vec{v}| = |d\vec{r}/dt|. \quad (3-3)$$

Viteza absolută, fiind modulul unui vector, este esențialmente pozitivă.

Așa cum o particulă este un concept fizic care folosește conceptul matematic de punct, tot astfel aici viteza este un concep fizic care folosește conceptul matematic de derivată. În adevăr, calculul diferențial a fost inventat prima dată de Isaac Newton (1642—1727) pentru a avea un instrument matematic potrivit pentru tratarea problemelor fundamentale de mecanică.

În paragraful următor vom examina conceptul de viteză instantanee în mod amănunțit pentru cazul special al mișcării unidimensionale, uneori numită mișcare rectilinie.

3-5. Mișcarea unidimensională — viteză variabilă

Figura 3-3 arată o particulă care se mișcă pe o traiectorie în planul $x-y$. În momentul t poziția sa față de origine este descrisă de vectorul de poziție \vec{r} (vezi fig. 3-3, a) și are o viteză \vec{v} (vezi fig. 3-3, b) tangentă la traiectorie, așa cum este arătat în figură. Putem scrie (vezi ecuația 2-8)

$$\vec{r} = i\vec{x} + j\vec{y}, \quad (3-4)$$

unde i și j sînt versorii direcțiilor pozitive x , respectiv y , iar x și y sînt componentele (scalare) ale vectorului \vec{r} . Deoarece i și j sînt vectori constanți, avem, combinînd ecuațiile (3-2) și (3-4)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt},$$

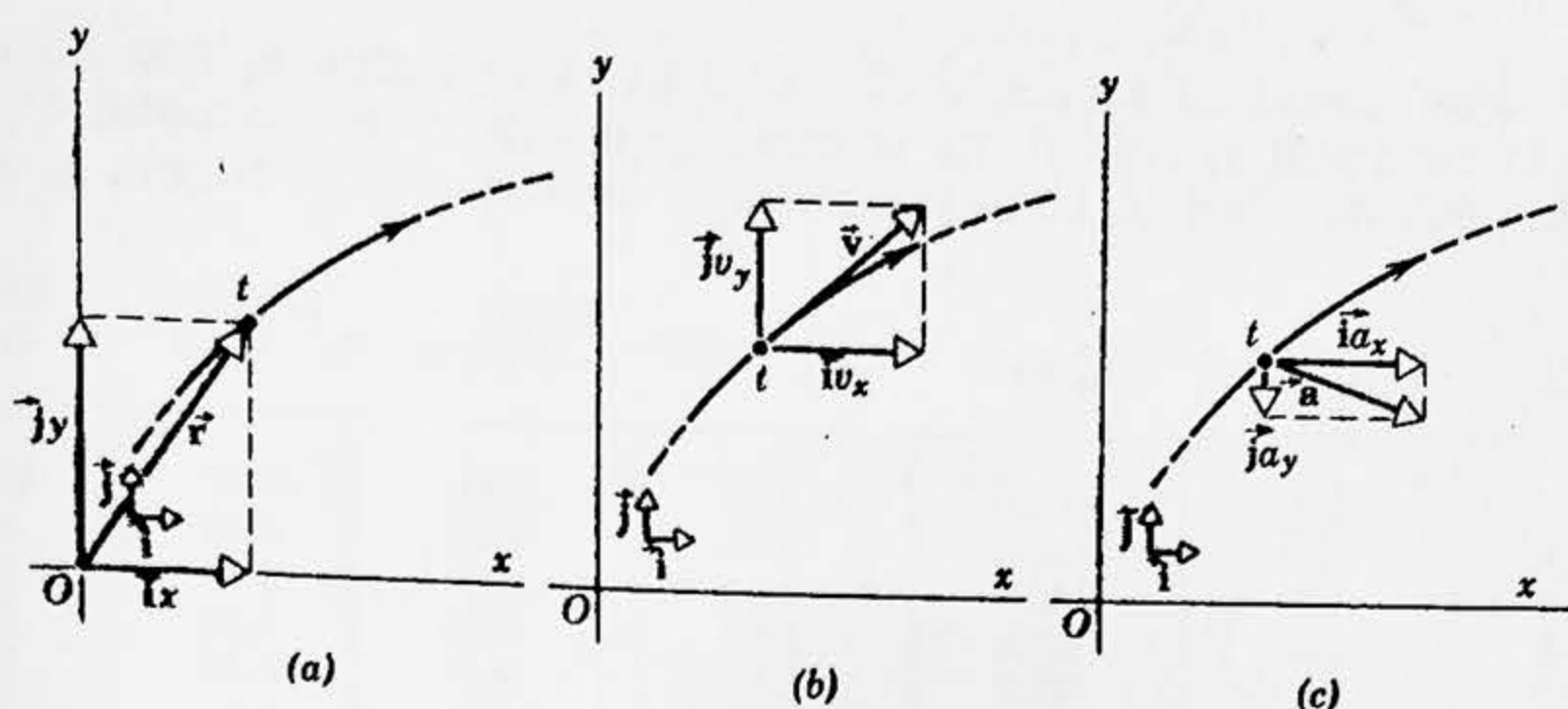


Figura 3-3. O particulă la momentul t are: (a) o poziție descrisă de \vec{r} , (b) o viteză instantanee \vec{v} și (c) o accelerație instantanee \vec{a} . Componentele vectoriale \vec{i}_x și \vec{j}_y din ecuația (3-4), \vec{i}_{v_x} și \vec{j}_{v_y} din ecuația (3-5) precum și \vec{i}_{a_x} și \vec{j}_{a_y} din ecuația (3-10) sînt de asemenea arătate, ca și versorii \vec{i} și \vec{j} .

pe care o putem exprima astfel

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y \quad (\text{mișcare bidimensională}), \quad (3-5)$$

unde $v_x (=dx/dt)$ și $v_y (=dy/dt)$ sînt componentele (scalare) ale vectorului \vec{v} .

Să considerăm acum mișcarea într-o singură dimensiune, aleasă pentru conveniență axă x . Trebuie să avem atunci $v_y = 0$, astfel încît ecuația (3-5) se reduce la

$$\vec{v} = \vec{i}v_x \quad (\text{mișcare unidimensională}). \quad (3-6)$$

Deoarece \vec{i} este orientat în direcția pozitivă x , v_x va fi pozitiv (și egal cu $+v$) cînd \vec{v} este îndreptat în acea direcție și negativ (și egal cu $-v$), dacă el este îndreptat în sens opus. Deoarece într-o mișcare unidimensională există numai două posibilități de alegere ale sensului lui \vec{v} , nu este necesară metoda vectorială; putem lucra doar cu componenta vitezei v_x .

Exemplul 1. *Procesul limită.* Ca o ilustrare a procesului de trecere la limită în cazul unidimensional, să considerăm tabela de date de la pagina 52 luate pentru mișcarea de-a lungul axei x . Primele patru coloane sînt date experimentale. Simbolurile se referă la figura 3-4 în care particula se mișcă de la stînga la dreapta,

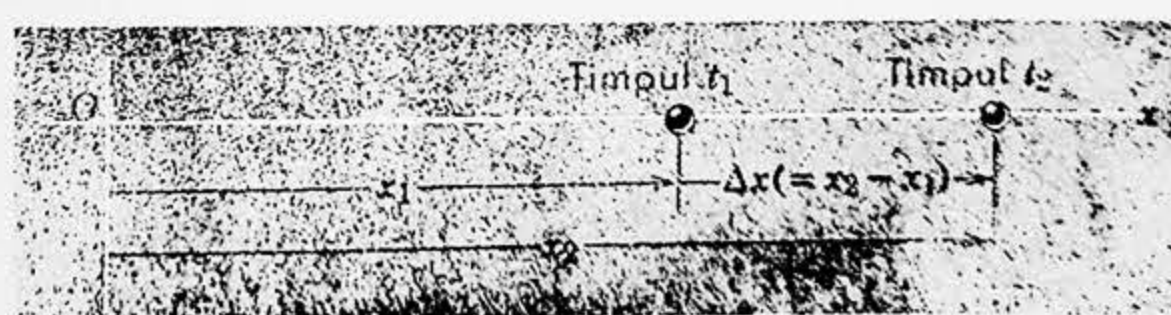


Figura 3-4. O particulă care se mișcă spre dreapta de-a lungul axei x .

Fig. 3-4

adică în sensul pozitiv al axei x . Particula se găsea în poziția x_1 (100 cm de la origine) în momentul t_1 (1,00 s). Ea se găsea în poziția x_2 în momentul t_2 . Dacă considerăm diferite valori ale lui x_2 și momentele corespunzătoare, diferite, t_2 , găsim

x_1 , cm	t_1 , s	x_2 , cm	t_2 , s	$x_2 - x_1 = \Delta x$, cm	$t_2 - t_1 = \Delta t$, s	$\Delta x / \Delta t$, cm/s
100,0	1,00	200,0	11,00	100,0	10,00	10,0
100,0	1,00	180,0	9,60	80,0	8,60	9,3
100,0	1,00	160,0	7,90	60,0	6,90	8,7
100,0	1,00	140,0	5,90	40,0	4,90	8,2
100,0	1,00	120,0	3,56	20,0	2,56	7,8
100,0	1,00	110,0	2,33	10,0	1,33	7,5
100,0	1,00	105,0	1,69	5,0	0,69	7,3
100,0	1,00	103,0	1,42	3,0	0,42	7,1
100,0	1,00	101,0	1,14	1,0	0,14	7,1

Ecuția (3-2) care este valabilă în cazul general al mișcării în spațiul cu trei dimensiuni, este

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Pentru mișcarea unidimensională de-a lungul axei x avem o relație asemănătoare, scalară ca formă, în care fiecare cantitate vectorială este înlocuită prin componenta sa corespunzătoare sau

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (3-7)$$

Rezultă clar din tabelă că pe măsură ce alegem valori ale lui x_2 mai apropiate de x_1 , Δt tinde către zero și raportul $\Delta x / \Delta t$ tinde către valoarea limită evidentă +7,1 cm/s. Prin urmare, în momentul t_1 , $v_x = +7,1$ cm/s cu precizia cu care se poate determina din datele tabelului. Deoarece v_x este pozitiv, viteza \vec{v} ($= \vec{v}_x$, vezi ecuația 3-6) este îndreptată spre dreapta în figura 3-4. Aceasta este tangentă la traiectorie în sensul mișcării, așa cum trebuia să fie.

Exemplul 2. Figura 3-5, a prezintă șase „instantanee” succesive ale unei particule care se mișcă de-a lungul axei x cu viteză variabilă. La $t=0$ ea se află în poziția $x=1,00$ m la dreapta originii; la $t=2,5$ s ea ajunge în repaus în punctul $x=+5,00$ m; la $t=4,0$ s ea s-a întors la $x=+1,40$ m. Figura 3-5, b reprezintă poziția x în funcție de t pentru această mișcare. Viteza medie pentru întregul interval de 4,0 s este egală cu deplasarea sau variația netă a poziției (+0,40 m) împărțită la timpul scurs (4,0 s), deci $v_x = +0,10$ m/s. (Numim \bar{v}_x viteză medie și v_x viteză, chiar în cazul unidimensional, deși viteza este un vector și nu un scalar. Aceasta este în conformitate cu scrierea obișnuită și nu va produce confuzii. Aceste mărimi nu sînt viteze absolute deoarece ele pot fi negative, în timp ce viteza absolută este esențial pozitivă.) Vectorul viteză medie \vec{v} este îndreptat în sensul pozitiv al axei x (adică spre dreapta în fig. 3-5, a) deoarece deplasarea netă este îndreptată în acest sens. Cantitatea v_x poate fi obținută direct din panta liniei punctate af, din figura 3-5, b, unde prin pantă înțelegem raportul

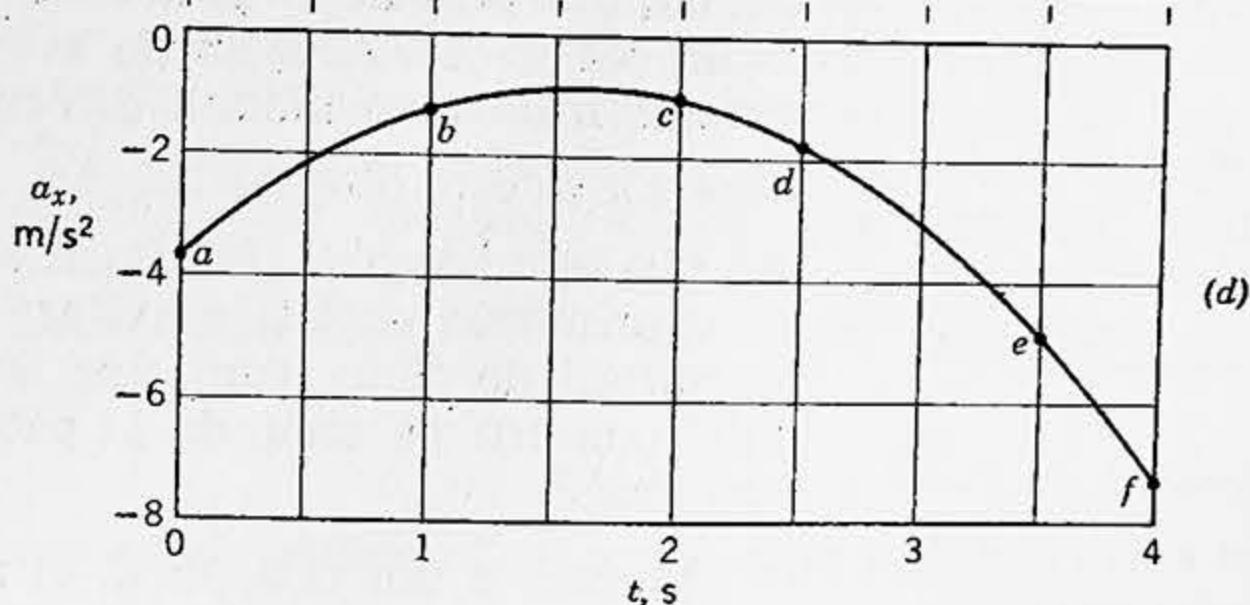
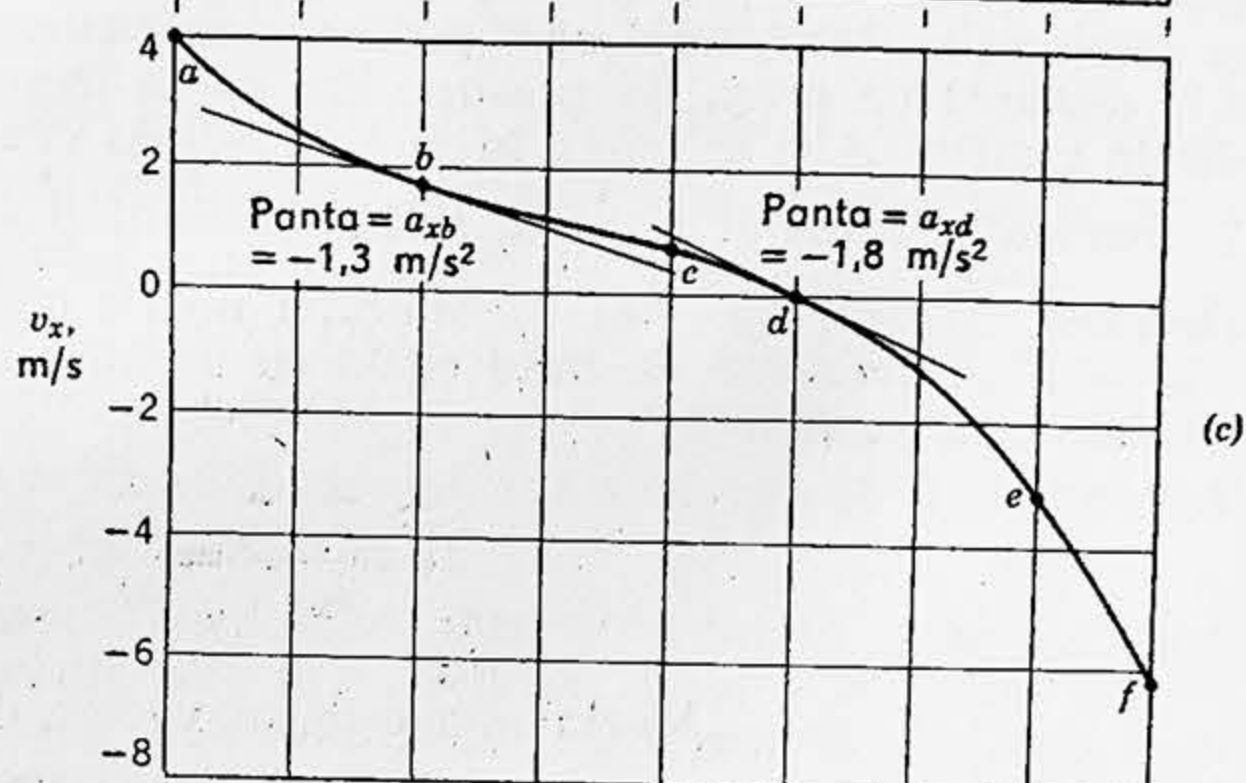
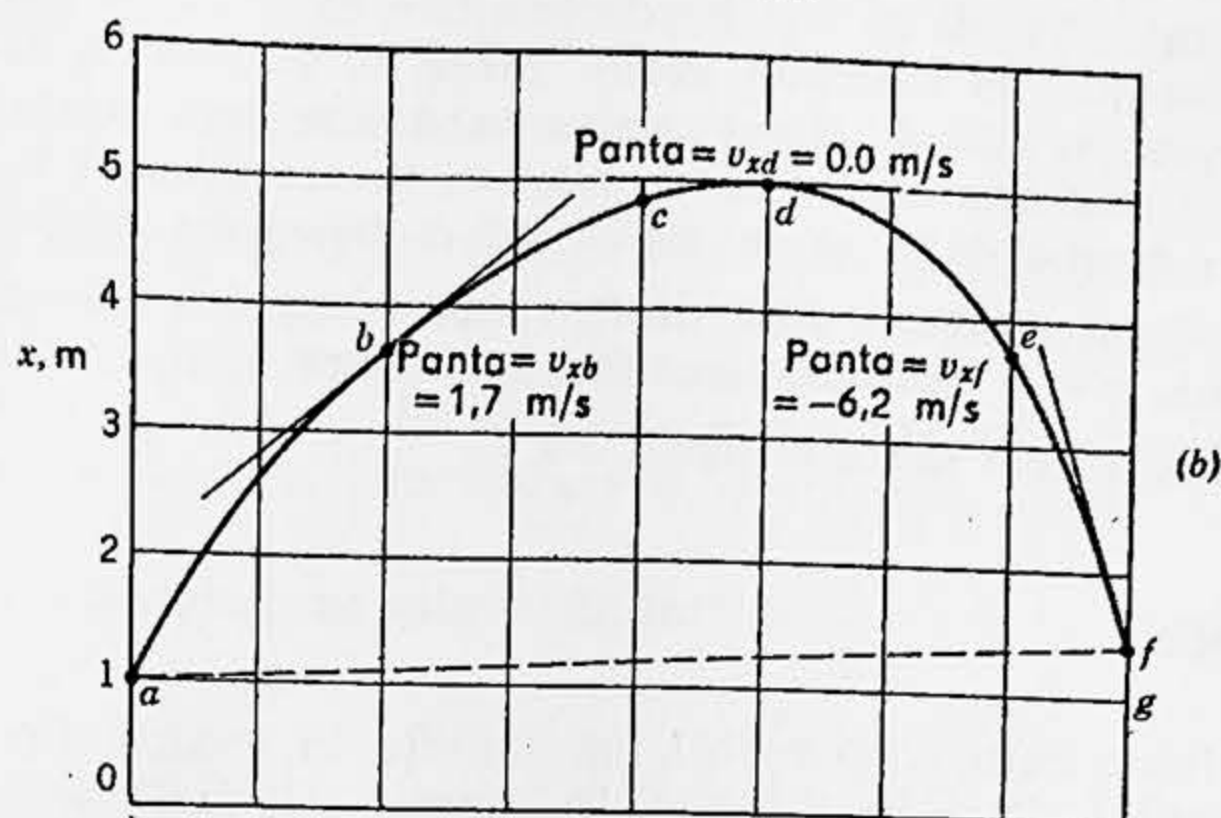
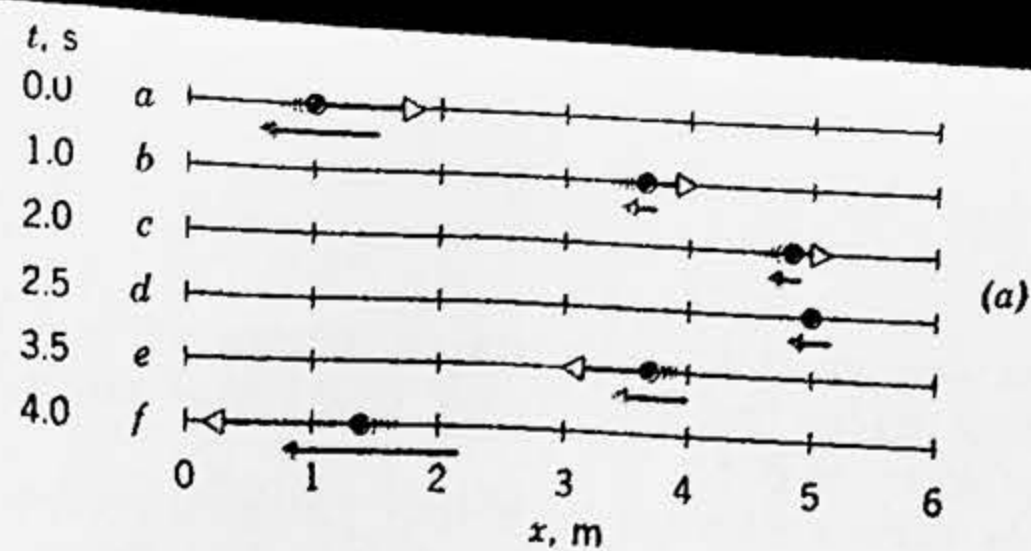


Figura 3-5. (a) Șase „instantanee” consecutive ale unei particule care se mișcă de-a lungul axei x . Vectorul atașat particulei reprezintă viteza sa instantanee; vectorul desenat sub particulă, reprezintă accelerația sa instantanee. (b) Un grafic al lui x în funcție de t pentru mișcarea particulei. (c) Un grafic al lui v_x în funcție de t . (d) Un grafic al lui a_x în funcție de t .

între deplasarea netă af și timpul scurs ga . (Panta nu este tangenta unghiului fag măsurat pe grafic cu un raportor. Acest unghi este arbitrar deoarece el depinde de scările alese pentru x și t .)

Viteza v_x în fiecare moment se obține din panta curbei din figura 3-5, b în acel moment. Ecuația 3-7 este de fapt relația prin care se definește panta unei curbe în calculul diferențial. În exemplul nostru panta în punctul b , care reprezintă valoarea lui v_x în b , este $+1,7$ m/s; panta în d este zero și panta în f este $-6,2$ m/s. Atunci cînd determinăm panta dx/dt în fiecare moment t , putem reprezenta pe v_x în funcție de t , ca în figura 3-5, c. Observăm că pentru intervalul $0 < t < 2,5$ s, v_x este pozitiv astfel încît vectorul viteză \vec{v} este îndreptat spre dreapta în figura 3-5, a; pentru intervalul $2,5 \text{ s} < t < 4,0$ s, v_x este negativ astfel încît \vec{v} este îndreptat spre stînga în figura 3-5, a.

3-6. Accelerația

Adesea viteza unui corp mobil variază fie în modul, fie ca direcție, sau atît în modul cît și ca direcție, în timpul mișcării. Se spune atunci că corpul are o accelerație. *Accelerația unei particule este variația vitezei sale raportată la unitatea de timp.* Să presupunem că la momentul t_1 o particulă se află în punctul A și se mișcă în planul x - y cu viteza instantanee \vec{v}_1 , iar în momentul următor t_2 ea se află în punctul B și se mișcă cu viteza instantanee \vec{v}_2 (vezi fig. 3-6). *Accelerația medie \vec{a} în timpul mișcării de la A la B se definește ca fiind egală cu variația vitezei împărțită la intervalul de timp, anume*

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3-8)$$

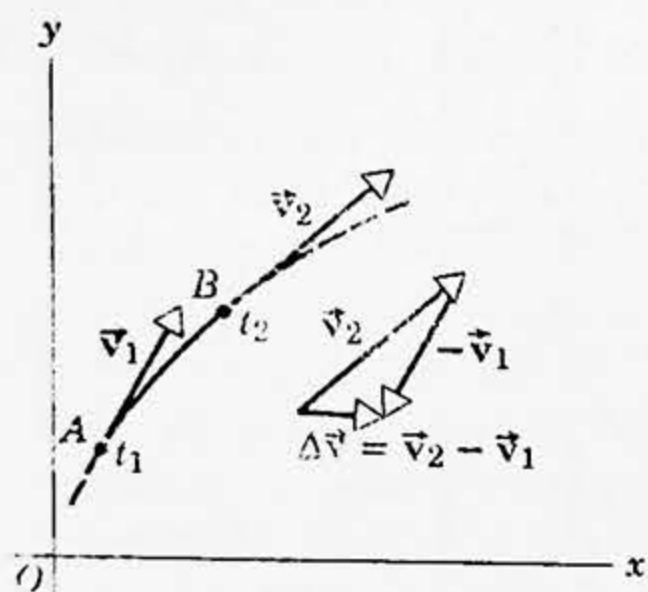


Figura 3-6. O particulă are viteza \vec{v}_1 în punctul A și se mișcă spre punctul B unde viteza sa este \vec{v}_2 . Triunghiul arată variația vectorială a vitezei $\Delta \vec{v} (= \vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ suferită de particulă în timpul mișcării sale de la A la B .

Mărimea \vec{a} este un vector, deoarece ea s-a obținut prin împărțirea unui vector $\Delta \vec{v}$ la un scalar Δt . Accelerația este de aceea caracterizată prin modul, direcție și sens. Direcția sa este direcția lui $\Delta \vec{v}$, iar modulul său este $|\Delta \vec{v} / \Delta t|$. Mărimea accelerației se exprimă în unități de viteză împărțite la unități de timp, cum sînt de exemplu m/s^2 („metru pe secundă la pătrat), cm/s^2 sau km/s^2 .

Numim \vec{a} din ecuația (3-8) accelerația medie deoarece nu s-a spus nimic despre variația în timp a vitezei în decursul intervalului Δt . Noi știm numai variația netă a vitezei și timpul total scurs. Dacă variația vitezei (un vector) împărțită la timpul

corespunzător scurs, $\Delta \vec{v} / \Delta t$, ar rămâne constantă, indiferent de intervalele de timp în care am măsurat accelerația, am avea accelerație *constantă*. Accelerație constantă implică deci faptul că *variația* vitezei este uniformă în timp ca direcție și mărime. Dacă nu există *nici* o variație a vitezei, adică, dacă viteza ar rămâne constantă atât în modul cât și ca direcție, atunci $\Delta \vec{v}$ ar fi zero, pentru toate intervalele de timp și accelerația ar fi zero.

Dacă o particulă se mișcă astfel încât accelerația sa medie, măsurată pentru mai multe intervale de timp diferite, *nu* este constantă, se spune că particula are o accelerație variabilă. Accelerația poate varia în modul, ca direcție sau în ambele. În astfel de cazuri ne interesează să determinăm accelerația particulei în fiecare moment dat, numită accelerație instantanee.

Accelerația instantanee este definită prin

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3-9)$$

adică accelerația unei particule la momentul t este egală cu *valoarea limită* a raportului $\Delta \vec{v} / \Delta t$ în momentul t atunci când atât $\Delta \vec{v}$ cât și Δt tind către zero. Direcția accelerației instantanee \vec{a} este direcția limită a variației vectoriale a vitezei, $\Delta \vec{v}$. Modulul a al accelerației instantanee este $a = |\vec{a}| = |d\vec{v}/dt|$. Atunci când accelerația este constantă, accelerația instantanee este egală cu accelerația medie. Studentul trebuie să observe că relația dintre \vec{a} și \vec{v} din ecuația (3-9) este aceeași ca și relația dintre \vec{v} și \vec{r} din ecuația (3-2).

Două cazuri particulare ilustrează faptul că accelerația poate proveni dintr-o variație atât a modului cât și a direcției vitezei. Într-un caz avem mișcarea de-a lungul unei linii drepte cu viteză uniform variabilă (ca în paragraful 3-8). Aici viteza nu se schimbă ca direcție, în schimb modulul ei se schimbă uniform în timp. Acesta este un caz al accelerației constante. În celălalt caz avem mișcarea pe un cerc cu viteză absolută constantă (paragraful 4-4). Aici vectorul viteză variază în mod continuu ca direcție însă modulul său rămâne constant. Aceasta este de asemenea o mișcare accelerată, deși direcția vectorului accelerație nu este constantă. Mai târziu vom întâlni alte cazuri importante de mișcare accelerată.

3-7. Mișcarea unidimensională — accelerația variabilă

Din ecuațiile (3-5) și (3-9) putem scrie pentru mișcarea într-un plan, ca în figura 3-3,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt}$$

sau

$$\vec{a} = i\vec{a}_x + j\vec{a}_y, \quad (3-10)$$

unde $a_x (=dv_x/dt)$ și $a_y (=dv_y/dt)$ sînt componentele (scalare) ale vectorului accelerație \vec{a} (vezi fig. 3-3, c).

Iarăși ne vom restrînge numai la cazul mișcării unidimensionale, aleasă pentru conveniență de-a lungul axei x . Deoarece v_y pentru o astfel de mișcare nu variază în timp (și este de fapt zero), a_y care este dv_y/dt trebuie să fie de asemenea zero, astfel încît

$$\vec{a} = i\vec{a}_x. \quad (3-11)$$

Deoarece i este îndreptat în sensul pozitiv al axei x , a_x va fi pozitiv dacă \vec{a} este îndreptat în acest sens și negativ dacă \vec{a} este îndreptat în sensul opus.

Exemplul 3. Mișcarea din figura 3-5, a este o mișcare cu accelerație variabilă de-a lungul axei x . Pentru a afla accelerația¹ a_x în fiecare moment, trebuie să determinăm dv_x/dt în fiecare moment. Aceasta este pur și simplu panta curbei lui v_x în funcție de t în acel moment. Panta în punctul b din figura 3-5, c este $-1,3 \text{ m/s}^2$ și panta în punctul d este $-1,8 \text{ m/s}^2$, așa cum este arătat în figură. Rezultatul calculului pantei pentru toate punctele este arătat în figura 3-5, d. Observați că a_x este negativ pentru toate momentele, ceea ce înseamnă că vectorul accelerație \vec{a} este îndreptat în sensul negativ al axei x . Aceasta înseamnă că v_x descreește permanent în timp, așa cum se vede clar din figura 3-5, c. Mișcarea este o mișcare în care vectorul accelerație are o direcție constantă dar variază ca modul (vezi fig. 3-5, a).

3-8. Mișcarea unidimensională — accelerația constantă

Acum să ne restrîngem în continuare considerațiile la mișcarea care nu numai că se produce într-o singură dimensiune (axa x) dar pentru care $a_x = \text{const}$. Pentru o astfel de *accelerație constantă*, accelerația medie pentru orice interval de timp este egală cu accelerația instantanee (constantă) a_x . Fie $t_1 = 0$ și fie t_2 un moment arbitrar t . Fie v_{x0} valoarea lui v_x la $t=0$ și fie v_x valoarea sa la momentul arbitrar t . Cu această notație găsim pe a_x (vezi ecuația 3-8) din

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{t - 0}$$

sau

$$v_x = v_{x0} + a_x t. \quad (3-12)$$

¹ Ca și în cazul vitezelor, numim de obicei pe a_x în cazul mișcării unidimensionale — accelerație, deși accelerația este un vector și a_x este, corect vorbind, o componentă a accelerației. Pentru mișcarea unidimensională există o singură componentă, dacă axa este aleasă de-a lungul liniei de mișcare.

Figura
stantă
(b) D
are in
 $v_x = v_{x0}$
(d) A
simila

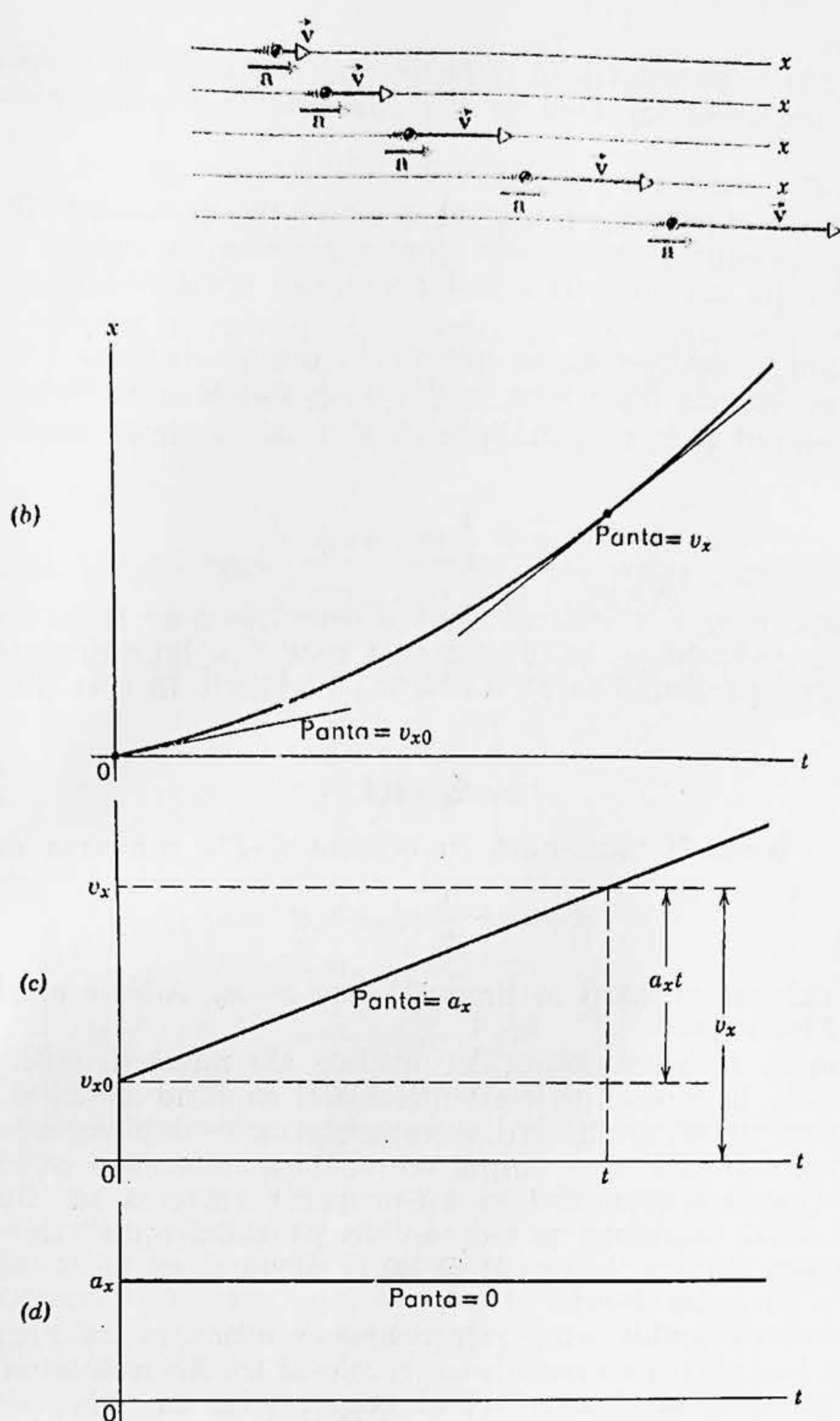


Figura 3-7. (a) Cinci „instantanee” succesive ale mișcării rectilinii cu accelerație constantă. Săgețile legate de sfere reprezintă pe \vec{v} ; cele de dedesubt reprezintă pe \vec{a} . (b) Deplasarea crește pătratic, conform ecuației $x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. Panta ei crește uniform și are în fiecare moment valoarea v_x a vitezei. (c) Viteza v_x crește uniform conform formulei $v_x = v_{x0} + a_x t$. Panta sa este constantă și are în fiecare moment valoarea a_x a accelerației. (d) Accelerația a_x are o valoare constantă; panta ei este zero. Figura 3-5 arată grafice similare pentru mișcarea unidimensională în care accelerația nu este constantă.

Această ecuație spune că viteza v_x la momentul t este suma dintre valoarea sa v_{x0} la momentul $t=0$ și variația vitezei în intervalul t , care este $a_x t$.

Figura 3-7, c arată un grafic al lui v_x în funcție de t în cazul accelerației constante; el este un grafic al ecuației (3-12). Observați că panta curbei care reprezintă viteza, este constantă, așa cum trebuie să fie, deoarece accelerația $a_x (=dv_x/dt)$ a fost presupusă constantă, așa cum arată figura 3-7, d.

Atunci cînd viteza v_x variază uniform în timp, valoarea sa medie pentru orice interval de timp este egală cu jumătate din suma valorilor lui v_x la începutul și la sfîrșitul intervalului, adică viteza medie $\overline{v_x}$ între $t=0$ și $t=t$ este

$$\overline{v_x} = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x). \quad (3-13)$$

Această relație n-ar fi adevărată dacă accelerația n-ar fi constantă, deoarece atunci curba lui v_x în funcție de t n-ar fi o linie dreaptă.

Dacă poziția particulei la $t=0$ este x_0 , poziția x la $t=t$ poate fi găsită din

$$x = x_0 + \overline{v_x} t$$

expresie care poate fi combinată cu ecuația (3-13) pentru a da

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t. \quad (3-14)$$

Deplasarea datorită mișcării în timpul t este $x - x_0$. Adesea originea este aleasă astfel încît $x_0 = 0$.

Observăm că în afara condițiilor inițiale ale mișcării, adică a valorilor lui x și v_x la momentul $t=0$ (luate aici ca fiind $x=x_0$ și $v_x=v_{x0}$), există patru parametri ai mișcării. Aceștia sînt: x — deplasarea; v_x — viteza; a_x — accelerația și t — timpul scurs. Dacă cunoaștem numai faptul că accelerația este constantă, însă nu neapărat valoarea sa, din oricare doi dintre acești parametri putem obține pe ceilalți doi. De exemplu dacă a_x și t sînt cunoscuți, ecuația (3-12) îl dă pe v_x și, odată v_x obținut, aflăm pe x din ecuația (3-14).

În majoritatea problemelor referitoare la mișcarea uniform accelerată, doi parametri sînt cunoscuți, iar cel de-al treilea trebuie aflat. Este convenabil de aceea să obținem relații între oricare trei dintre cei patru parametri. Ecuația (3-12) conține pe v_x , a_x și t , însă nu conține pe x ; ecuația (3-14) conține pe x , v_x și t însă nu conține pe a_x . Pentru a completa sistemul nostru de ecuații mai avem nevoie de încă două relații, una conținînd pe x , a_x și t însă nu și pe v_x și alta conținînd pe x , v_x și a_x însă nu și pe t . Acestea se obțin ușor combinînd ecuațiile (3-13) și (3-14).

În modul acesta, dacă substituim în ecuația (3-14) valoarea lui v_x din ecuația (3-12), eliminăm prin aceasta pe v_x și obținem

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (3-15)$$

Dacă rezolvăm ecuația (3-12) în raport cu t și substituim această valoare a lui t în ecuația (3-14), obținem

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (3-16)$$

Ecuațiile (3-12), (3-14), (3-15) și (3-16) (vezi tabela 3-1) reprezintă setul complet de ecuații pentru mișcarea de-a lungul unei linii drepte cu accelerație constantă.

Un caz special de mișcare cu accelerație constantă este acela în care accelerația este zero, adică $a_x = 0$. În acest caz cele patru ecuații din tabela 3-1 se reduc la rezultatele așteptate: $v_x = v_{x0}$ (viteza nu variază) și $x = x_0 + v_{x0}t$ (deplasarea variază liniar în timp).

Tabela 3-1

ECUAȚIILE CINEMATICE PENTRU MIȘCAREA RECTILINIE
CU ACCELERAȚIE CONSTANTĂ

(Pозиția x_0 și viteza v_{x0} la momentul inițial $t=0$ sînt condițiile inițiale date.)

NUMĂRUL ECUAȚIEI	ECUAȚIA	CONȚINE			
		x	v_x	a_x	t
3-12	$v_x = v_{x0} + a_x t$	×	✓	✓	✓
3-14	$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t$	✓	✓	×	✓
3-15	$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	✓	×	✓	✓
3-16	$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	✓	✓	✓	×

Exemplul 4. Curba din figura 3-7, b este un grafic deplasare-timp pentru o mișcare cu accelerație constantă; adică ea este un grafic al ecuației (3-15) în care $x_0 = 0$. Panta tangentei la curbă în momentul t este egală cu viteza v_x în acel moment. Observăm că panta crește continuu în timp de la v_{x0} la $t=0$. Viteza de creștere a acestei pante trebuie să dea accelerația a_x , care este constantă în acest caz. Curba din figura 3-7, b este o parabolă, deoarece ecuația (3-15) este ecuația unei parabole care are panta v_{x0} la $t=0$. Obținem, prin derivarea succesivă a ecuației (3-15)

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2,$$

$$dx/dt = v_{x0} + a_x t \text{ sau } v_x = v_{x0} + a_x t,$$

care dă viteza v_x la momentul t (comparați-o cu ecuația 3-12) și

$$dv_x/dt = a_x, \text{ — accelerație constantă.}$$

Graficul deplasare-timp pentru o mișcare rectilinie uniform accelerată va fi deci totdeauna o parabolă.

3-9. Bilanțul unităților și dimensiunilor

Studentul nu trebuie să se simtă forțat sau constrâns să memoreze relații de felul celor din tabela 3-1. Important este faptul de a fi capabil să urmeze linia de raționament folosită pentru a obține rezultatele. Aceste relații studentul și le va reaminti automat după ce le va folosi de mai multe ori la rezolvarea problemelor, în parte ca rezultat al familiarizării câștigate, dar mai ales ca rezultat al unei înțelegeri mai bune obținute prin aplicații.

Putem folosi orice *unități* convenabile de timp și de spațiu în aceste ecuații. Dacă alegem pentru exprimarea timpului secunda și a distanței metrul, pentru consistență trebuie să exprimăm viteza în m/s, iar accelerația în m/s². Dacă ni se dau date în care unitățile unei mărimi, cum este viteza, nu sînt consistente cu unitățile unei alte mărimi, ca accelerația, atunci înainte de a folosi datele în ecuațiile noastre, trebuie să transformăm ambele mărimi în unități care să fie consistente între ele. Odată alese unitățile mărimilor fundamentale, noi determinăm automat unitățile mărimilor derivate, consistente cu primele. În efectuarea oricărui calcul să nu uităm niciodată să atașăm unitățile corespunzătoare la rezultatul final, deoarece rezultatul nu are sens fără unități.

Exemplul 5. Să presupunem că vrem să aflăm viteza unei particule care are o accelerație uniformă de 5,00 cm/s² după un interval de 1/2 h, dacă la începutul acestui interval particula a avut o viteză de 3,0 m/s. Ne hotărîm să alegem metrul ca unitate de lungime și secunda ca unitatea de timp. Atunci

$$a_x = 5,00 \text{ cm/s}^2 = 5,00 \text{ cm/s}^2 \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right) = 5,00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Intervalul de timp

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{1}{2} \text{ h} \cdot \left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) \cdot \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 1800 \text{ s} = 18 \cdot 10^2 \text{ s}$$

Observăm că factorii de conversiune din parantezele mari sînt egali cu unu. Luînd timpul inițial $t_0 = 0$, ca în ecuația (3-12), avem

$$v_x = v_{x0} + a_x t = 3,0 \text{ m/s} + (5,00 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2) \cdot (18 \cdot 10^2 \text{ s}) = 93,0 \text{ m/s}$$

O cale de a descoperi o ecuație greșită este aceea de a verifica *dimensiunile* tuturor termenilor săi. Dimensiunile unei mărimi fizice pot fi totdeauna exprimate ca o combinație a mărimilor fundamentale cum sînt masa, lungimea și timpul, din care ele derivă. Dimensiunile vitezei sînt lungimea (L) împărțită la timp (T); dimensiunile accelerației sînt lungimea împărțită la timp la pătrat etc. În orice *ecuație fizică corectă dimensiunile tuturor termenilor trebuie să fie aceleași*. Aceasta înseamnă, de exemplu, că nu putem egala un termen a cărui dimensiune totală este o viteză cu un termen a cărui dimensiune totală este o accelerație. Simbolurile dimensionale atașate diferitelor mărimi pot fi tratate exact ca mărimi algebrice și pot fi adunate, reduse, simplificate etc. exact ca și acum ar fi factori în ecuație. De exemplu, pentru a proba ecuația (3-15), $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, din punct de vedere dimensional, observăm că x și x_0 au dimensiunea unei lungimi.

Prin urmare, cei doi termeni rămași trebuie să aibă de asemenea dimensiunea unei lungimi. Dimensiunea termenului $v_{x0} t$ este

$$\frac{\text{lungime}}{\text{timp}} \cdot \text{timp} = \text{lungime sau } \frac{L}{T} \times T = L,$$

și dimensiunea termenului $\frac{1}{2} a_x t^2$ este

$$\frac{\text{lungime}}{\text{timp}^2} \cdot \text{timp}^2 = \text{lungime sau } \frac{L}{T^2} \times T^2 = L.$$

Prin urmare ecuația este corectă din punct de vedere dimensional. Studentul trebuie să verifice dimensiunile tuturor ecuațiilor pe care le folosește.

Exemplul 6. Viteza unui automobil care se deplasează spre est este redusă uniform de la 45,0 km/h la 30,0 km/h pe o distanță de 50 m.

(a) Care este mărimea și direcția accelerației constante?

Alegem, arbitrar, direcția de la vest la est ca direcție pozitivă a axei x . Ni se dau x și v_x și trebuie să găsim pe a_x . Timpul nu intervine. Ecuația (3-16) este deci adecuată (vezi tabela 3-1). Avem $v_x = +30,0$ km/h, $v_{x0} = +45,0$ km/h, $x - x_0 = +50$ m = 0,050 km. Din ecuația (3-16), $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2 a_x (x - x_0)$, obținem

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2(x - x_0)}$$

sau

$$a_x = \frac{(30,0 \text{ km/h})^2 - (45,0 \text{ km/h})^2}{2 \cdot 0,050 \text{ km}} = -1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2 = -0,87 \text{ m/s}^2.$$

Direcția accelerației \vec{a} este spre vest, adică în sensul negativ al axei x , deoarece a_x este negativ. Automobilul încetinește pe măsură ce se mișcă spre est așa cum și trebuie din moment ce este accelerat spre vest. Atunci când viteza unui corp descrește spunem adesea că el este decelerat.

(b) Cît timp a durat această accelerare?

Dacă folosim numai datele originale, tabela 3-1 arată că ecuația (3-14) este potrivită. Din ecuația (3-14), $x - x_0 = \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t$, obținem

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{x0} + v_x}$$

sau

$$t = \frac{(2)(0,050 \text{ km})}{(45,0 + 30,0) \text{ km/h}} = \frac{1}{750} \text{ h} = 4,80 \text{ s}.$$

Dacă folosim datele deduse la punctul (a), ecuația (3-12) este convenabilă. Aceasta ne permite o verificare. Din ecuația (3-12), $v_x = v_{x0} + a_x t$, avem

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

sau

$$t = \frac{(30,0 - 45,0) \text{ km/h}}{-1,13 \cdot 10^4 \text{ km/h}^2} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ h} = 4,805 \text{ s}.$$

(c) Dacă presupunem că automobilul continuă să decelereze cu aceeași accelerație, cât timp va trece până când el se va opri, plecând de la 45,0 km/h?

Aici ecuația (3-12) este utilă. Avem $v_{x0} = 45,0$ km/h, $a_x = -1,13 \cdot 10^1$ km/h² și viteza finală $v_x = 0$. Atunci din ecuația (3-12), $v_x = v_{x0} + a_x t$, obținem

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

sau

$$t = \frac{(0 - 45,0) \text{ km/h}}{-1,13 \cdot 10^1 \text{ km/h}^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h} = 14,4 \text{ s.}$$

(d) Care este spațiul total necesar pentru oprirea automobilului plecând de la 45,0 km/h?

Aici este convenabilă ecuația (3-15). Avem $v_{x0} = 45,0$ km/h, $a_x = -1,13 \cdot 10^1$ km/h², $t = 4,00 \cdot 10^{-3}$ h. Din ecuația (3-15), $x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$, obținem

$$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (45,0 \text{ km/h}) (4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h}) + \frac{1}{2} (-1,13 \cdot 10^1 \text{ km/h}^2) (4,00 \cdot 10^{-3} \text{ h})^2 = -0,090 \text{ km} = 90 \text{ m.}$$

Exemplul 7. Nucleul unui atom de heliu (particulă alfa) se mișcă de-a lungul unui tub cilindric rectiliniu de 2,0 m lungime, care face parte dintr-un accelerator de particule. (a) Dacă presupunem o mișcare uniform accelerată, cât timp se va găsi particula în tub dacă ea intră cu o viteză de $1,0 \cdot 10^4$ m/s și părăsește tubul cu viteza $5,0 \cdot 10^6$ m/s? (b) Care este accelerația în decursul acestui interval de timp?

(a) Alegem axa x paralelă cu tubul, sensul pozitiv fiind sensul de mișcare al particulei în momentul intrării în tub. Ni se dau x și v_x și trebuie să aflăm t . Accelerația a_x nu intervine. Prin urmare folosim ecuația (3-14), $x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) t$ cu $x_0 = 0$ sau

$$t = \frac{2x}{v_{x0} + v_x},$$

$$t = \frac{2 \cdot 2,0 \text{ m}}{(500 + 1) \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 8,0 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

sau 0,80 microsecunde.

(b) Accelerația rezultă din ecuația (3-12), $v_x = v_{x0} + a_x t$ sau

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t} = \frac{(500 - 1) \cdot 10^4 \text{ m/s}}{8,0 \cdot 10^{-7} \text{ s}} = +6,2 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

Deși această accelerație este enormă față de exemplul precedent, ea are loc într-un interval de timp extrem de scurt. Accelerația \vec{a} este îndreptată în sensul pozitiv al axei x , adică în direcția în care se mișcă particula, deoarece a_x este pozitiv.

3-10. Corpuri în cădere liberă

Cel mai obișnuit exemplu de mișcare cu accelerație (aproape) constantă este exemplul unui corp care cade spre pământ. În absența rezistenței aerului se găsește că toate corpurile, independent de dimensiunile

lor, de greutatea lor sau de compoziția lor, cad cu aceeași accelerație în același punct de pe suprafața Pământului și dacă distanța parcursă nu este prea mare, accelerația rămâne constantă în tot timpul căderii. Această mișcare ideală, în care rezistența aerului și variația mică a accelerației cu altitudinea sînt neglijate, se numește „cădere liberă”.

Accelerația unui corp în cădere liberă se numește accelerație datorită gravității și se notează cu simbolul \vec{g} . În apropierea suprafeței terestre valoarea ei este de aproximativ $9,8 \text{ m/s}^2$ și este dirijată în jos către centrul Pământului. Variația valorii exacte cu latitudinea și altitudinea va fi discutată mai târziu (capitolul 16).

Natura mișcării unui corp în cădere a fost cu mult timp în urmă un subiect de interes în filozofia naturală. Aristotel a afirmat că „mișcarea în jos... a oricărui corp înzestrat cu greutate are o lățeală proporțională cu dimensiunile sale”. Au trecut mai multe secole pînă cînd, mai târziu Galileo Galilei (1564—1642), un om de știință italian din perioada Renașterii, a apelat la experiență pentru a descoperi adevărul și apoi a proclamat în public că autoritatea lui Aristotel în această chestiune a fost serios contestată. În ultimii ani ai vieții sale, Galileo Galilei a scris tratatul intitulat *Dialoguri privind cele două științe noi* în care dă amănunte asupra studiilor sale despre mișcare¹. Acest tratat poate fi considerat ca marcînd începutul științei dinamicii.

Credința lui Aristotel că un obiect mai greu va cădea mai iute este o părere comună. Ea pare să-și găsească un sprijin în binecunoscuta experiență demonstrativă în care o minge și o foaie de hîrtie sînt lăsate să cadă în același moment: mingea atinge podeaua mult mai repede decît hîrtia. Totuși, dacă experimentatorul mototolește mai întîi bine foaia de hîrtie și apoi repetă experiența, atît mingea cît și hîrtia lovesc podeaua practic în același timp. În primul caz, efectul rezistenței sporite a aerului este acela care face ca hîrtia să cadă mai încet decît mingea. În ultimul caz, efectul rezistenței aerului asupra hîrtiei este redus și este aproximativ același pentru ambele corpuri, astfel încît ele cad cu aproximativ aceeași viteză. Desigur că o verificare directă poate fi făcută lăsînd corpurile să cadă în vid. Chiar într-un vid parțial, ușor de obținut, putem arăta că o pană și o bilă de plumb de o mie de ori mai grea, cad cu viteze care sînt practic indiscernabile.

În timpul lui Galilei, nu exista însă nici un procedeu efectiv de a obține un vid parțial, și nu exista nici vreun echipament pentru a cronometra corpurile în cădere liberă, cu suficientă precizie pentru a obține date numerice demne de încredere. Cu toate acestea, Galilei a dovedit rezultatul său arătînd pentru prima dată că caracterul mișcării unei bile care se rostogolește în jos pe un plan înclinat este același ca al unei bile în cădere liberă. Planul înclinat servește pur și simplu pentru a reduce accelerația efectivă a gravității și a încetini prin aceasta mișcarea. Intervalele de timp măsurate prin volumul de apă scurs dintr-un rezer-

¹ Galilei a adus contribuții importante în astronomie prin folosirea telescopului său. Dovada sa puternică în favoarea ipotezei lui Copernic asupra sistemului solar a servit pentru a recuza sistemul ptolemeic și din această cauză a stîrnit patimi aprinse în mințile conducătorilor bisericii împotriva sa. El a fost adus de două ori în fața Inchiziției. I s-a ordonat să nu publice nimic în sprijinul sistemului copernican și a fost constrîns să renege în public credința sa în acest sistem. Era în timpul perioadei de frică și incertitudine cînd el și-a scris dialogul asupra mișcării, publicat doar după moartea sa.

vor puteau fi folosite pentru a măsura viteza și accelerația acestei mișcări. Galilei a arătat că dacă accelerația de-a lungul planului înclinat este constantă, accelerația datorită gravitației trebuie să fie de asemenea constantă; deoarece accelerația de-a lungul planului înclinat este pur și simplu o componentă a accelerației verticale a gravitației, și de-a lungul unui plan înclinat de pantă constantă raportul celor două accelerații rămâne constant.

Din experiențe el a găsit că distanțele parcurse în intervale de timp consecutive egale erau proporționale cu numerele impare, 1, 3, 5, 7, ... etc. Distanțele totale pentru intervale consecutive erau astfel proporționale cu $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$ etc., adică proporționale cu pătratele numerelor întregi 1, 2, 3, 4 etc. Dar dacă distanța parcursă este proporțională cu pătratul timpului scurs, viteza câștigată este proporțională cu timpul scurs, rezultat valabil numai dacă mișcarea este uniform accelerată. El a găsit că aceleași rezultate sînt valabile indiferent de masa bilei folosite.

3-11. Ecuațiile mișcării în căderea liberă

Vom alege un sistem de referință legat rigid de Pămînt. Axa y va fi dirijată cu sensul pozitiv vertical în sus. Atunci accelerația datorită gravitației \vec{g} , va fi un vector dirijat vertical în jos (către centrul Pămîntului) în sensul negativ al axei y . (Această alegere este arbitrară. În alte probleme poate fi convenabil să alegem sensul în jos ca fiind pozitiv.) Ecuațiile noastre pentru accelerație constantă sînt aplicabile aici. Înlocuim pur și simplu pe x cu y și punînd $y_0=0$ în ecuațiile (3-12), (3-14), (3-15) și (3-16), obținem

$$\begin{aligned}v_y &= v_{y0} + a_y t, \\y &= \frac{1}{2} (v_{y0} + v_y) t, \\y &= v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\v_y^2 &= v_{y0}^2 + 2a_y y,\end{aligned}\tag{3-17}$$

și pentru problemele de cădere liberă punem $a_y = -g$. Observăm că am ales poziția inițială ca origine, adică am ales $y_0=0$ la $t=0$. Observăm de asemenea că g este valoarea accelerației datorită gravitației.

Exemplul 8. Un corp este lăsat să cadă din repaus și cade liber. Să se determine poziția și viteza corpului după ce au trecut 1,0; 2,0; 3,0 și 4,0 s.

Alegem punctul de plecare ca origine. Cunoaștem viteza inițială și accelerația și ni se dă timpul. Pentru a găsi poziția, folosim:

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Atunci, $v_{y0} = 0$ și $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, și cu $t = 1,0 \text{ s}$ obținem

$$y = 0 - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (1,0 \text{ s})^2 = -4,9 \text{ m}.$$

Pentru a găsi viteza la $t=1,0$ s folosim

$$v_y = v_{y0} - gt$$

și obținem

$$v_y = 0 - (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot 1,0 \text{ s} = -9,8 \text{ m/s}.$$

După 1,0 s de cădere, plecând din repaus, corpul se află cu 4,9 m mai jos de punctul său de plecare și are o viteză dirijată în jos, a cărei mărime este 9,8 m/s; semnul negativ pentru y și v_y arată că vectorii asociați sînt dirijați fiecare în sensul negativ al axei y , adică în jos.

Studentul trebuie să arate acum că valorile lui y , v_y și a_y , obținute la momentele $t=2,0$; $3,0$ și $4,0$ s sînt cele arătate în figura 3-8.

Exemplul 9. O bilă este aruncată vertical în sus de pe pămînt cu o viteză de 24,5 m/s.

(a) Cît timp durează pînă cînd corpul atinge înălțimea sa maximă?

În punctul său cel mai înalt, $v_y = 0$ și avem $v_{y0} = +24,5$ m/s. Pentru a obține timpul t folosim ecuația $v_y = v_{y0} - gt$ sau

$$t = \frac{v_{y0} - v_y}{g},$$

$$t = \frac{(24,5 - 0) \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2,5 \text{ s}.$$

(b) Ce înălțime atinge bila? Folosind numai datele originale, alegem relația $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy$ sau

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(24,5 \text{ m/s})^2 - 0}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = +30,6 \text{ m}.$$

(c) La ce momente mingea se va găsi la o înălțime de 29,4 m deasupra pămîntului?

Folosind $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$, avem

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0,$$

$$\frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)t^2 - (24,5 \text{ m/s})t + 30,6 \text{ m} = 0$$

sau

$$t^2 - 5,0t + 6,0 = 0,$$

ceea ce dă $t=2,0$ s și $t=3,0$ s.

La $t=2,0$ s bila se mișcă în sus cu o viteză de 4,9 m/s, deoarece

$$v_y = v_{y0} - gt = 24,5 \text{ m/s} -$$

$$= (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot 2,0 \text{ s} = +4,9 \text{ m/s}.$$

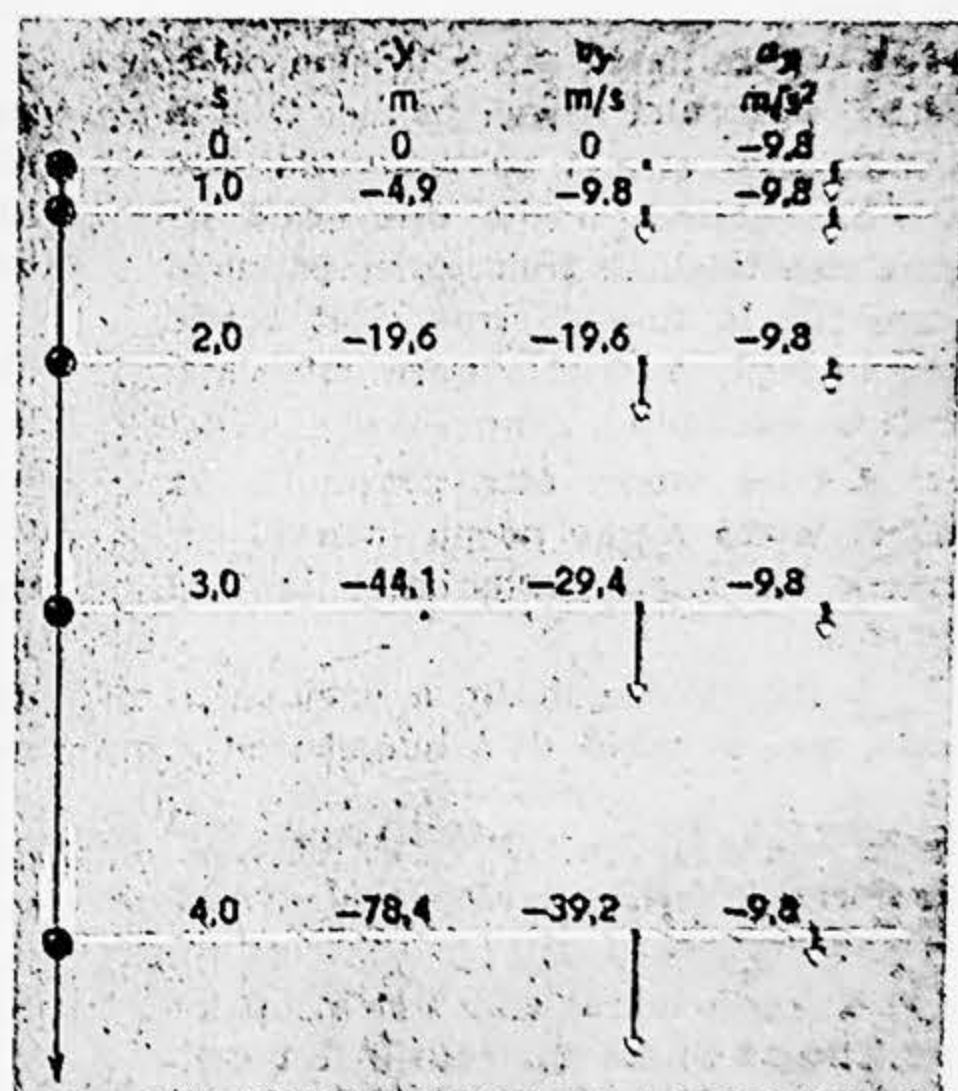


Figura 3-8. Un corp în cădere liberă; se arată y , v_y și a_y pentru diferite momente t .

La $t=3,0$ s, bila se mișcă în jos cu aceeași viteză, deoarece

$$v_y = v_{y0} - gt = 24,5 \text{ m/s} - (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot 3,0 \text{ s} = -4,9 \text{ m/s}.$$

Observăm că în intervalul de 1,0 s viteza variază cu $-9,8 \text{ m/s}$ corespunzător unei accelerații de $-9,8 \text{ m/s}^2$.

Studentul trebuie să fie în stare să se convingă că în absența rezistenței aerului bila va necesita un timp egal pentru urcare ca și pentru coborîre pe aceeași distanță și că ea va avea aceeași viteză la întoarcere în fiecare punct ca și la ducere.

Întrebări

1. Puteți imagina fenomene fizice în care intervine Pământul și în care Pământul nu poate fi tratat ca un punct material?

2. În fiecare secundă un iepure parcurge jumătate din distanța rămasă de la botul său pînă la o căpățînă de lăptucă. Va ajunge el vreodată la lăptucă? Care este valoarea limită a vitezei sale medii? Trasați graficele care să arate viteza și poziția sa în funcție de timp.

3. Viteza medie poate însemna mărimea vectorului viteză medie. O altă semnificație care i se poate da este aceea că viteza medie este egală cu lungimea totală a traiectoriei parcurse împărțită la timpul scurs. Sînt aceste semnificații diferite? Dacă este așa, dați un exemplu.

4. Dacă viteza este constantă, va diferi viteza medie pe un interval oarecare de viteza instantanee în acel moment?

5. Este viteza medie a unei particule, care se mișcă de-a lungul axei x , $\frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)$, dacă accelerația nu este uniformă? Verificați răspunsul dv. folosind grafice.

6. Vitezometrul unui automobil înregistrează viteza așa cum a fost definită de noi?

7. (a) Poate un corp să aibă viteză zero și totuși să fie accelerat? (b)

Poate avea un corp o viteză constantă în modul și totuși să aibă o viteză vectorială variabilă? (c) Poate un corp avea o viteză vectorială constantă și totuși să aibă o viteză absolută variabilă?

8. Poate un obiect să aibă o viteză dirijată spre est și în același timp să sufere o accelerație îndreptată spre vest?

9. Poate varia direcția vitezei unui corp dacă accelerația este constantă?

10. Imaginați o schemă pentru măsurarea timpului cu ajutorul „ceasornicului cu apă” așa cum l-a folosit Galilei. Puteți evita operații repetitive și totuși să măsurați timpul precis?

11. Dacă o particulă este lansată din repaus ($v_{x0}=0$) din punctul $y_0=0$ la momentul $t=0$, ecuația (3-17) pentru accelerație constantă ne spune că ea se va găsi în poziția y la două momente diferite și anume $+\sqrt{2y/a_y}$ și $-\sqrt{2y/a_y}$. Care este semnificația rădăcinii negative a acestei ecuații pătratice?

12. Ce se întîmplă cu ecuațiile noastre cinematice la operația de inversare a sensului de scurgere a timpului, adică la înlocuirea lui t cu $-t$? Să se explice.

13. Să considerăm o bilă aruncată vertical în sus. Ținînd seama de rezistența aerului, vă așteptați ca timpul de urcare a bilei să fie mai lung sau

mai scurt decât timpul de coborîre a bilei?

14. Poate exista o mișcare bidimensională cu o accelerație numai unidimensională?

15. Un om stînd la marginea unei stînci la o anumită înălțime deasupra solului, aruncă o bilă vertical în sus cu viteza inițială u și apoi o altă bilă vertical în jos cu aceeași viteză inițială. Care bilă, dacă este cazul, are viteza mai mare atunci cînd lovește solul? Se va neglija rezistența aerului.

16. Din cîte știți despre măsurarea unghiurilor, ce dimensiuni ați prescrie unui unghi? Poate o mărime avea unități fără a avea dimensiuni?

17. Dacă m este o piatră ușoară și M este o piatră grea, conform lui

Aristotel M ar trebui să cadă mai repede decât m . Galilei a încercat să arate că părerea lui Aristotel era logic inconsistentă în baza următorului argument. Să legăm pe m cu M împreună, pentru a forma o piatră dublă. Atunci în timpul căderii m ar frîna pe M , deoarece ea tinde să cadă mai încet, și combinația ar cădea mai repede decât m , însă mai încet decât M . Dar conform lui Aristotel corpul dublu ($M+m$) este mai greu decât M și deci ar trebui să cadă mai repede decât M .

Dacă acceptați raționamentul lui Galilei ca fiind corect, puteți conchide că M și m trebuie să cadă cu aceeași viteză? De ce este nevoie de experiment în acest caz?

Dacă credeți că raționamentul lui Galilei este incorect, explicați de ce.

Probleme

1. Comparați viteza dv. medie în următoarele două cazuri. (a) Parcurgeți 72 m cu o viteză de 1,2 m/s și apoi alergați 72 m cu o viteză de 3,0 m/s de-a lungul unei piste drepte. (b) Mergeți timp de 1,0 min cu o viteză de 1,2 m/s și apoi alergați timp de 1,0 min cu 3,0 m/s de-a lungul unei piste drepte.

2. Un tren se mișcă cu viteză practic constantă de 90 km/h spre est timp de 40 min, apoi într-o direcție de 45° nord-est timp de 20 min și în sfîrșit spre vest timp de 50 min. Care este viteza medie a trenului în timpul acestei călătorii?

3. Două trenuri, avînd fiecare o viteză de 45 km/h, sînt îndreptate unul spre celălalt pe aceeași cale ferată rectilinie. O pasăre care poate zbura cu 90 km/h își ia zborul din unul dintre trenuri în momentul cînd trenurile se găsesc la o distanță de 90 km unul de celălalt și se îndreaptă direct spre celălalt tren. După ce

ajunge la celălalt tren, ea zboară exact înapoi către primul tren, și așa mai departe. (a) Cîte drumuri poate face pasărea de la un tren la celălalt pînă în momentul întîlnirii lor? (b) Care este distanța totală parcursă de pasăre?

4. O particulă se mișcă de-a lungul unei linii orizontale și are următoarele poziții la diferite perioade de timp:

$x(\text{metri}) -$	0,080	0,050	0,040	
	0,050	0,080	0,13	0,20
$t(\text{sec}) -$	0,0	1,0	2,0	
	3,0	4,0	5,0	6,0

(a) Să se reprezinte deplasarea (nu poziția) în funcție de timp. (b) Să se afle viteza medie a particulei în intervalele 0,0—1,0 s; 0,0—2,0 s; 0,0—3,0 s; 0,0—4,0 s. (c) Să se afle panta curbei reprezentată la punctul (a) în punctele $t=1,0$; 2,0; 3,0; 4,0 și 5,0. (d) Să se reprezinte panta (în ce unități?) în funcție de timp. (e) Din curba de la punctul (d) să se determine accelerația

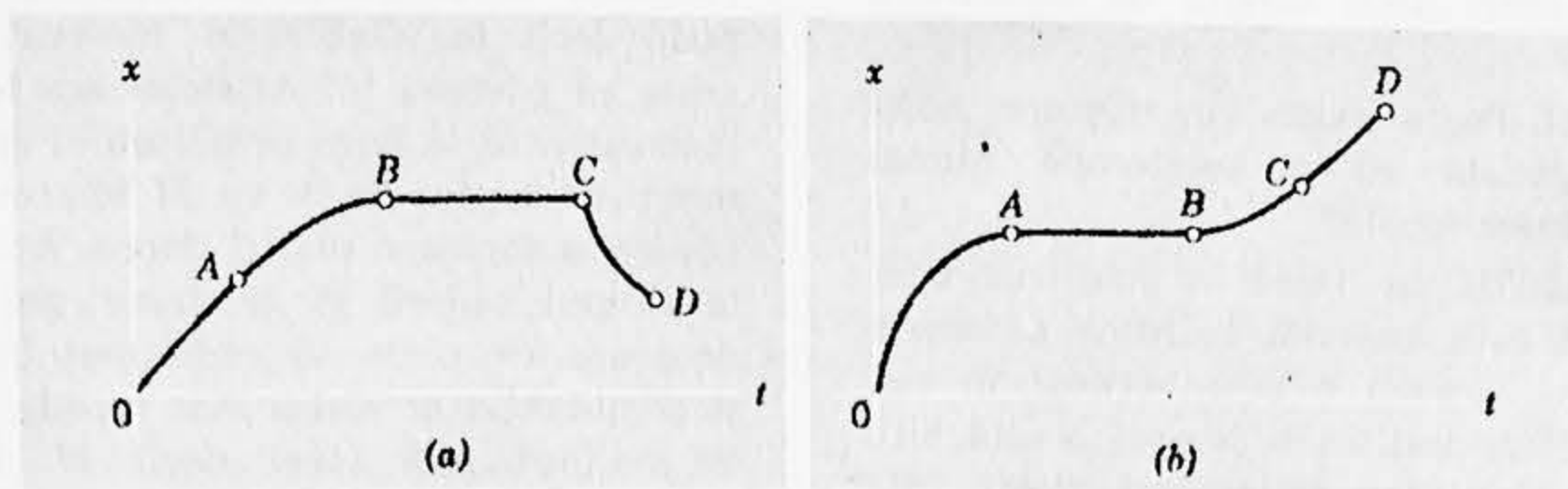


Figura 3-9.

particulei la momentele $t=2,0$; $3,0$ și $4,0$ s.

5. O minge de tenis este lăsată să cadă pe podea de la o înălțime de $1,2$ m. Ea ricoșează pînă la o înălțime de $0,90$ m. Dacă mingea s-a aflat în contact cu podeaua timp de $0,010$ s, care a fost accelerația sa medie în timpul contactului?

6. Graficul lui x în funcție de t (vezi fig. 3-9, a) este dat pentru o particulă în mișcare rectilinie. Să se stabilească pentru fiecare interval dacă viteza v_x este $+$, $-$, sau 0 și dacă accelerația a_x este $+$, $-$, sau 0 . Intervalele sînt OA, AB, BC și CD. Rezultă din curbe că există vreun interval în care accelerația să nu fie, în mod evident, constantă? (Se neglijează comportarea la capetele intervalelor.)

7. Să se răspundă la întrebările precedente pentru mișcarea descrisă de graficul din figura 3-9, b.

8. O săgeată lansată dintr-un arc a fost accelerată pe o distanță de $0,60$ m. Dacă viteza sa în momentul cînd a părăsit arcul era de 60 m/s, care a fost accelerația medie imprimată de arc? Justificați orice ipoteză pe care ar trebui s-o faceți.

9. Un electron cu viteza inițială $v_{x0}=1,0 \cdot 10^4$ m/s intră într-o regiune unde este accelerat electric (fig. 3-10). El iese cu o viteză $v_x=4,0 \cdot 10^6$ m/s. Care a fost accelerația sa presupusă constantă? (Un astfel de proces se petrece într-un tub electronic, folosit în

receptoarele de televiziune sau în osciloscoape.)

10. Să presupunem că ați fost solicitat să vă exprimați părerea unui jurist relativ la aspectul fizic implicat într-unul din cazurile sale. Problema este dacă un vehicul a depășit viteza limită de 50 km/h înainte de a face o oprire de forță majoră blocind frinele și patinînd pe roți. Lungimea urmelor de alunecare pe șosea era de $5,8$ m. Milițianul a făcut ipoteza rezonabilă că decelerația maximă a vehiculului n-ar putea depăși accelerația unui corp în cădere liberă și a arestat pe șofer pentru depășire de viteză. Era șoferul în depășire de viteză? Explicați.

11. Un mezon intră cu viteză constantă de $5,00 \cdot 10^6$ m/s într-o regiune în care un cîmp electric produce o accelerație asupra mezonului egală cu $1,25 \cdot 10^{14}$ m/s² dirijată în sens opus vitezei inițiale. Ce spațiu parcurge

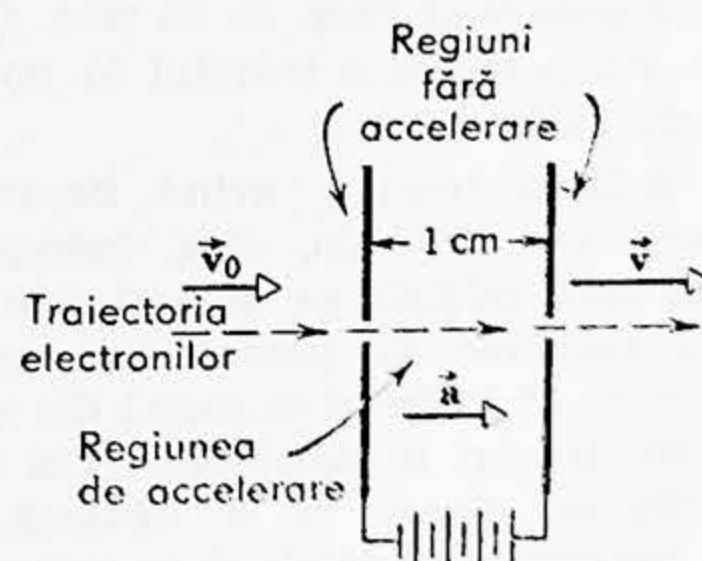


Figura 3-10.

mezonul pînă se oprește? Cît timp rămîne mezonul în repaus?

12. O rachetă se mișcă în cosmos cu o accelerație constantă egală cu $9,8 \text{ m/s}^2$. (a) Dacă ea pleacă din repaus, cît timp îi trebuie pentru a căpăta o viteză egală cu o zecime din viteza luminii? (b) Ce spațiu va parcurge în acest timp?

13. Un tren pornește din repaus și se mișcă cu accelerație constantă. La un moment dat el a mers cu $9,0 \text{ m/s}$ și cu 480 m mai departe el a mers cu 15 m/s . Să se calculeze: (a) accelerația, (b) timpul necesar pentru a parcurge cei 480 m menționați, (c) timpul necesar pentru a atinge viteza de $9,0 \text{ m/s}$, (d) distanța parcursă din repaus pînă în momentul cînd trenul atinge viteza de $9,0 \text{ m/s}$.

14. În momentul cînd semaforul arată verde, un automobil pornește cu accelerația constantă a_x de $1,8 \text{ m/s}^2$. În același moment, un autocamion, mergînd cu o viteză constantă de $9,0 \text{ m/s}$, depășește automobilul. (a) La ce distanță de punctul de pornire va depăși automobilul autocamionul? (b) Ce viteză va avea automobilul în acel moment? (Este instructiv de reprezentat un grafic calitativ al lui x în funcție de t pentru fiecare vehicul.)

15. Un automobil ce se mișcă cu accelerație constantă parcurge distanța de 60 m dintre două puncte în $6,0 \text{ s}$. Viteza sa în momentul cînd trece prin al doilea punct este de 15 m/s . (a) Care este viteza sa în dreptul primului punct? (b) Care este accelerația sa? (c) La ce distanță înainte de primul punct a fost vehiculul în repaus?

16. Mecanicul unui tren, care se mișcă cu o viteză v_1 , vede un marfar la o distanță d în fața sa pe aceeași cale ferată, mișcîndu-se în aceeași direcție cu o viteză mai mică v_2 . El pune frinele și imprimă trenului o accelerație constantă a .

Să se arate că

dacă $d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$, nu se va produce

ciocnirea,

dacă $d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$, se va produce ciocnirea.

(Este instructiv de reprezentat un grafic calitativ al lui x în funcție de t pentru fiecare tren.)

17. Două trenuri, unul mergînd cu 90 km/h și celălalt cu 120 km/h se îndreaptă unul spre celălalt de-a lungul unei căi ferate rectilinii. Atunci cînd ele se află la o distanță de $3,0 \text{ km}$ unul de altul, ambii mecanici văd simultan trenul celuilalt și pun frînă. Dacă frinele decelerează fiecare tren cu o decelerație de $1,0 \text{ m/s}^2$, să se afle dacă se va produce ciocnirea.

18. O sanie propulsată cu ajutorul unei rachete pe o pistă rectilinie este folosită pentru a studia efectele fiziologice ale accelerațiilor mari asupra omului. O astfel de sanie poate atinge o viteză de 1600 km/h în $1,8 \text{ s}$, pornind din repaus. (a) Să se presupună că accelerația este constantă și să se compare cu g . (b) Care este distanța parcursă în acest timp?

19. (a) Cu ce viteză trebuie aruncată o bilă vertical în sus pentru a atinge o înălțime de 15 m . (b) Cît timp se va afla bila în aer?

20. Dintr-un jgheab de ploaie apa picură pe o podea aflată la 27 m mai jos. Picăturile cad la intervale regulate de timp, prima picătură lovind podeaua în momentul cînd cea de-a patra picătură începe să cadă. Să se afle pozițiile picăturilor individuale în momentul cînd o picătură lovește podeaua.

21. Dacă un corp pornind din repaus, parcurge jumătate din drumul său total în ultima secundă a căderii, să se afle timpul și înălțimea de cădere.

Să se explice soluția inacceptabilă din punct de vedere fizic a ecuației pătratice în timp.

22. Un obuz de artilerie este tras direct în sus dintr-un tun; o rachetă propulsată cu ajutorul unui combustibil, pleacă vertical de pe o platformă de lansare. Să se reprezinte calitativ (nu se cer numere) graficele posibile ale lui a_y în funcție de t , v_y în funcție de t și y în funcție de t pentru fiecare corp. Se va lua $t=0$ în momentul când obuzul părăsește tunul sau racheta părăsește pământul. Să se continue reprezentarea grafică pînă când racheta și obuzul cad înapoi pe pământ; se va neglija rezistența aerului. Se va presupune sensul pozitiv în sus și sensul negativ în jos.

23. O rachetă este lansată vertical în sus și urcă cu o accelerație constantă de $19,2 \text{ m/s}^2$ timp de $1,0 \text{ min}$. Combustibilul ei este în acel moment epuizat și ea continuă să se miște ca o particulă liberă. (a) Care este altitudinea maximă atinsă? (b) Care este timpul total scurs de la pornire pînă când racheta lovește din nou pământul?

24. O bilă de plumb este lăsată să cadă într-un lac de pe o trambulină aflată la o înălțime de $5,0 \text{ m}$ deasupra apei. Ea lovește apa cu o anumită viteză și apoi se cufundă pînă la fund cu această viteză constantă. Ea atinge fundul lacului după $5,0 \text{ s}$ de la cădere. (a) Cît de adînc este lacul? (b) Care este viteza medie a bilei? (c) Să presupunem că toată apa este evacuată. Bila este aruncată de pe trambulină astfel încît iarăși atinge fundul lacului în $5,0 \text{ s}$. Care este viteza inițială a bilei?

25. O piatră este lăsată să cadă în apă de pe un pod de la 43 m deasupra apei. O altă piatră este aruncată vertical în jos la $1,0 \text{ s}$ după pornirea celei dintîi. Ambele pietre lovesc apa în același moment. (a) Care era viteza inițială a celei de a doua pietre?

(b) Să se reprezinte viteza în funcție de timp pe un grafic pentru fiecare piatră, luînd ca moment inițial momentul când este lăsată să cadă prima piatră.

26. O bilă de oțel este lăsată să cadă de pe acoperișul unei clădiri (viteza inițială a bilei este zero). Un observator care stă în dreptul unei ferestre, situată la $1,2 \text{ m}$ înălțime, observă că bila necesită $\frac{1}{8} \text{ s}$ pentru a

cădea de la marginea superioară pînă la marginea inferioară a ferestrei. Bila continuă să cadă, suferă o ciocnire perfect elastică cu trotuarul orizontal și reapare în dreptul marginii inferioare a ferestrei la $2,0 \text{ s}$ după ce a trecut prin acest punct în jos. Cît de înaltă este clădirea? (Bila va avea aceeași viteză în fiecare punct la ducere cît și la întoarcere după o ciocnire perfect elastică.)

27. Un cîine vede un ghiveci cu flori, aruncat în sus și apoi căzînd înapoi în jos, în dreptul unei ferestre de $1,5 \text{ m}$ înălțime. Dacă timpul total cît ghiveciul se află în cîmpul vizual este de $1,0 \text{ s}$, să se afle înălțimea pe care o atins-o ghiveciul deasupra ferestrei.

28. Un balon se află în ascensiune cu o viteză de 12 m/s la o înălțime de 80 m deasupra pământului în momentul când este lăsat să cadă un pachet. Cît timp îi trebuie pachetului ca să ajungă pe pământ?

29. Un parașutist după ce se aruncă cu parașuta cade fără frecări 50 m (fără a deschide parașuta). După deschiderea parașutei el decelerează cu $2,0 \text{ m/s}^2$ și atinge pământul cu o viteză de $3,0 \text{ m/s}$. (a) Cît timp se află parașutistul în aer? (b) De la ce înălțime a sărit parașutistul?

30. Un lift se ridică cu o accelerație în sus de $1,2 \text{ m/s}^2$. În momentul când viteza sa este de $2,4 \text{ m/s}$ în sus, un șurub cade liber de pe tavanul liftului de la $2,7 \text{ m}$ deasupra podelei.

Să se calculeze: (a) timpul de zbor al șurubului de la înălțimea maximă până la podea și (b) distanța cu care a căzut el față de puțul liftului.

31. Poziția unei particule care se mișcă de-a lungul axei x depinde de timp conform ecuației

$$x = at^2 - bt^3,$$

unde x este în metri și t în secunde.

(a) Ce dimensiuni și unități trebuie să aibă a și b ? Pentru cele ce urmează, fie valorile lor numerice 3,0 și respectiv 1,0. (b) În ce moment particula atinge poziția sa x maximă pozitivă? (c) Ce lungime totală a traiectoriei parcurge particula în primele 4,0 s? (d) Care este deplasarea sa în timpul primelor 4,0 s? (e) Care este viteza particulei la sfârșitul fiecăreia din primele 4 secunde? (f) Care este accelerația particulei la sfârșitul fiecăreia din primele 4 secunde?

32. Un electron, plecând din repaus, are o accelerație care crește liniar cu timpul adică, $a = kt$, variația accelerației fiind $k = (1,5 \text{ m/s}^2)/\text{s}$. (a) Să se reprezinte a în funcție de t în timpul primelor 10 s. (b) Din curba de la punctul (a) să se reprezinte viteza corespunzătoare în funcție de t și să se evalueze viteza electronului după 5,0 s de la pornirea sa. (c) Din curba lui v în funcție de timp de la punc-

tul (b), să se reprezinte curba corespunzătoare a lui x în funcție de t și să se evalueze cât de departe s-a mișcat electronul în timpul primelor 5,0 secunde ale mișcării sale.

33. Poziția unei particule care se mișcă de-a lungul axei x depinde de timp conform relației

$$x = \frac{v_{x0}}{k} (1 - e^{-kt})$$

în care v_{x0} și k sînt constante. (a) Să se reprezinte curba lui x în funcție de t . Observăm că $x=0$ la $t=0$ și că $x=v_{x0}/k$ la $t=\infty$, adică distanța totală pe care se mișcă particula este v_{x0}/k . (b) Să se arate că viteza v_x este dată de

$$v_x = v_{x0} e^{-kt}$$

astfel încît viteza descrește exponențial cu timpul de la valoarea sa inițială v_{x0} , anulîndu-se doar într-un timp infinit. (c) Să se arate că accelerația a_x este dată de

$$a_x = -kv_x$$

astfel încît accelerația este dirijată în sens opus vitezei și are o valoare proporțională cu viteza. (d) Această mișcare particulară este o mișcare cu accelerație variabilă. Să se găsească un argument fizic plauzibil care să explice cum de este nevoie de un timp infinit pentru ca particula să ajungă în repaus, parcurgînd o distanță finită.

Mișcarea într-un plan

4-1. Deplasarea, viteza și accelerația

În acest capitol revenim la studiul mișcării într-un plan (în două dimensiuni) luat pentru conveniență drept planul $x-y$. Figura 4-1 arată o particulă la momentul t mișcându-se de-a lungul unei traiectorii curbe în acest plan. *Poziția* sa sau deplasarea de la

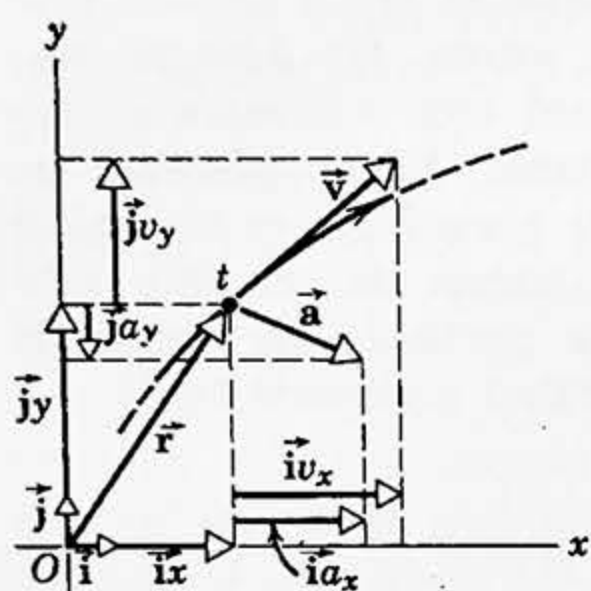


Figura 4-1. O particulă se mișcă de-a lungul unei traiectorii curbe în planul $x-y$. Poziția sa \vec{r} , viteza \vec{v} și accelerația \vec{a} sînt arătate la momentul t , împreună cu componentele vectoriale ale acestor vectori. Observăm că x , y , v_x , v_y și a_x sînt pozitive, iar a_y negativ. Faceți comparație cu figura 3-3.

origine este măsurată de vectorul \vec{r} ; *viteza* sa este dată de vectorul \vec{v} , care după cum am văzut în secțiunea 3-4, trebuie să fie tangent la traiectoria particulei. *Accelerația* este dată de vectorul \vec{a} ; direcția lui \vec{a} , după cum vom vedea mai explicit mai târziu, nu are vreo legătură unică cu traiectoria particulei ci depinde de rapiditatea cu care variază viteza \vec{v} în timp, în cursul mișcării particulei de-a lungul traiectoriei sale.

Vectorii \vec{r} , \vec{v} și \vec{a} sînt legați între ei (vezi ecuațiile 3-4, 3-5 și 3-10) și pot fi exprimați prin componentele lor, folosind versorii, astfel:

$$\vec{r} = i x + j y, \quad (4-1)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = i v_x + j v_y, \quad (4-2)$$

și

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y. \quad (4-3)$$

Aceste ecuații pot fi extinse ușor la trei dimensiuni adăugându-le termenii $\vec{k}z$, $\vec{k}v_z$ și respectiv $\vec{k}a_z$, în care \vec{k} este versorul în direcția z .

În capitolul 3 am considerat cazul particular în care particula se mișcă într-o singură dimensiune, să zicem de-a lungul axei x , în care vectorii \vec{r} , \vec{v} și \vec{a} erau dirijați de-a lungul acestei axe, fie în sensul pozitiv al axei, fie în sensul negativ. Componentele y , v_y și a_y erau zero și am descris mișcarea cu ajutorul ecuațiilor care leagă între ele mărimile scalare x , v_x și a_x . Sau, când particula se mișcă de-a lungul axei y , componentele x , v_x și a_x erau zero și mișcarea a fost descrisă cu ajutorul ecuațiilor care leagă între ele mărimile scalare, y , v_y și a_y . În acest capitol considerăm mișcarea în planul $x-y$, astfel încât, în general, ambele seturi de componente sînt diferite de zero.

4-2. Mișcarea într-un plan cu accelerație constantă

Să considerăm întâi cazul particular al mișcării într-un plan cu accelerație constantă. Aici, în timpul mișcării particulei, accelerația \vec{a} nu variază nici ca mărime nici ca direcție. Prin urmare componentele lui \vec{a} în oricare sistem particular de referință nu vor varia nici ele, adică $a_x = \text{const.}$ și $a_y = \text{const.}$ Avem atunci o situație ce poate fi descrisă ca o suprapunere a două mișcări componente care se produc simultan cu accelerație constantă de-a lungul fiecăreia din cele două direcții perpendiculare. Particula se va mișca în general de-a lungul unei traiectorii curbe în plan. Aceasta poate fi astfel chiar dacă o componentă a accelerației, de exemplu a_x , este zero, deoarece atunci componenta corespunzătoare a vitezei, v_x , poate avea o valoare constantă, nenulă. Un exemplu din această ultimă situație este mișcarea unui obuz de artilerie care urmează o traiectorie curbă într-un plan vertical și, neglijînd efectele rezistenței aerului, este supus unei accelerații constante \vec{g} dirijată în jos numai de-a lungul axei y .

Putem obține ecuațiile generale pentru mișcarea plană cu \vec{a} constant punînd pur și simplu

$$a_x = \text{const.} \quad \text{și} \quad a_y = \text{const.}$$

Ecuațiile pentru cazul accelerației constante, rezumate în tabela 3-1, se aplică atunci ambelor componente x și y ale vectorului de poziție \vec{r} , vectorului viteză \vec{v} și vectorului accelerație \vec{a} (vezi tabela 4-1).

Tabela 4-1

MIȘCAREA CU ACCELERAȚIE CONSTANTĂ ÎN PLANUL $x-y$

Nr. ecuației	Ecuațiile mișcării după axa x	Nr. ecuației	Ecuațiile mișcării după axa y
4-4, a	$v_x = v_{x_0} + a_x t$	4-4, a'	$v_y = v_{y_0} + a_y t$
4-4, b	$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x_0} + v_x) t$	4-4, b'	$y = y_0 + \frac{1}{2} (v_{y_0} + v_y) t$
4-4, c	$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	4-4, c'	$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
4-4, d	$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	4-4, d'	$v_y^2 = v_{y_0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

Cele două serii de ecuații din tabela 4-1 sînt legate între ele prin aceea că parametrul timp t este același pentru fiecare, deoarece t reprezintă timpul în care particula, mișcîndu-se pe o traiectorie curbă în planul $x-y$, ocupă o poziție descrisă de componentele vectorului de poziție, x și y .

Ecuațiile mișcării din tabela 4-1 pot fi exprimate și sub formă vectorială. De exemplu, substituind ecuațiile (4-4, a; 4-4, a') în ecuația (4-2) obținem

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y = \vec{i}(v_{x_0} + a_x t) + \vec{j}(v_{y_0} + a_y t) = (\vec{i}v_{x_0} + \vec{j}v_{y_0}) + (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y)t.$$

Prima cantitate din paranteze este vectorul viteză inițială \vec{v}_0 (vezi ecuația 4-2), iar a doua este vectorul accelerație (constantă) \vec{a} (vezi ecuația 4-3). În modul, această relație vectorială

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (4-5, a)$$

este echivalentă cu cele două relații scalare, ecuațiile (4-4, a, a') din tabela 4-1. Ea arată în mod simplu și compact faptul că viteza \vec{v} la momentul t este suma dintre viteza inițială \vec{v}_0 pe care ar avea o particulă în absența accelerației și variația (vectorială) a vitezei, $\vec{a}t$, cîștigată în timpul t cu accelerația constantă \vec{a} . În mod analog, ecuațiile scalare (4-4, c, c') sînt echivalente cu o singură ecuație vectorială

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2, \quad (4-5, b)$$

care de asemenea se poate interpreta ușor. Demonstrația acestei ecuații și a altor relații este propusă în problema 17.

4-3. Mișcarea unui proiectil

Un exemplu de mișcare curbilinie cu accelerație constantă este mișcarea unui proiectil. Aceasta este mișcarea bidimensională a unei particule aruncate oblic în aer. Mișcarea ideală a unei mingi de baschet, de

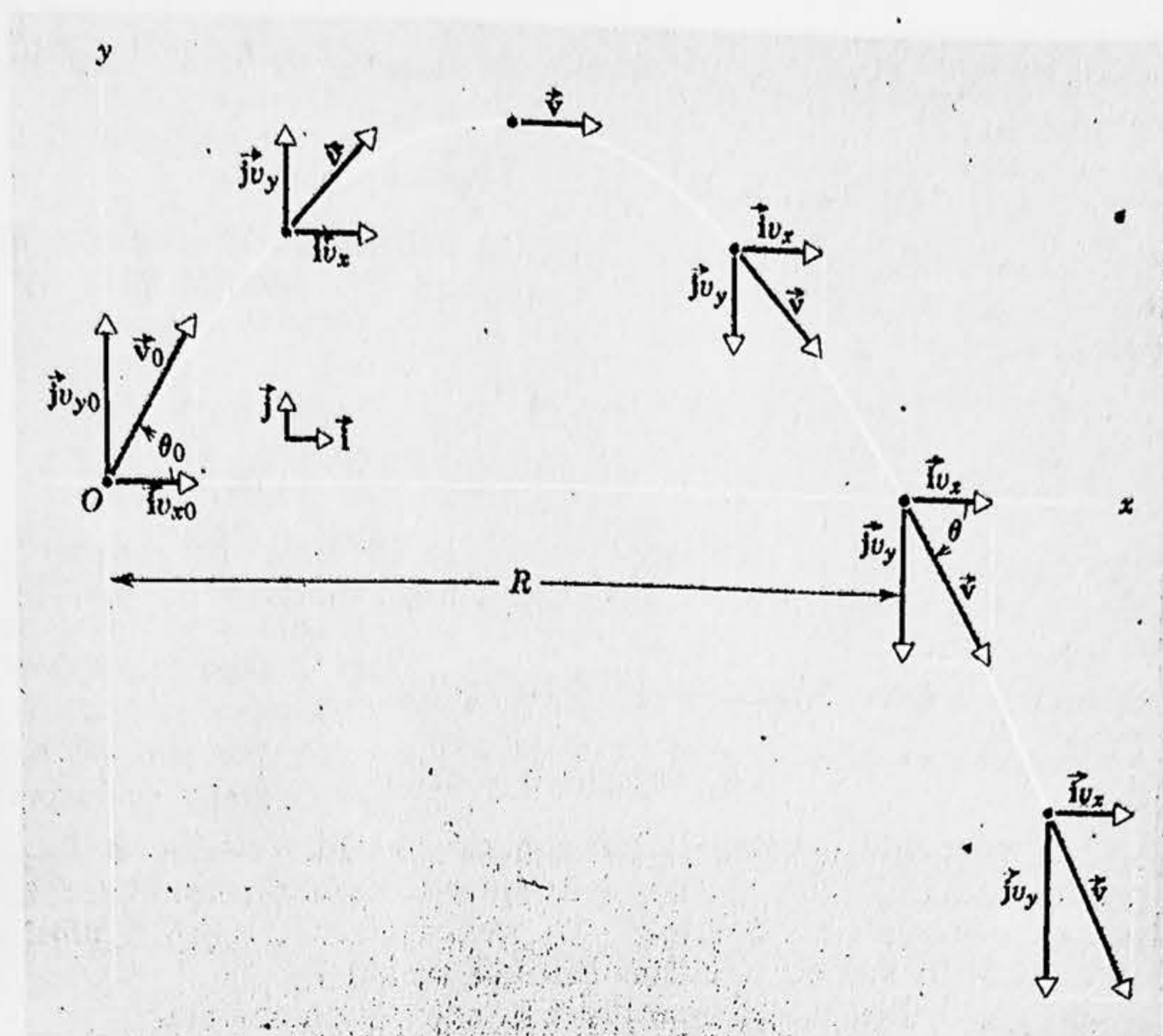


Figura 4-2. Traectoria unui proiectil, se observă viteza inițială \vec{v}_0 și componentele sale vectoriale, precum și viteza \vec{v} și componentele sale vectoriale la cinci momente succesive. Observăm că $v_x = v_{x0}$ în timpul zborului. Distanța R este bătaia (orizontală).

golf sau a unui glonț este un exemplu de mișcare a unui proiectil¹. Presupunem că efectul pe care l-ar avea aerul asupra mișcării lor poate fi neglijat.

Mișcarea unui proiectil este o mișcare cu accelerația constantă \vec{g} , dirijată în jos, și deci trebuie descrisă prin ecuațiile din tabela 4-1. Nu există nici o componentă orizontală a accelerației. Dacă alegem un sistem de referință cu sensul pozitiv al axei y vertical în sus, putem pune $a_y = -g$ și $a_x = 0$ în aceste ecuații.

Să alegem, mai departe, originea sistemului nostru de referință în punctul în care proiectilul își începe zborul (vezi fig. 4-2). Prin urmare, originea va fi de exemplu punctul în care mingea părăsește mâna aruncătorului sau combustibilul din rachetă este consumat. În tabela 4-1 această alegere a originii implică faptul că $x_0 = y_0 = 0$. Viteza la $t=0$, momentul când proiectilul își începe zborul, este v_0 și face un unghi θ_0

¹ Vezi Galileo Galilei, *Dialogul privind două științe noi*, „Ziua a patra”, pentru o discuție fascinantă a studiilor lui Galilei asupra proiectilelor.

cu direcția pozitivă a axei x . Componentele x și y ale lui \vec{v}_0 (vezi fig. 4-2) sînt atunci

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{și} \quad v_{y0} = v_0 \sin \theta_0.$$

Deoarece nu există nici o componentă orizontală a accelerației, componenta orizontală a vitezei va fi constantă. În ecuația (4-4, a) punem $a_x = 0$ și $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$, astfel încît

$$v_x = v_0 \cos \theta_0. \quad (4-6, a)$$

Componentă orizontală a vitezei își păstrează valoarea inițială în timpul zborului.

Componenta verticală a vitezei va varia în timp în concordanță cu mișcarea verticală cu accelerația constantă dirijată în jos. În ecuația (4-4, a') punem

$$a_y = -g \quad \text{și} \quad v_{y0} = v_0 \sin \theta_0,$$

astfel încît

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt. \quad (4-6, a')$$

Componenta verticală a vitezei este cea de la căderea liberă. În adevăr, dacă privim mișcarea din figura 4-2 dintr-un sistem de referință care se mișcă spre dreapta cu o viteză v_{x0} , mișcarea va fi cea a unui obiect aruncat vertical în sus cu o viteză inițială $v_0 \sin \theta_0$.

Modulul vectorului viteză resultant în orice moment este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4-7)$$

Unghiul θ pe care vectorul viteză îl face cu orizontala în acel moment este dat de

$$\operatorname{tg} \theta = v_y / v_x.$$

Vectorul viteză este tangent la traiectoria particulei în fiecare punct, așa cum se arată în figura 4-2.

Coordonata x a poziției particulei în fiecare moment, obținută din ecuația (4-4, c) cu $x_0 = 0$, $a_x = 0$ și $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$, este

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-6, c)$$

Coordonata y , obținută din ecuația (4-4, c') cu $y_0 = 0$, $a_y = -g$ și $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, este

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4-6, c')$$

Ecuațiile (4-6, c, c') ne dau pe x și y ca funcții de parametrul comun t — timpul de zbor. Combinîndu-le și eliminîndu-l pe t din ele, obținem

$$y = (\operatorname{tg} \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}x^2, \quad (4-8)$$

care leagă pe y de x și reprezintă ecuația traiectoriei proiectilului. Deoarece v_0 , θ_0 și g sînt constante, această ecuație are forma

$$y = lx - cx^2,$$

adică ecuația unei parabole. Prin urmare, traiectoria unui proiectil este parabolică.

Exemplul 1. Un bombardier zboară cu o viteză orizontală constantă de 1 296 km/h la o altitudine de 17,64 km către un punct situat direct deasupra țintei sale. Sub ce unghi de vedere Φ trebuie să lase să cadă o bombă pentru a lovi ținta (fig. 4-3)?

Alegem un sistem de referință fix față de pământ cu originea O în punctul de lansare a bombei. Mișcarea bombei în momentul lansării este

aceeași ca o bombardierului. Prin urmare viteza inițială a proiectului \vec{v}_0 este orizontală și mărimea ei este de 1 296 km/h sau 360 m/s. Unghiul θ_0 este zero.

Timpul de cădere se obține din ecuația (4-6, c'). Cu $\theta_0=0$ și $y=-17,64$ km, aceasta dă

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-17\,640)\text{ m}}{9,8\text{ m/s}^2}} = 60\text{ s} = 1,0\text{ min.}$$

Observăm că timpul de cădere al bombei nu depinde de viteza avionului în cazul aruncării *orizontale*. (Vezi însă problema 10.)

Distanța orizontală parcursă de bombă în acest timp este dată de ecuația (4-6, c), $x=(v_0 \cos \theta_0) t$ sau $x=(360\text{ m/s}) \cdot 60\text{ s}=21\,600\text{ m}=21,6\text{ km}$, astfel încât unghiul de vedere (fig. 4-4) trebuie să fie

$$\Phi = \arctg \frac{x}{|y|} = \arctg \frac{21,6}{17,64} = 51^\circ.$$

Va apărea mișcarea bombei pe o parabolă dacă este văzută dintr-un sistem de referință fix față de bombardier?

Exemplul 2. Un jucător de fotbal lovește o minge sub un unghi de 37° față de orizontală, cu o viteză inițială de 19,6 m/s. (Un triunghi dreptunghic la care unul din unghiuri este de 37° , are laturile în raportul 3:4:5 sau 6:8:10.) Presupunând că mingea se mișcă într-un plan vertical:

(a) Să se afle timpul t_1 după care mingea atinge punctul cel mai înalt al traiectoriei sale. În punctul cel mai înalt componenta verticală a vitezei v_y este zero. Rezolvînd ecuația (4-6, a') în raport cu t , obținem

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0 - v_y}{g}$$

Cu

$$v_y=0, \quad v_0=19,6\text{ m/s}, \quad \theta_0=37^\circ, \quad g=9,8\text{ m/s}^2$$

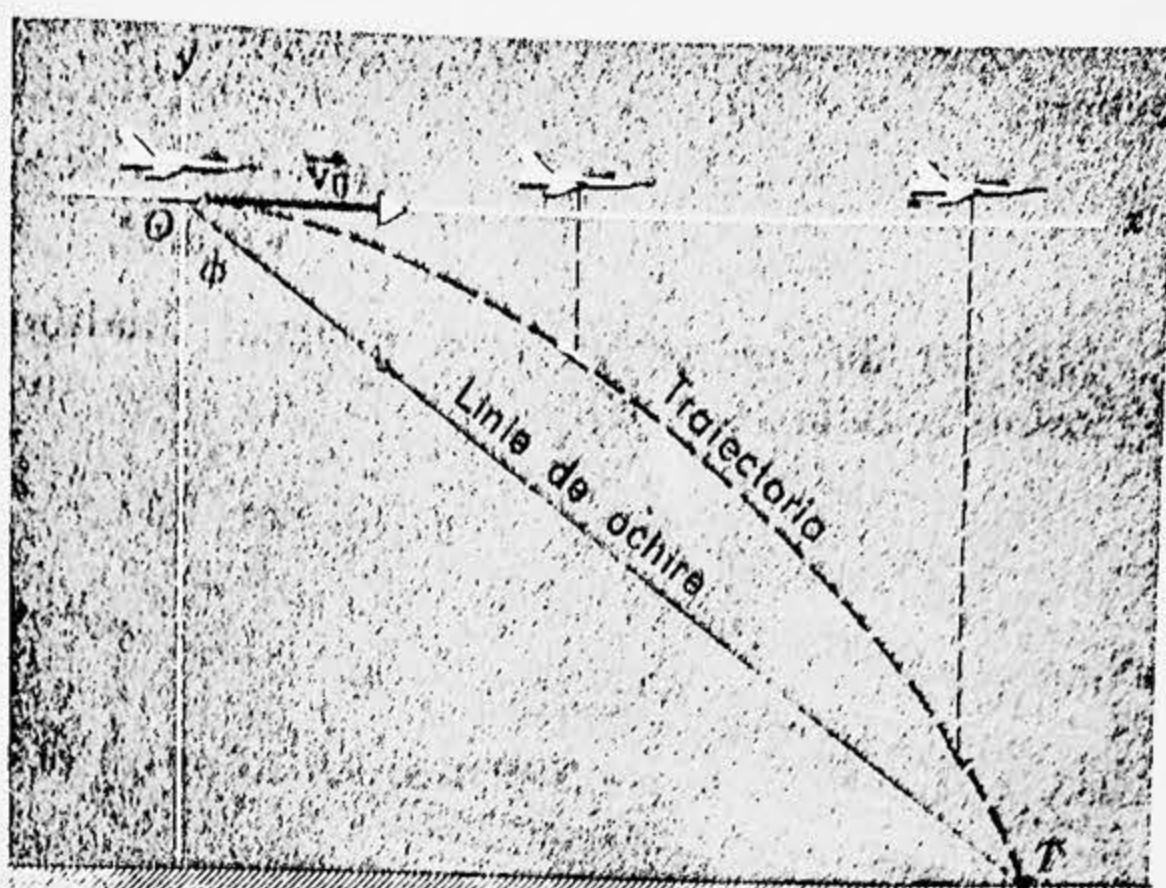


Figura 4-3. Exemplul 1. O bombă este lăsată să cadă dintr-un avion care se mișcă cu viteza orizontală \vec{v}_0 .

avem:

$$t_1 = \frac{(19,6 \cdot 0,6 - 0) \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,2 \text{ s.}$$

(b) Cît de sus se va urca mîngea? Înălțimea maximă se obține la $t=1,2 \text{ s}$. Folosind ecuația (4—6, c'),

$$y = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

avem

$$y_{\max} = (19,6 \text{ m/s}) \cdot 0,6 \cdot 1,2 \text{ s} - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot (1,2)^2 \text{ s}^2 = 9,8 \text{ m.}$$

(c) Care este deplasarea orizontală a mingii și cît timp se află ea în aer?

Distanța orizontală de la punctul de plecare pînă la punctul în care mîngea revine la înălțimea originală (nivelul pămîntului) este bătaia R . Punem $y=0$ în ecuația (4—6, c') și găsim timpul t_2 necesar pentru a traversa această bătaie. Obținem:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2 \cdot (19,6 \text{ m/s}) \cdot 0,6}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2,4 \text{ s.}$$

Observăm că $t_2=2t_1$. Aceasta corespunde faptului că timpul necesar mingii să urce (să atingă înălțimea maximă față de sol) este același cu timpul necesar mingii să cadă (să atingă pămîntul venind de la înălțimea maximă).

Bătaia R poate fi atunci obținută introducînd această valoare t_2 pentru t în ecuația (4—6, c). Obținem din $x=(v_0 \cos \theta_0)t$,

$$R = (v_0 \cos \theta_0) t_2 = (19,6 \text{ m/s}) \cdot 0,8 \cdot 2,4 \text{ s} = 37,63 \text{ m.}$$

(d) Care este viteza mingii în momentul cînd lovește pămîntul? Din ecuația (4—6, a) obținem

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (19,6 \text{ m/s}) \cdot 0,8 = 15,68 \text{ m/s.}$$

Din ecuația (4—6, a') obținem pentru $t=t_2=2,4 \text{ s}$,

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \theta_0 - g t = (19,6 \text{ m/s}) \cdot 0,6 - \\ &- (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot 2,4 \text{ s} = -11,76 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Prin urmare, din ecuația (4-7),

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15,68 \text{ m/s})^2 + (-11,76 \text{ m/s})^2} = 19,6 \text{ m/s}^2$$

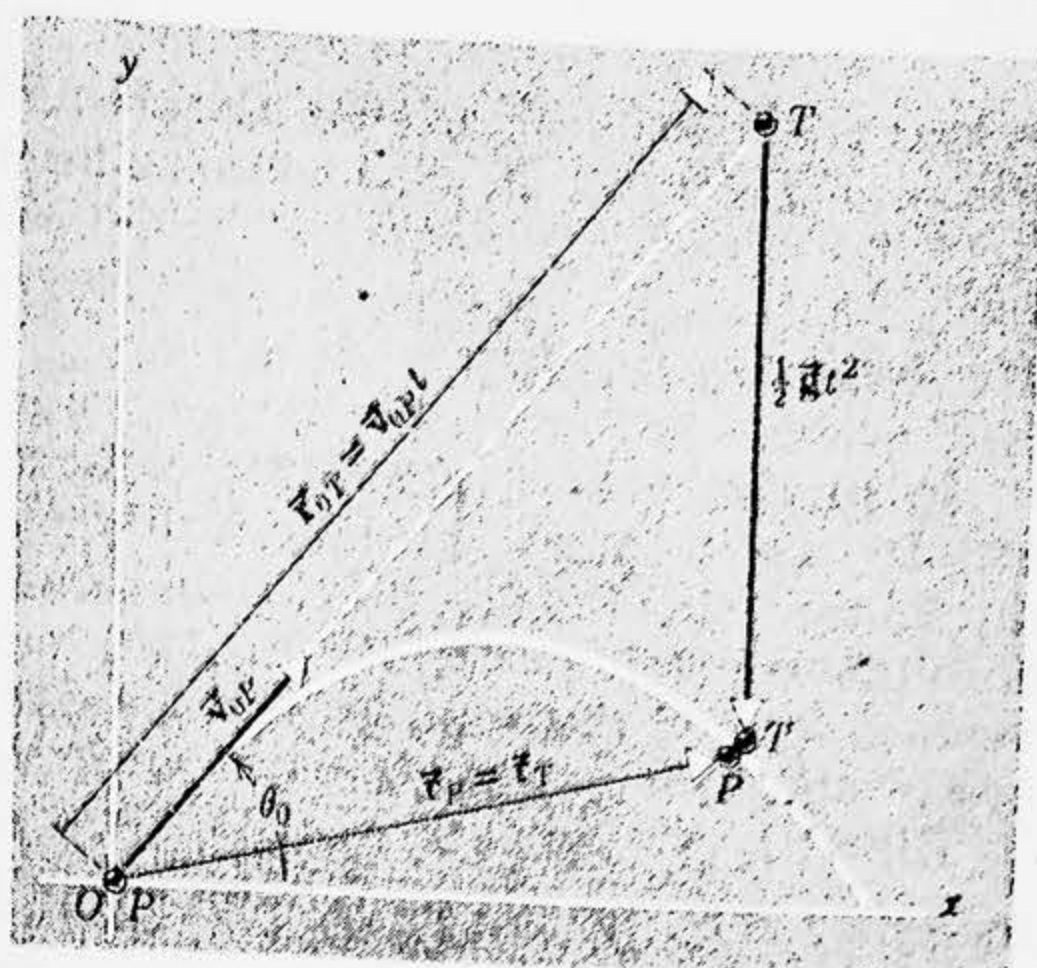
și

$$\operatorname{tg} \theta = v_y / v_x = -\frac{11,76}{15,68} = -\frac{3}{4},$$

astfel încît $\theta = -37^\circ$ sau $+37^\circ$ în sens orar de la axa x . Observăm că $\theta = -\theta_0$ așa cum ne-am așteptat în virtutea simetriei (fig. 4-2).

Exemplul 3. Într-o demonstrație de curs preferată o pușcă este orientată către o țintă situată la înălțime, țintă lăsată să cadă liber cu ajutorul unui mecanism

Figura 4-4. Exemplul 3. În mișcarea unui proiectil, deplasarea sa de la origină în fiecare moment t poate fi privită ca suma a doi vectori: $\vec{v}_{0P}t$ dirijat de-a lungul lui \vec{v}_{0P} și $\frac{gt^2}{2}$, dirijat în jos.



în momentul când glontează părăsește gura armei. Indiferent de viteza inițială a glontelui, el va lovi totdeauna ținta în cădere.

Calea cea mai simplă de a înțelege aceasta este următoarea. Dacă n-ar exista nici o accelerație datorită gravitației, ținta n-ar cădea și glontează s-ar mișca de-a lungul liniei de ochire direct către țintă (fig. 4-4). Efectul gravitației este de a accelera fiecare corp în jos, cu aceeași accelerație, de la poziția pe care altfel ar fi avut-o. Prin urmare, în timpul t , glontează va cădea pe distanța $\frac{1}{2}gt^2$ față de poziția pe care ar fi avut-o de-a lungul liniei de ochire, iar ținta va cădea pe aceeași distanță măsurată de la punctul ei de plecare. Atunci când glontează atinge linia de cădere a țintei, el se va găsi cu aceeași distanță sub poziția inițială a țintei ca și ținta și deci se va produce ciocnirea. Dacă glontează se mișcă mai repede decât este arătat în figură (v_0 mai mare), el ar avea o bătaie mai mare și ar intersecta linia de cădere într-un punct mai înalt; și deoarece glontează ajunge acolo mai devreme, ținta va cădea pe o distanță respectiv mai mică în același timp și se va ciocni de el. Un argument analog este valabil pentru viteze mai mici.

Pentru o analiză echivalentă, să folosim ecuația (4-5, b)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

pentru a descrie pozițiile proiectilului și țintei în fiecare moment t . Pentru proiectilul P, $\vec{r}_0 = 0$ și $\vec{a} = \vec{g}$ și avem

$$\vec{r}_P = \vec{v}_{0P} t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

Pentru ținta T, $\vec{r}_0 = \vec{r}_{0T}$, $\vec{v}_0 = 0$ și $\vec{a} = \vec{g}$, ceea ce dă

$$\vec{r}_T = \vec{r}_{0T} + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

Dacă are loc ciocnirea, trebuie să avem $\vec{r}_P = \vec{r}_T$. Analiza arată că aceasta se va produce întotdeauna la un unghi dat de $\vec{r}_{0T} = \vec{v}_{0P} t$, adică la momentul $t(-\vec{r}_{0T}/\vec{v}_{0P})$

necesar proiectilului să parcurgă distanța pînă la țintă de-a lungul liniei de ochire, presupunînd că viteza sa inițială rămîne neschimbată.

4-4. Mișcarea circulară uniformă

În secțiunea 3—6 am văzut că accelerația provine din variația vitezei. În cazul simplu al căderii libere viteza variază numai în mod și nu în direcție. Pentru o particulă care se mișcă pe un cerc cu viteză absolută constantă, numită mișcare circulară uniformă, vectorul viteză variază în mod continuu ca direcție dar nu ca mărime. Vrem să obținem accelerația în mișcarea circulară uniformă.

Situația este arătată în figura 4-5, a. Fie P poziția particulei la momentul t și P' poziția sa la momentul $t + \Delta t$. Viteza în P este \vec{v} — un vector tangent la curbă în P . Viteza în P' este \vec{v}' — un vector tangent la curbă în P' . Vectorii \vec{v} și \vec{v}' sînt egali în modul deoarece viteza absolută este constantă, însă direcțiile lor sînt diferite. Lungimea drumului parcurs în timpul Δt este lungimea arcului PP' care este egală cu $v\Delta t$, v fiind viteza absolută constantă.

Să redesenăm acum vectorii \vec{v} și \vec{v}' , ca în figura 4-5, b, astfel încît originile lor să fie în același punct. Sîntem liberi să facem aceasta atîta timp cît modulul și direcția fiecărui vector sînt aceleași ca în figura 4-5, a. Această diagramă (figura 4-5, b) ne permite să vedem clar variația vitezei în timpul mișcării particulei de la P la P' . Această variație, $\vec{v}' - \vec{v} = \Delta\vec{v}$, este egală cu vectorul ce trebuie adăugat lui \vec{v} pentru a obține pe \vec{v}' . Observăm că el este dirijat spre interior aproximativ spre centrul cercului.

Triunghiul OQQ' format de \vec{v} , \vec{v}' și $\Delta\vec{v}$ este însă asemenea cu triunghiul CPP' format de coarda PP' și razele CP și CP' . Aceasta deoarece ambele triunghiuri sînt isoscele avînd același unghi la vîrf; unghiul θ dintre \vec{v} și \vec{v}' , este același ca și unghiul PCP' deoarece \vec{v} este perpendicular pe CP , iar \vec{v}' este perpendicular pe CP' . Putem deci scrie

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{v\Delta t}{r}, \text{ aproximativ,}$$

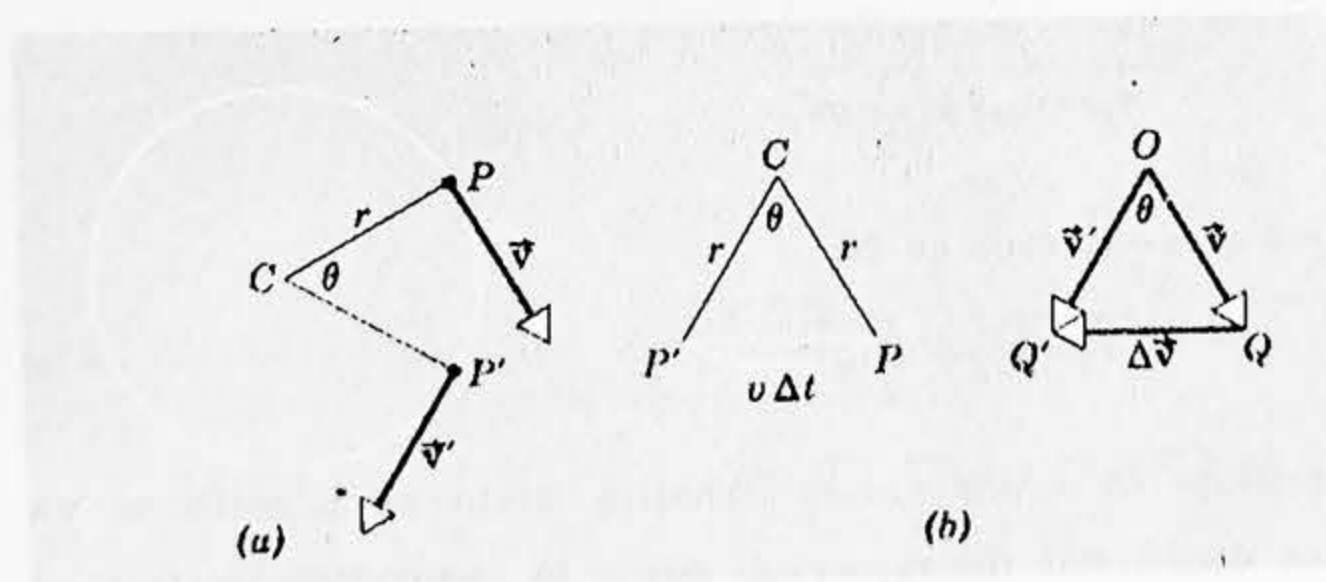


Figura 4-5. Mișcarea circulară uniformă. Particula se mișcă pe un cerc cu viteză absolută constantă. Se arată viteza particulei în două puncte P și P' . Variația vitezei în timpul mișcării de la P la P' este $\Delta\vec{v}$.

coarda PP' fiind luată egală cu lungimea arcului PP' . Această relație devine din ce în ce mai exactă pe măsură ce Δt se micșorează, deoarece coarda și arcul tind atunci unul către celălalt. Observăm de asemenea că $\Delta \vec{v}$ tinde tot mai mult către o direcție perpendiculară pe \vec{v} sau \vec{v}' atunci când Δt tinde către zero și deci tinde din ce în ce mai bine către o direcție îndreptată exact către centrul cercului. Din această relație rezultă că

$$\left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v^2}{r}, \text{ aproximativ,}$$

și la limită când $\Delta t \rightarrow 0$, această expresie devine exactă. Obținem astfel

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v^2}{r} \quad (4-9)$$

pentru modulul accelerației. Direcția lui \vec{a} în fiecare moment este de-a lungul razei, către centrul cercului.

Figura 4-6 arată relația momentană între \vec{v} și \vec{a} în diferite puncte ale mișcării. Modulul lui \vec{v} este constant, însă direcția sa variază în mod continuu. Aceasta dă naștere la o accelerație \vec{a} care este de asemenea constantă în modul (dar nu zero), dar variază în mod continuu ca direcție. Viteza \vec{v} este totdeauna tangentă la cerc în sensul mișcării; accelerația \vec{a} este totdeauna dirijată radial spre interior. Din această cauză \vec{a} se numește accelerație *radială* sau *centripetă*. *Centripet* înseamnă „orientat spre centru“.

Atât în căderea liberă cât și în mișcarea proiectilului accelerația \vec{a} este constantă ca direcție și modul și putem folosi ecuațiile stabilite pentru cazul accelerației constante (vezi tabela 4-1). Nu putem folosi aceste ecuații pentru cazul mișcării circulare uniforme deoarece accelerația \vec{a} variază ca direcție și deci nu este constantă.

Unitățile pentru accelerația centripetă sînt aceleași ca și cele pentru accelerația care rezultă dintr-o variație a modulului vitezei. Ca dimensiuni, avem

$$\frac{v^2}{r} = \left(\frac{\text{lungime}}{\text{timp}} \right)^2 / \text{lungime} = \frac{\text{lungime}}{\text{timp}^2} \text{ sau } \frac{L}{T^2},$$

care sînt dimensiunile accelerației. Unitatea poate fi deci m/s^2 sau alta.

Accelerația care rezultă dintr-o variație a direcției vitezei este tot atât de reală și tot atât de mare ca accelerația în celălalt sens, care apare dintr-o va-

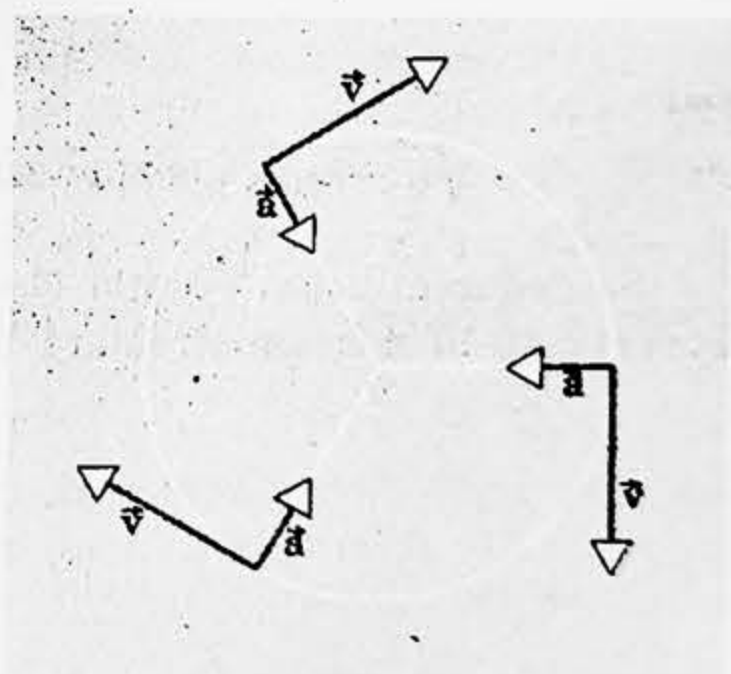


Figura 4-6. În mișcarea circulară uniformă accelerația \vec{a} este totdeauna îndreptată spre centrul cercului și deci este perpendiculară pe \vec{v} .

riație a modului vitezei. Prin definiție, accelerația este rapiditatea de variație a vitezei, iar viteza fiind un vector, poate varia atât ca direcție cât și ca modul. Dacă o mărime vectorială este un vector, aspectul său direcțional nu poate fi ignorat, deoarece efectele lui pot fi tot atât de importante și reale ca și cele produse de o variație a modului.

Este important de subliniat în acest punct faptul că mișcarea nu trebuie să fie neapărat în direcția accelerației și că nu există o relație fixă în general între direcțiile lui \vec{a} și \vec{v} . În figura 4-7 dăm exemple în care unghiul dintre \vec{v} și \vec{a} variază de la 0 la 180°. Numai într-un singur caz $\theta = 0^\circ$, mișcarea este în direcția lui \vec{a} .

Exemplul 4. Luna se rotește în jurul Pământului făcând o revoluție completă în 27,3 zile. Să presupunem că orbita este circulară și are o rază de 385 000 km (—239 000 mîle). Care este valoarea accelerației Lunii către Pământ?

Avem $r = 3,85 \cdot 10^8$ m. Timpul unei revoluții, numit perioadă este $T = 27,3$ zile — $2,36 \cdot 10^6$ s. Viteza Lunii (presupusă constantă în modul) este deci

$$v = 2\pi r / T = 1\,020 \text{ m/s.}$$

Accelerația centripetă este

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1\,020 \text{ m/s})^2}{3,85 \cdot 10^8 \text{ m}} = 0,00273 \text{ m/s}^2 \text{ sau doar } 2,78 \cdot 10^{-4} g.$$

Exemplul 5. Să se calculeze viteza unui satelit artificial al Pământului presupunînd că el se mișcă la o altitudine h de 225 km deasupra suprafeței Pământului, unde $g = 9,15 \text{ m/s}^2$. Raza Pământului $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Ca orice obiect liber în vecinătatea suprafeței Pământului, satelitul are o accelerație g dirijată spre centrul Pământului. Ea este accelerația care obligă satelitul să urmeze o traiectorie circulară. Prin urmare, accelerația centripetă este g și din ecuația (4-9), $a = v^2/r$, avem

$$g = v^2 / (R + h),$$

sau

$$v = \sqrt{(R + h)g} = \sqrt{(6\,370 + 225) \cdot 10^3 \text{ m} (9,15 \text{ m/s}^2)} = 7,78 \text{ km/s} = 28 \cdot 10^3 \text{ km/h.}$$

Să deducem acum ecuația (4-9) folosind metodele vectoriale. Figura 4-8, *a* arată o particulă în mișcare circulară uniformă în jurul originii O a sistemului de refe-

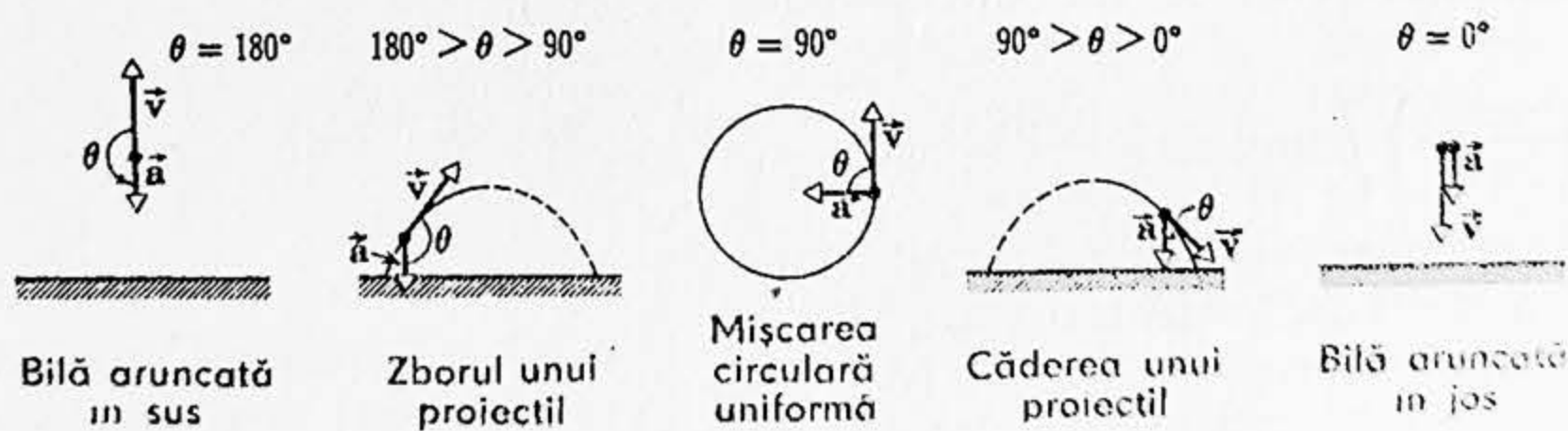
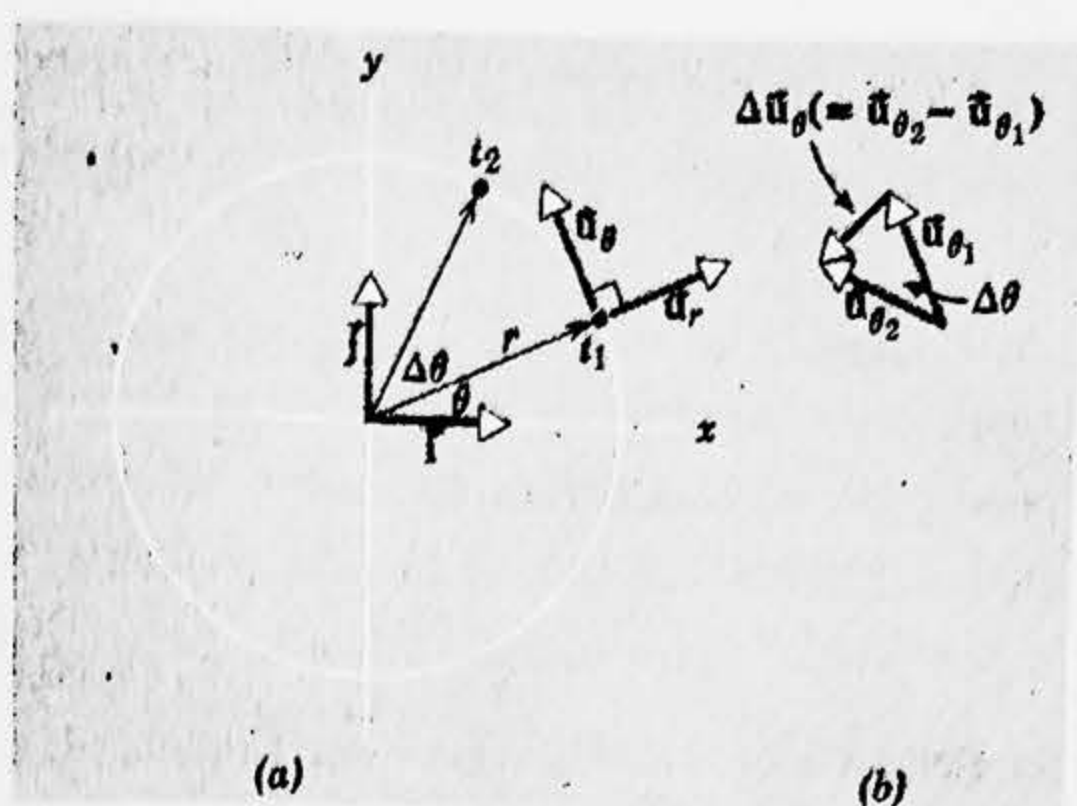


Figura 4-7.

Figura 4-8. (a) O particulă care se mișcă în sens trigonometric pe un cerc de rază r . (b) Versorii \vec{u}_{θ_1} și \vec{u}_{θ_2} la momentul t_1 și respectiv t_2 și variația $\Delta \vec{u}_{\theta} (= \vec{u}_{\theta_2} - \vec{u}_{\theta_1})$.



rință. Pentru această mișcare coordonatele polare r, θ sînt mai folosite decît coordonatele rectangulare x, y deoarece r rămîne constant în timpul mișcării, iar θ crește într-un mod simplu, liniar, cu timpul; variația lui x și y în timpul unei astfel de mișcări este mai complexă. Cele două seturi de coordonate sînt legate prin

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{și} \quad \theta = \arctg y/x \quad (4-10, a)$$

sau prin relațiile inverse

$$x = r \cos \theta \quad \text{și} \quad y = r \sin \theta. \quad (4-10, b)$$

În sistemele de referință rectangulare am folosit versorii \vec{i} și \vec{j} pentru a descrie mișcarea în planul $x-y$. Aici este mai convenabil să introducem doi versori noi \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} . Acești versori, la fel ca \vec{i} și \vec{j} , au o lungime egală cu unitatea și sînt adimensionali; ei desemnează numai direcția.

Versorul \vec{u}_r este orientat în fiecare punct în direcția creșterii lui r în acel punct; el este dirijat radial, de la origină spre exterior. Versorul \vec{u}_{θ} în fiecare punct este orientat în direcția creșterii lui θ în acel punct; el este totdeauna tangent la cercul care trece prin acel punct în sensul antiorar. După cum arată fig. 4-8, a, \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} formează un unghi drept între ei. Versorii \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} diferă de versorii \vec{i} și \vec{j} prin faptul că direcțiile lui \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} variază de la punct la punct în plan; versorii \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} nu sînt deci vectori constanți.

Cu ajutorul lui \vec{u}_r și \vec{u}_{θ} mișcarea unei particule care se mișcă, în sens trigonometric cu viteza absolută constantă v , pe un cerc în jurul originii ca în figura 4-8, a, poate fi descrisă cu ajutorul ecuației vectoriale

$$\vec{v} = \vec{u}_{\theta} v. \quad (4-11)$$

Această relație ne arată, corect, că direcția lui \vec{v} (care este aceeași cu direcția lui \vec{u}_{θ}) este tangentă la cerc și că modulul lui \vec{v} este o cantitate constantă v (deoarece modulul lui \vec{u}_{θ} este unu).

Pentru a găsi accelerație combinăm ecuațiile (4-3) și (4-11) ceea ce dă

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v. \quad (4-12)$$

Observăm că v din ecuația (4-11) este o constantă, în timp ce \vec{u}_θ nu este constant, deoarece direcția sa variază în timpul mișcării particulei. Pentru a calcula pe $d\vec{u}_\theta/dt$, să considerăm figura 4-8, b, care arată versorii \vec{u}_{θ_1} și \vec{u}_{θ_2} corespunzător timpului scurs $\Delta t (= t_2 - t_1)$ pentru particula mobilă. Vectorul $\Delta\vec{u}_\theta (\vec{u}_{\theta_2} - \vec{u}_{\theta_1})$ este dirijat radial către origină în cazul limită cînd $\Delta t \rightarrow 0$. Cu alte cuvinte, $d\vec{u}_\theta$ are în fiecare punct direcția lui $-\vec{u}_r$. Unghiul dintre \vec{u}_{θ_1} și \vec{u}_{θ_2} în figură este $\Delta\theta$, egal cu unghiul măsurat de raza vectoare dusă din origină spre particulă în timpul Δt . Mărimea lui $\Delta\vec{u}_\theta$ este pur și simplu $\Delta\theta$; să nu uităm că vectorii \vec{u}_{θ_1} și \vec{u}_{θ_2} din figura 4-8, b, au modulul 1. Astfel

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt}$$

și din ecuația (4-12)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt} v. \quad (4-13)$$

Dar $d\theta/dt$ este viteza unghiulară de rotație uniformă a particulei și este dată de

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi \text{ radiani}}{\text{timpul unei revoluții}} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}.$$

Introducînd aceasta în ecuația (4-13) obținem în final

$$\vec{a} = -\vec{u}_r \frac{v^2}{r} \quad (4-14)$$

care ne spune că accelerația într-o mișcare circulară uniformă are modulul v^2/r (vezi ecuația 4-6) și este dirijată radial spre interior (observați factorul $-\vec{u}_r$). Relația vectorială (4-14) ne dă atît modulul cît și direcția accelerației centripete \vec{a} . Observați că, după cum era de așteptat, \vec{a} are modul constant dar variază continuu ca direcție.

4-5. Accelerația tangențială în mișcarea circulară

Să considerăm acum cazul mai general al mișcării circulare în care viteza absolută v a particulei mobile nu este constantă. Vom folosi metodele vectoriale în coordonate polare.

Că și mai înainte, viteza este dată de ecuația (4-11) sau

$$\vec{v} = \vec{u}_\theta v$$

cu excepția faptului că, în acest caz, nu numai \vec{u}_0 ci și v variază în timp. Reamintindu-ne formula derivatei unui produs, obținem pentru accelerație

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_0 \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{u}_0}{dt} \quad (4-15)$$

În ecuația (4-12) primul termen din ultima ecuație nu exista deoarece v fiind acolo presupus constant, dv/dt era zero. Ultimul termen din ecuația (4-15) se reduce, după cum am văzut în ultima secțiune, la $-\vec{u} v^2/r$. Putem scrie acum ecuația (4-15) astfel:

$$\vec{a} = \vec{u}_0 a_T - \vec{u} a_R, \quad (4-16)$$

în care $a_T = dv/dt$ și $a_R = v^2/r$. Primul termen, $\vec{u}_0 a_T$, este componenta vectorială a lui \vec{a} tangentă la traiectoria particulei și provine din variația modului vitezei în mișcarea circulară (vezi figura 4-9). Acest termen și a_T se numesc *accelerația tangențială*. Termenul al doilea $-\vec{u} a_R$ este componenta vectorială a lui \vec{a} dirijată radial spre centrul cercului și provine din variația direcției vectorului viteză în mișcare circulară (vezi figura 4-9). Acest termen și a_R se numesc *accelerația centripetă*. Modulul accelerației instantanee este

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \quad (4-17)$$

Dacă modulul vitezei este constant, rezultă $a_T = dv/dt = 0$ și ecuația (4-16) se reduce la ecuația (4-14). Dacă viteza absolută v nu este constantă, a_T nu este nul și a_R variază de la punct la punct. Dacă viteza absolută variază neuniform, a_T va varia de asemenea de la punct la punct.

Figura 4-9. Într-o mișcare circulară neuniformă modulul vitezei este variabil. Variația

vitezei $\Delta \vec{v}$ în timpul deplasării de la P la P' se compune din două părți: $\Delta \vec{v}_R$ datorită variației direcției lui \vec{v} și $\Delta \vec{v}_T$ datorită variației modului lui \vec{v} . La limită când $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{v}_R$ este îndreptat către centrul C al cercului, iar $\Delta \vec{v}_T$ este tangent la traiectoria circulară.

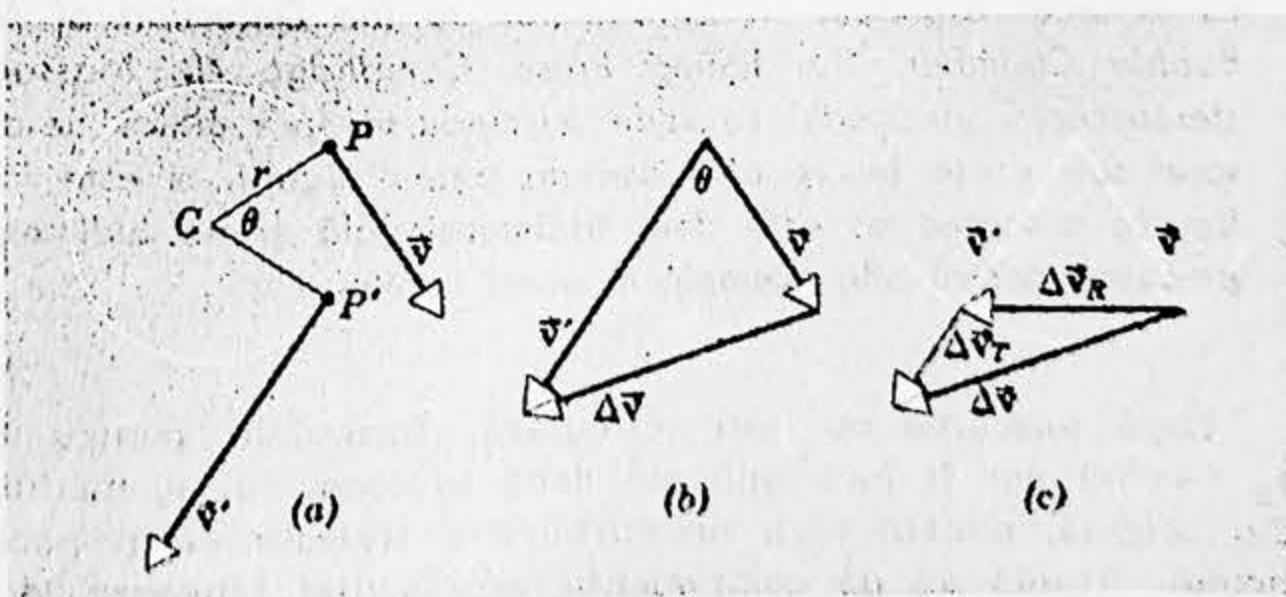




Figura 4-10. O urmă de 25,4 cm lăsată, într-o cameră cu bule umplută cu hidrogen lichid, de către un electron energetic care se mișcă pe o spirală. (Prin amabilitatea lui Lawrence Radiation Laboratory.) Această fotografie este una dintre fotografiile colecției pregătită pentru examinare stereoscopică și este publicată cu material explicativ în *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber*, The Ealing Press, Cambridge 40, Massachusetts (1964). Privit stereoscopic, electronul se vede mișcându-se spre cititor de-a lungul spiralei. Vectorul său viteză nu se află deci în planul figurii, ci este înclinat în sus față de figură; mișcarea sa este deci tridimensională și nu bidimensională așa cum am presupus pentru alte exemple în acest capitol.

Dacă mișcarea nu este circulară, formulele pentru a_T ($-dv/dt$) și pentru a_R ($-v^2/r$) pot fi încă aplicate dacă în locul lui r , modulul razei vectoriale duse din origină, punem raza de curbură a traiectoriei în poziția instantanee a particulei. Atunci a_T dă componenta accelerației tangentă la curbă în acea poziție,

Iar a_R dă componenta accelerației normale la curbă în acea poziție. Figura 4-10 arată urma lăsată într-o cameră cu bure, umplută cu hidrogen lichid, de un electron energetic care descrie o spirală spre interior. Electronul pierde energie pe măsură ce traversează lichidul din cameră, astfel încât viteza sa se micșorează continuu. În modul acesta, există în fiecare punct o accelerație tangențială a_T dată de dv/dt . Accelerația centripetă a_R în fiecare punct este dată de v^2/r , unde r este raza de curbura a traiectoriei în punctul considerat; atât v cât și r devin tot mai mici pe măsură ce particula pierde energie. Forța care obligă electronul să descrie spirala este dată de câmpul magnetic prezent în camera cu bure, dirijat perpendicular pe planul figurii 4-10 (vezi cap. 33).

4-6. Viteza relativă și accelerația

În secțiunile precedente am considerat adunarea vitezelor într-un sistem de referință particular. Să considerăm acum relația dintre viteza unui obiect, determinată de un observator S (=sistemul de referință S) și viteza aceluiasi obiect, determinată de un alt observator S' (=sistemul de referință S'), care se mișcă față de primul.

Să considerăm că observatorul S este fixat de pământ, astfel încât sistemul său de referință este pământul. Celălalt observator S' se mișcă pe pământ — de exemplu un pasager aflat într-un tren mobil — astfel încât sistemul său de referință este trenul. Fiecare din ei urmărește mișcarea aceluiasi obiect, de exemplu, un automobil pe o șosea sau un om plimbându-se prin tren. Fiecare observator va înregistra o deplasare, o viteză și o accelerație pentru obiectul său, măsurate *relativ la reperul său*. Cum se compară între ele aceste măsurători? În această secțiune vom considera numai cazul în care reperul al doilea se mișcă față de primul cu o viteză constantă u .

În figura 4-11 reperul S reprezentat de axele x și y poate fi privit ca fixat de pământ. Regiunea umbrită indică un alt reper S' , reprezentat de axele x' și y' , care se mișcă de-a lungul axei x cu o viteză constantă u măsurată în reperul S ; acesta poate fi privit ca legat de podeaua vagonului.

Inițial, o particulă (de exemplu o bilă pe platforma vagonului) se află într-o poziție notată A în reperul S și notată A' în reperul S' . După un timp t vagonul și reperul său S' s-au deplasat cu o distanță ut spre dreapta, iar particula s-a mișcat către B . Deplasarea particulei

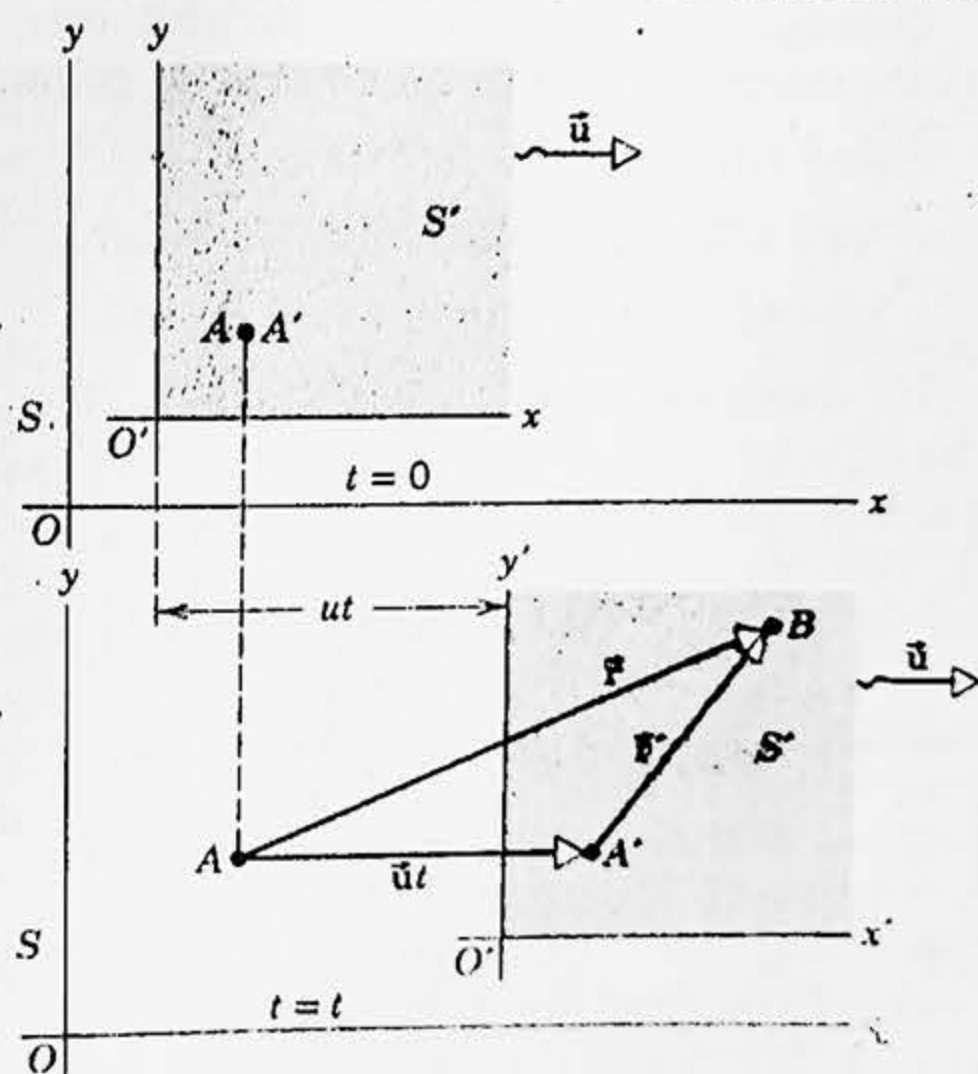


Figura 4-11. Două sisteme de referință S ($=x, y$) și S' ($=x', y'$); S' se mișcă spre dreapta față de S cu viteză u .

de la poziția sa inițială în reperul S este vectorul \vec{r} de la A la B . Deplasarea particulei din poziția sa inițială în reperul S' este vectorul \vec{r}' de la A' la B . Aceștia sînt vectori diferiți deoarece punctul de referință A' al reperului mobil s-a deplasat cu distanța ut de-a lungul axei x în timpul mișcării. Din figură vedem că \vec{r} este vectorul sumă al lui \vec{r}' și \vec{ut} :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{ut}. \quad (4-18)$$

Derivînd ecuația (4-18) obținem

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}.$$

Dar $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ este viteza instantanee măsurată în reperul S și $d\vec{r}'/dt = \vec{v}'$ este viteza instantanee a aceleiași particule măsurată în reperul S' , astfel încît

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (4-19)$$

Prin urmare viteza particulei relativ la reperul S , \vec{v} , este suma vectorială dintre viteza particulei relativ la reperul S' , \vec{v}' , și viteza \vec{u} a reperului S' relativ la reperul S .

Exemplul 6. (a) Busola unui aeroplan arată că acesta se îndreaptă către est. Informația de la sol arată prezența unui vînt care suflă către nord. Să se arate pe o diagramă viteza aeroplanului față de sol.

Obiectul este aeroplanul. Pămîntul este unul din repere (S), iar aerul este celălalt reper (S') care se mișcă față de primul. Atunci

\vec{u} este viteza aerului față de sol.

\vec{v}' este viteza aeroplanului față de aer.

\vec{v} este viteza aeroplanului față de sol.

În acest caz \vec{u} este dirijat către nord, iar \vec{v}' către est. Atunci relația $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ determină viteza aeroplanului față de pămînt așa cum este arătat în figura 4-12, a.

Unghiul α este unghiul dintre direcția de deplasare a aeroplanului (la N de E) față de pămînt și este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = u/v'.$$

Viteza aeroplanului față de pămînt este dată de

$$v = \sqrt{(v')^2 + u^2}.$$

De exemplu, dacă indicatorul vitezei aerului arată că aeroplanul se

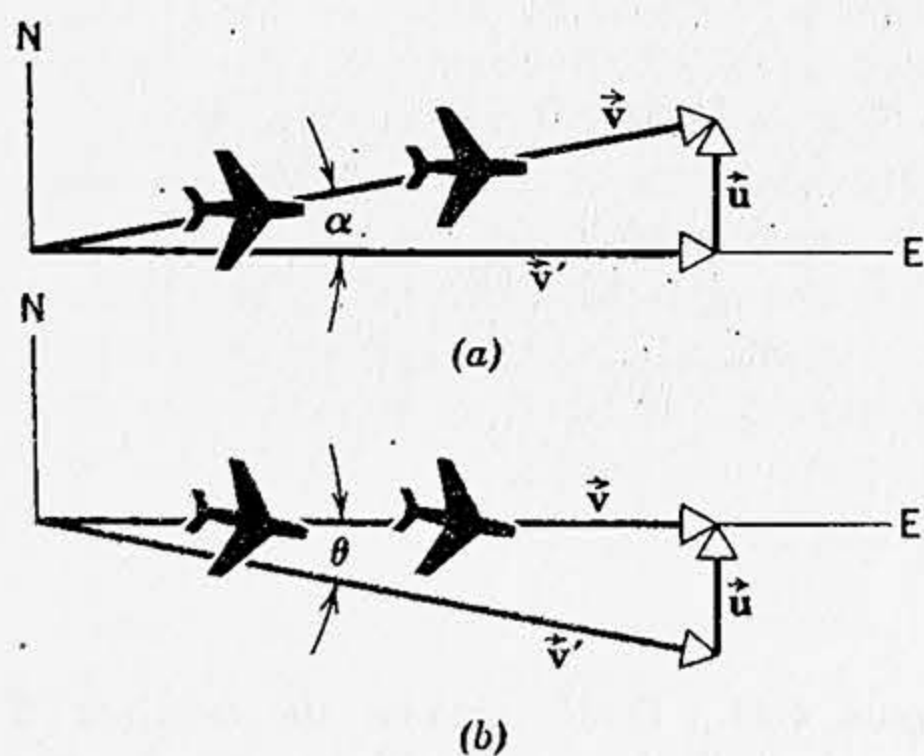


Figura 4-12. Exemplul 6.

mișcă față de aer cu o viteză de 300 km/h și dacă viteza vântului față de sol este 60 km/h, atunci

$$v = \sqrt{(300)^2 + (60)^2} \text{ km/h} = 306 \text{ km/h}$$

este viteza față de sol a acroplanului și

$$\alpha = \arctg \frac{60}{300} = 11^\circ 20'$$

dă direcția acroplanului (spre N de E).

(b) Acum să trasăm diagrama vectorială care arată direcția pe care trebuie s-o păstreze pilotul în aer pentru ca acroplanul să zboare exact spre est față de sol.

El va fi evident orientat parțial în spre vânt. Viteza sa relativă față de pământ va fi de aceea mai mică decât înainte. Diagrama vectorială este arătată în figura 4-12, b. Studentul trebuie să calculeze pe θ și v folosind datele precedente pentru \vec{u} și \vec{v} .

Am văzut că diferiții observatori prescriu particulei diferite viteze atunci când ei se află într-o mișcare relativă. Aceste viteze *diferă totdeauna prin viteza relativă a celor doi observatori*, care este aici o *viteză constantă*. Rezultă că atunci când viteza particulei variază, *variația ei va fi aceeași pentru ambii observatori*. Prin urmare ei vor măsura fiecare *aceeași accelerație* a particulei. Accelerația particulei este aceeași în toate reperele care se mișcă unul față de altul cu viteză constant; adică $\vec{a} = \vec{a}'$. Acest rezultat rezultă pe o cale formală dacă derivăm ecuația (4-19). Astfel, $d\vec{v}/dt = d\vec{v}'/dt + d\vec{u}/dt$; dar $d\vec{u}/dt = 0$ dacă \vec{u} este constant, astfel încât $\vec{a} = \vec{a}'$.

Întrebări

1. Fie mișcarea unui proiectil în cazul când rezistența aerului este neglijabilă. Este necesară considerarea mișcării tridimensionale în locul celei bidimensionale?

2. În saltul de pe trambulină are importanță înălțimea săriturii? Ce factori determină lungimea săriturii?

3. De ce electronul dintr-un fascicul emis de un tun electronic nu cade la fel de mult, datorită gravitației, ca o moleculă de apă dintr-un furtun? Se presupune că mișcarea inițială este orizontală în fiecare caz.

4. Un aviator iese din picaj urmând un arc de cerc. El a declarat că „a suferit o accelerație de 3 g” în tim-

pul ieșirii din picaj. Să se explice ce înseamnă această afirmație.

5. Să se descrie calitativ accelerația care acționează asupra unei mărgele care se mișcă spre interior de-a lungul unei spirale cu viteza absolută constantă.

6. Ar putea fi reprezentată accelerația unui proiectil prin componentele radială și tangențială în fiecare punct al traiectoriei? Dacă este așa, există vreun avantaj în această reprezentare?

7. Un copil aflat într-un vagon care se mișcă cu viteză constantă aruncă o minge vertical în sus în aer. Va cădea mingea în spatele lui? În fața lui? În mîna lui? Ce se întâmplă

dacă vagonul accelerează înainte sau intră în curbă în timp ce mingea se află în aer?

8. Un om, aflat pe platforma de observație a unui tren care se mișcă cu viteză constantă, lasă să cadă o monedă aplecându-se peste fereastră. Să se scrie traiectoria monedei văzută de: (a) omul din tren, (b) o persoană care stă pe pământ în apropierea căii ferate, și (c) o persoană aflată într-un alt tren care se mișcă în sens opus față de primul tren pe o cale ferată paralelă.

9. Un autobuz cu un ecran vertical împotriva vântului se mișcă în timpul ploii cu viteza v_b . Picăturile

de ploaie cad vertical cu viteza v_r . Sub ce unghi vor lovi picăturile de ploaie ecranul?

10. Picăturile de ploaie cad vertical. Pentru a merge prin ploaie dintr-un loc în altul astfel încât să întâlnești un număr cât mai mic de picături, trebuie să mergem cu viteza cea mai mare posibilă, cea mai mică posibilă sau cu o viteză intermediară?

11. Un lift coboară cu viteză absolută constantă. Un pasager ia o monedă din buzunar și o lasă să cadă pe podea. Ce accelerații ale monedei în cădere vor observa: (a) pasagerul și (b) o persoană în repaus față de pământ?

Probleme

1. Să se arate că pentru un vector \vec{a} definit prin

$$\vec{a} = i a_x + j a_y + k a_z$$

componentele scalare sînt date

$$a_x = \vec{i} \cdot \vec{a}, \quad a_y = \vec{j} \cdot \vec{a} \quad \text{și} \quad a_z = \vec{k} \cdot \vec{a}.$$

2. O bilă se rostogolește de pe marginea unei table orizontale de 1,2 m înălțime. Dacă ea lovește podeaua într-un punct situat la o distanță (pe orizontală) de 1,5 m de capătul tablei, care era viteza bilei în momentul cînd a părăsit tabla?

3. O bilă se rostogolește pe o scară cu o viteză orizontală egală în modul cu 1,5 m/s. Treptele sînt de 20 cm înălțime și 20 cm lățime. A cîta treaptă va fi lovită prima dată de bilă?

4. Un obuz este tras orizontal dintr-un tun așezat la 500 m deasupra unui plan orizontal cu o viteză de 250 m/s. (a) Cît timp va rămîne obuzul în aer? (b) Care este bătaia sa? (c) Care este modulul componentei verticale a vitezei sale în momentul cînd lovește ținta?

5. Să se arate că înălțimea maximă atinsă de un proiectil este $y_{\max} = (v_0 \sin \theta_0)^2 / 2g$.

6. Să se arate că bătaia orizontală a unui proiectil, care are o viteză orizontală v_0 și unghiul cu orizontala θ_0 , este $R = (v_0^2 / g) \sin 2\theta_0$. Să se arate apoi că aruncarea sub 45° dă bătaia orizontală maximă (fig. 4-13).

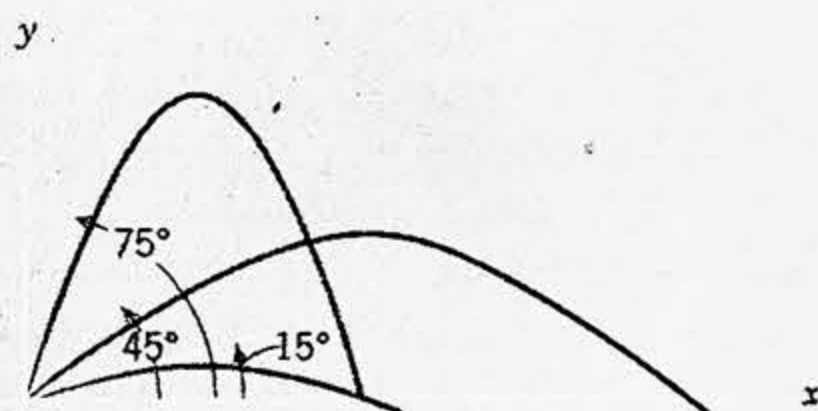


Figura 4-13.

7. Să se afle unghiul de lansare pentru care bătaia orizontală și înălțimea maximă a proiectilului sînt egale între ele.

8. În lucrarea lui Galilei „Doubt și științe noi” autorul afirmă că: „Pen-

tru unghiuri de lansare care depășesc sau sînt mai mici decît 45° cu aceeași cantitate, bătăile sînt egale..." Să se dovedească această afirmație.

9. O carabină trage un glonte cu o viteză inițială de 500 m/s spre o țintă mică aflată la 50 m depărtare. Cît de sus deasupra țintei trebuie îndreptată țeava carabinei pentru ca glonte să nimerescă ținta?

10. Un bombardier în picaj zburînd sub un unghi de 53° față de verticală, lasă o bombă la o altitudine de 800 m. Bomba lovește solul la 5,0 s după lansare. (a) Care este viteza bombardierului? (b) Ce distanță orizontală parcurge bomba în timpul zborului său? (c) Care erau componentele orizontală și verticală ale vitezei sale imediat înaintea lovirii solului?

11. Un jucător lovește o minge la o înălțime de 1,2 m deasupra pămîntului, astfel că unghiul ei de lansare este de 45° și bătăia orizontală de 100 m. Mingea ar cădea jos în stînga liniei terenului, dar acolo se află o plasă de 0,80 m înălțime la o distanță de 90 m de paletă. Va trece mingea peste plasă?

12. O minge de fotbal este lovită cu o viteză inițială de 1,9 m/s sub un unghi de 45° față de orizontală. Un portar aflat, pe linia de gol la 55 m depărtare în direcția loviturii începe să alerge pentru a prinde mingea, în acel moment. Care trebuie să fie viteza sa dacă el trebuie să prindă mingea înainte ca ea să lovească solul?

13. Într-un tub de raze catodice, un fascicul de electroni este emis orizontal cu o viteză de $1,0 \cdot 10^7$ m/s într-o regiune aflată între două plăci orizontale de 2,0 cm lungime. Un cîmp electric dintre plăci exercită o accelerație constantă în jos asupra electronilor de $1,0 \cdot 10^{15}$ m/s². Să se afle: (a) deplasarea verticală a fasciculului în timpul trecerii sale printre plăci, și (b) viteza fasciculului (direcția și măr-

rimea) în momentul cînd iese dintre plăci.

14. (a) Să se arate că dacă accelerația gravitației variază cu o cantitate dg , bătăia unui proiectil (vezi problema 6) de viteză inițială dată v_0 și unghi de lansare dat θ_0 variază cu dR unde $dR/R = -dg/g$. (b) Dacă accelerația gravitației variază cu o cantitate mică Δg (de exemplu cînd trecem dintr-un loc în altul), bătăia unui proiectil se va schimba și ea. Fie ΔR variația bătăii. Dacă Δg și ΔR sînt suficient de mici, putem scrie $\Delta R/R = -\Delta g/g$. În 1936 Jesse Owens (Statele Unite) a stabilit un record mondial la săritura în lungime de 8,09 m la Jocurile Olimpice de la Berlin ($g = 9,8128$ m/s²). Cu cît ar diferi acest record dacă competiția ar fi avut loc în 1956 la Melbourne? ($g = 9,7999$ m/s²)? (În legătură cu aceasta vezi „Bad Physics in Athletic Measurements” de P. Kirkpatrick, *American Journal of Physics*, februarie 1944.)

15. Electronii, nucleele, atomii și moleculele, ca și celelalte forme ale materiei, pot cădea sub influența gravitației. Să considerăm separat cîte un fascicul de electroni, de nuclee, de atomi și de molecule, care parcurg o distanță orizontală de 1,0 m. Fie viteza medie a unui electron $3,0 \cdot 10^7$ m/s, a unui neutron termic $2,2 \cdot 10^3$ m/s, a unui atom de neon $5,8 \cdot 10^2$ m/s și a unei molecule de oxigen $4,6 \cdot 10^2$ m/s. Să presupunem că fasciculele se mișcă în vid cu viteze inițiale orizontale. Să se afle cu cît deviază traiectoriile lor de la o linie dreaptă (deplasarea verticală după 1,0 m) datorită gravitației. Cum se compară aceste rezultate cu cel al unui fascicul de mingi de golf (să se folosească date rezonabile)? Care este aici factorul hotărîtor?

16. Un observator radar aflat pe pămînt urmărește un proiectil care se apropie. La un anumit moment el furnizează următoarele informații: (a) proiectilul a atins înălțimea sa maximă

și se mișcă orizontal cu o viteză v ; (b) distanța în linie dreaptă pînă la proiectil este l ; (c) linia de vizare a proiectilului formează un unghi θ cu orizontala. Să se afle distanța D dintre observator și punctul de lovire al proiectilului. Va trece proiectilul deasupra observatorului sau va lovi pămîntul înainte de a-l atinge? D trebuie exprimat în funcție de cantitățile observate v , l și θ și valoarea cunoscută a lui g . Se presupune pămîntul plan; se presupune de asemenea că observatorul se află în planul traiectoriei proiectilului.

17. Să se arate că ecuațiile (4-4 d, d') din tabela 4-1 pot fi exprimate sub formă vectorială astfel

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

că ecuațiile (4-4 b, b') pot fi exprimate astfel

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})t$$

și ecuațiile (4-4 c, c') astfel

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2.$$

18. Niște proiectile sînt azvîrlite de la o distanță orizontală R pînă la marginea unei stînci de înălțime h , astfel încît să aterizeze la o distanță orizontală x de baza stîncii. Dacă vrem ca x să fie cît mai mic posibil, cum trebuie să ajustăm pe θ_0 și pe v_0 , presupunînd că v_0 poate fi variat de la zero pînă la o anumită valoare maximă finită și că

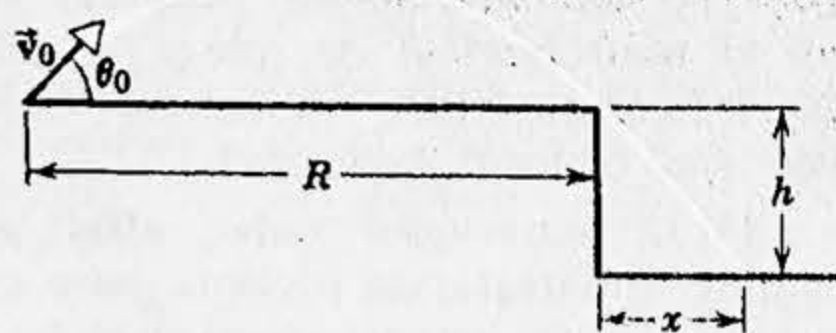


Figura 4-14.

θ_0 poate fi variat continuu? Este permisă numai o singură ciocnire cu pămîntul? (Vezi fig. 4-14.)

19. Să considerăm un proiectil aflat în punctul superior al traiectoriei sale. (a) Care este viteza sa exprimată în funcție de v_0 și θ_0 ? (b) Care este accelerația sa? (c) Care este direcția accelerației sale față de direcția vitezei sale? (d) Pe o distanță mică un arc de cerc constituie o bună aproximație a parabolei. Care este atunci raza arcului de cerc care aproximează traiectoria proiectilului în vecinătatea punctului superior al traiectoriei sale?

20. O particulă se află în repaus în vîrfurile unei emisfere de rază R . Să se afle viteza orizontală minimă care trebuie imprimată particulei pentru ca ea să părăsească emisfera fără a aluneca pe emisferă în jos.

21. Un cîmp magnetic deviază o particulă încărcată perpendicular pe direcția ei de mișcare. Într-un astfel de cîmp un electron suferă o accelerație radială de $3,0 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$. Care este viteza sa dacă raza traiectoriei curbe este de $0,15 \text{ m}$?

22. În modelul lui Bohr al atomului de hidrogen electronul se rotește în jurul protonului pe o orbită circulară de rază $5,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ cu o viteză de $2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Care este accelerația electronului în atomul de hidrogen?

23. Să se afle accelerația centripetă a unei particule aflată pe extremitatea paletei unui ventilator care are $0,30 \text{ m}$ în diametru și se rotește cu 1200 rot/min .

24. Cu ce factor ar trebui să crească viteza de rotație a Pămîntului pentru ca un corp aflat la Ecuator să necesite o accelerație centripetă g pentru a-l menține pe suprafața Pămîntului? Un astfel de corp necesită actual o accelerație centripetă de numai $3,0 \text{ cm/s}^2$.

25. O particulă se mișcă cu viteză absolută constantă pe un cerc cu raza de $3,0 \text{ m}$ și efectuează o revoluție

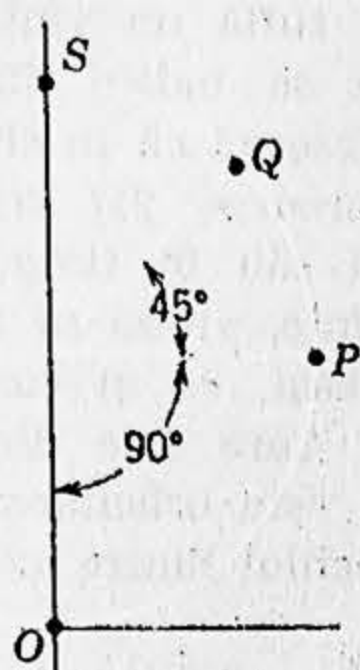


Figura 4-15.

în 20 s (fig. 4-15). Plecând din originea O, să se afle: (a) modulul și direcția vectorilor deplasate după 5,0 s, 7,5 s și 10 s; (b) modulul și direcția deplasării în intervalul de 5,0 s de la secunda a 5-a pînă la secunda a 10-a; (c) Vectorul viteză medie în acest interval; (d) vectorul viteză instantanee la începutul și la sfîrșitul acestui interval. (e) Vectorul accelerație medie în acest interval și (f) vectorul accelerație instantanee la începutul și la sfîrșitul acestui interval.

26. Un satelit al Pămîntului se mișcă pe o orbită circulară la 665 km deasupra suprafeței Pămîntului. Timpul unei revoluții (perioade) este de 98 min. Utilizînd aceste date să se calculeze accelerația gravitației pe orbita satelitului.

27. Pămîntul se rotește în jurul Soarelui pe o orbită (aproape) circulară cu o viteză (aproape) constantă de 30 km/s. Care este accelerația Pămîntului spre Soare?

28. O particulă se mișcă într-un plan conform ecuațiilor

$$x = R \sin \omega t + \omega R t,$$

$$y = R \cos \omega t + R,$$

unde ω și R sînt constante. Această curbă, numită *cicloiddă*, reprezintă tra-

ectoria descrisă de un punct de pe obada unei roți care se rostogolește fără alunecare de-a lungul axei x . (a) Să se deseneze traiectoria. (b) Să se calculeze viteza și accelerația instantanee în momentul cînd particula se află la valoarea maximă și minimă a lui y .

29. (a) Folosind coordonate rectangulare și versorii \vec{i} și \vec{j} să se scrie o expresie pentru vectorul de poziție \vec{r} al unei particule care descrie o mișcare circulară uniformă. (b) Utilizînd expresia de la punctul (a) să se deducă expresiile vectoriale pentru viteza \vec{v} și accelerația \vec{a} . (c) Să se arate că accelerația este dirijată spre centrul mișcării circulare.

30. Să se scrie o expresie, folosind versorii \vec{u}_θ și \vec{u}_r , pentru vectorul de poziție \vec{r} al unei particule care execută o mișcare circulară uniformă și să se deducă din ea ecuația (4-11), $\vec{v} = \omega \vec{r}$.

31. Să se exprime versorii \vec{u}_r și \vec{u}_θ în funcție de versorii \vec{i} , \vec{j} și de unghiul θ în figura 4-8.

32. O persoană urcă în 90 s o scară rulantă oprită. Stînd pe aceeași scară rulantă, dar acum în mișcare, el este urcat în 60 s. Cît timp îi va trebui să urce cînd scara rulantă funcționează?

33. Să se afle viteza a două obiecte dacă, atunci cînd se mișcă uniform unul spre celălalt, ele se apropie cu 4,0 m în fiecare secundă și, atunci cînd se mișcă uniform în același sens cu vitezele lor inițiale, ele se apropie cu 4,0 m în fiecare 10 s.

34. Un om poate vîsli o barcă cu 6,4 km/h în apă liniștită. (a) Dacă el traversează un râu în care curentul are viteza de 3,2 km/oră, în ce direcție trebuie îndreptată barca dacă dorește să ajungă în punctul direct opus

față de punctul de plecare? (b) Dacă râul are o lățime de 6,4 km, cât timp îi va trebui să traverseze râul? (c) Cât timp i-ar trebui să vâslească 3,2 km în josul râului și apoi pînă la punctul de plecare? (d) Cât timp i-ar trebui să vâslească 3,2 km în susul râului și apoi pînă la punctul de plecare? (e) În ce direcție ar trebui să-și orienteze barca dacă vrea să traverseze râul în cel mai scurt timp posibil?

35. Un om vrea să traverseze un rîu de 500 m lățime. Viteza sa de vîslire (față de apă) este de 3,0 km/h. Rîul curge cu o viteză de 1,5 km/h. Dacă viteza de mers pe țărm a omului este de 5,0 km/h, (a) Să se afle traiectoria (combinînd vîslirea cu plimbarea) pe care el ar trebui să meargă pentru a ajunge în punctul direct opus față de punctul de plecare, în timpul cel mai scurt. (b) Cât timp îi trebuie?

36. Un tren merge către sud cu viteza de 26 m/s (față de sol) pe timp de ploaie, ploaia fiind deviată de vînt în spre sud. Traiectoria fiecărei picături de ploaie descrie un unghi de $21,6^\circ$ cu verticala, unghiul fiind măsurat de un observator aflat pe pămînt. Un observator aflat în tren vede însă urme perfect verticale ale ploii pe geamurile ferestrelor. Să se determine viteza fiecărei picături de ploaie față de pămînt.

37. Un aeroplan are o viteză de 217 km/h în aer liniștit. El zboară în linie dreaptă spre nord astfel încît este în fiecare moment exact deasupra unui drum nord-sud. Un observator

de pe pămînt transmite pilotului prin radio că suflă un vînt cu 11,3 km/h, dar uită să indice direcția vîntului. Pilotul observă că în ciuda vîntului, el poate parcurge 217 km de-a lungul drumului său în timp de o oră. Cu alte cuvinte, viteza sa față de pămînt este aceeași ca și cum n-ar exista vînt. (a) Care este direcția vîntului? (b) care este orientarea aeroplanului, adică unghiul dintre axa sa și drumul urmat?

38. Un pilot trebuie să zboare exact spre est de la A la B și apoi înapoi la A spre vest. Viteza aeroplanului în aer este $\vec{v'}$ iar viteza aerului față de pămînt este \vec{u} . Distanța dintre A și B este l și viteza aeroplanului față de aer $\vec{v'}$ este constantă. (a) Dacă $u=0$ (aer liniștit), să se arate că timpul pentru dus și întors este $t_0=2l/v'$. (b) Se presupune că viteza aerului este către est (sau vest). Să se arate că timpul călătoriei dus-întors este atunci

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/(v')^2}.$$

(c) Se presupune că viteza aerului este către nord (sau sud). Să se arate că timpul călătoriei dus-întors este atunci

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/(v')^2}}.$$

(d) În punctele (b) și (c) trebuie presupus că $u < v'$. De ce?

Dinamica punctului material I

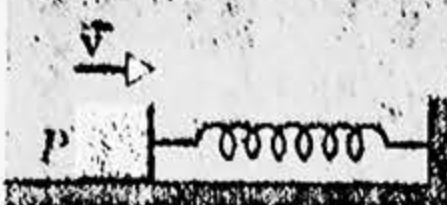


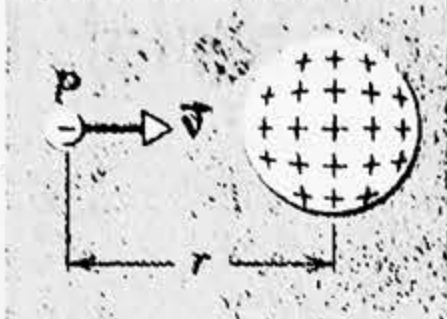
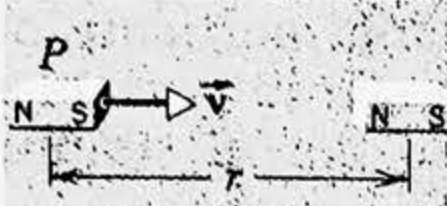
5-1. Mecanica clasică

În capitolele 3 și 4 am studiat mișcarea unei particule punând accentul pe mișcarea de-a lungul unei linii drepte sau într-un plan. Nu ne-am întrebat ce „produce” mișcarea; am descris-o pur și simplu cu ajutorul vectorilor \vec{r} , \vec{v} și \vec{a} . Discuția noastră era astfel în esență geometrică. În acest capitol și în cel următor discutăm cauzele mișcării, un aspect al mecanicii numit *dinamică*. Ca mai înainte, corpurile vor fi tratate ca și cum ar fi particule izolate. Mai târziu, în carte vom trata de asemenea grupe de particule și corpuri extinse.

Mișcarea unei particule date este determinată de natura și poziția altor corpuri care formează *mediul* său înconjurător. În general, numai obiectele vecine trebuie incluse în mediu, efectele obiectelor mai depărtate fiind de obicei neglijabile. Tabela 5-1 arată unele „particule” și medii înconjurătoare posibile pentru ele.

În cele ce urmează ne restrângem la cazul particular foarte important al obiectelor macroscopice (voluminoase) care se mișcă cu viteze mici în comparație cu c — viteza luminii; acesta este domeniul *mecanicii clasice*. În particular, nu vom intra în chestiuni precum mișcarea unui electron într-un atom de uraniu sau ciocnirea a doi protoni ale căror viteze sînt, de exemplu, $0,90 c$. Prima chestiune ar implica teoria cuantică, iar cea de a doua, teoria relativității. Lăsăm pentru mai târziu aceste teorii al căror caz particular este mecanica clasică (vezi secțiunea 6-4).

Problema centrală a mecanicii clasice a punctului material este următoarea: (1) Se dă o particulă ale cărei caracteristici (masa, sarcina, momentul dipolar, magnetic etc.) sînt cunoscute. (2) Plasăm această particulă, cu o viteză inițială cunoscută, într-un mediu despre care avem o descriere completă. (3) Se cere care este mișcarea ulterioară a particulei?

	Sistem	„Particula”	Mediul
1.		Un bloc	Resort; suprafață aspră
2.		Minge de golf	Pământul
3.		Un satelit artificial	Pământul
4.		Un electron	O sferă mare încărcată uniform
5.		Un magnet bară	Un al doilea magnet bară

Această problemă a fost rezolvată, cel puțin pentru o mare varietate de medii, de către Isaac Newton (1642—1727) când acesta a stabilit legile mișcării și a formulat legea gravitației universale. Programul de rezolvare al acestei probleme în termenii înțelegerii noastre actuale a mecanicii clasice¹ este: (1) Introducem conceptul de forță \vec{F} și o definim cu ajutorul accelerației \vec{a} suferite de un corp standard (etalon) particular. (2) Elaborăm un procedeu de atribuire unei mase m unui corp astfel încât să putem înțelege faptul că diferite particule de același tip suferă accelerații diferite în același mediu. (3) În sfârșit, încercăm să găsim modul de calcul al forței care acționează asupra particulelor, din proprietățile particulei și a mediului său, adică căutăm *legea forței*. Forța care este, la origine, un procedeu pentru a lega mediul de mișcarea particulei, apare atât în legile mișcării (care ne spun ce accelerație va suferi un corp dat sub acțiunea unei forțe date) cât și în legea forței (care ne spune cum să calculăm forța care va acționa asupra corpului dat într-un

¹ Vezi „Prezentarea mecanicii newtoniene” de Norman Austern, *American Journal of Physics*, septembrie 1961, „Asupra legilor clasice ale mișcării” de Leonard Eisenbud, *American Journal of Physics*, martie 1958, și „Legile mișcării clasice: ce este F ? ce este m ? Ce este a ?” de Robert Weinstock, în *American Journal of Physics*, octombrie 1961, pentru expunerea legilor mecanicii clasice așa cum le concepem astăzi, aproape 300 de ani după Newton.

mediu dat). Legile mișcării și legea forței, luate împreună, constituie legile mecanicii.

Programul mecanicii nu poate fi verificat fragmentat. Trebuie să-l privim ca o unitate și îl vom judeca ca avînd succes dacă putem spune „da” la următoarele două întrebări. (1) Dă programul rezultate în concordanță cu experiența? (2) Este legea forței simplă ca formă? Faptul că putem răspunde afirmativ la fiecare din aceste chestiuni reprezintă o încununare a mecanicii newtoniene.

În acest paragraf am folosit termenii de forță și masă destul de imprecis, identificînd forța cu influența mediului, iar masa cu rezistența corpului la accelerare atunci cînd o forță acționează asupra lui, — o proprietate numită adesea inerție. În paragrafele următoare vom preciza aceste idei primitive despre forță și masă.

5-2. Prima lege a lui Newton

Timp de secole problema mișcării și a cauzelor ei era o temă centrală a filozofiei naturale. Abia în timpul lui Galilei și Newton s-a făcut însă un progres esențial. Isaac Newton, născut în Anglia în anul morții lui Galilei, este principalul arhitect al mecanicii clasice¹. El a dus pînă la deplină fructificare ideile lui Galilei și ale altora care l-au precedat. Cele trei legi ale mișcării au fost prezentate pentru prima dată (1686) în cartea sa *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*.

Înainte de epoca lui Galilei majoritatea filozofilor gîndeau că este necesară o anumită influență sau „forță” pentru a menține corpul în mișcare. Ei gîndeau că un corp se află în „starea sa naturală” atunci cînd este în repaus. Pentru ca un corp să se miște în linie dreaptă, cu viteză constantă de exemplu, ei credeau că un anumit agent extern trebuie să-l propulseze în mod continuu; altfel corpul s-ar opri din mișcare „în mod natural”.

Dacă am vrea să verificăm aceste idei în mod experimental, ar trebui în primul rînd să găsim un mod de a elibera corpul de toate influențele mediului său sau de toate forțele. Aceasta este dificil de făcut, însă în anumite cazuri putem face ca forțele să fie foarte mici. Dacă studiem mișcările în timp ce facem forțele din ce în ce mai mici, vom căpăta o anumită idee asupra mișcării care ar avea loc dacă forțele externe ar deveni într-adevăr zero.

Să plasăm corpul nostru de probă, de exemplu un bloc, pe un plan orizontal rigid. Dacă lăsăm blocul să lunece de-a lungul acestui plan, observăm că el încetinește treptat și se oprește. Această observație era folosită, de fapt, pentru a sprijini ideea că mișcarea încetează atunci cînd forța externă, în acest caz mîna care a împins inițial blocul, este îndepărtată. Galilei a obiectat însă împotriva acestei idei, raționînd astfel: să repetăm experiența noastră, folosind acum un bloc mai neted și

¹ Newton a inventat de asemenea calculul diferențial (fluxional), a conceput ideea gravitației universale și a formulat legea acestuia, de asemenea a descoperit compoziția luminii albe. El a fost un experimentator îndemînat, un matematician de prim rang și totodată ceea ce astăzi s-ar numi fizician teoretician.

un plan mai neted și folosind un lubrifiant. Observăm că viteza descrește mai încet decât înainte. Să folosim acum blocuri și suprafețe și mai netede, precum și lubrifianți mai buni. Vom găsi că blocul își descrește viteza din ce în ce mai încet și parcurge de fiecare dată un spațiu mai mare pînă ajunge în repaus¹. Putem acum extrapola și spune că dacă s-ar putea elimina orice frecări, corpul ar continua să se miște indefinit pe o linie dreaptă cu viteză constantă. Aceasta a fost concluzia lui Galilei, Galilei a afirmat că este necesară o anumită forță externă pentru a schimba viteza corpului, dar că nu este necesară nici o forță externă pentru a menține viteza corpului. Mîna noastră, de exemplu, exercită o forță asupra blocului atunci cînd îl pune în mișcare. Planul aspru exercită o forță asupra blocului în timpul cît acesta lunecă pe el. Aceste două forțe produc o variație a vitezei, adică produc o accelerație.

Acest principiu al lui Galilei a fost adoptat de Newton ca prima dintre cele trei legi ale sale ale mișcării. Newton a formulat prima sa lege în următoarele cuvinte: „*Oricare corp persistă în starea sa de repaus sau de mișcare uniformă pe o linie dreaptă atîta timp cît nu este constrîns să-și schimbe această stare de forțe aplicate asupra lui*”.

Prima lege a lui Newton este în realitate o afirmație despre sisteme de referință. În adevăr, în general, accelerația unui corp depinde de sistemul de referință față de care ea este măsurată. Prima lege ne spune că, dacă nu există în vecinătate obiecte, și prin aceasta înțelegem că nu există forțe, deoarece orice forță trebuie asociată cu un obiect din mediu, atunci este posibil de găsit o familie de sisteme de referință în care o particulă nu are accelerație. Faptul că corpurile rămîn în repaus sau își mențin mișcarea liniară uniformă în absența forțelor aplicate, este adesea descris prin atribuirea unei proprietăți materiei numită inerție. Prima lege a lui Newton este adesea numită legea inerției și sistemele de referință în care ea se aplică sînt de aceea numite sisteme (reper) inerțiale. Astfel de repere sînt fie cele fixe față de stelele îndepărtate, fie cele care se mișcă cu viteză constantă față de ele.

În aproape toate cazurile din această carte vom aplica legile mecanicii clasice din punctul de vedere al unui observator aflat într-un reper inerțial. Este posibil de rezolvat problemele mecanicii folosind un reper neinerțial, cum este de exemplu un reper care se rotește față de stelele fixe, dar pentru a face astfel trebuie să introducem forțe (numite adesea *pseudoforțe*) care nu pot fi asociate cu nici un obiect din mediu. Vom discuta aceasta în capitolele 6, 11 și 16. Un sistem de referință legat de Pămînt poate fi considerat ca reper inerțial pentru majoritatea scopurilor practice. Vom vedea în capitolul 16 cît de bună este o astfel de aproximație.

Observăm că nu există nici o distincție în cadrul primei legi între un corp în repaus și un corp în mișcare cu o viteză constantă. Ambele mișcări sînt „naturale” în absența forțelor. Că aceasta este așa, devine

¹ Studentul poate face experiența în laborator cu un puc de zăpadă carbonică. Acesta este un dispozitiv care poate fi făcut să se miște pe o suprafață orizontală netedă, plutind pe un strat de CO₂ gazos. Frecarea dintre puc și suprafață este într-adevăr foarte mică și este greu de măsurat vreo reducere a vitezei pe traiectoria de lungime obișnuită.

clar, dacă un corp în repaus într-un reper inerțial este văzut dintr-un al doilea reper inerțial, adică dintr-un reper care se mișcă cu viteză constantă față de primul. Un observator din primul reper găsește corpul în repaus; un observator din al doilea reper găsește același corp în mișcare cu viteză constantă. Ambii observatori găsesc corpul fără accelerație, adică fără vreo variație a vitezei și ambii pot conchide în baza primei legi că asupra corpului nu acționează nici o forță.

Observăm de asemenea că, implicit, nu este nici o distincție în cadrul primei legi între absența tuturor forțelor și prezența acelor forțe a căror rezultantă este zero. De exemplu, dacă apăsarea mâinii noastre asupra unei cărți contracarcază exact forța de frecare asupra ei, cartea se va mișca cu viteză constantă. Prin urmare un alt mod de a formula prima lege este: *Dacă asupra unui corp nu acționează nici o forță netă, accelerația sa \vec{a} este zero.*

Dacă există o interacțiune între corp și obiectele aflate în mediul său, efectul poate fi acela de a schimba starea „naturală” a mișcării corpului. Pentru a studia aceasta trebuie să examinăm acum cu grijă conceptul de forță.

5-3. Forța

Să aprofundăm conceptul nostru de forță, definind-o operațional. În limbajul nostru de toate zilele forța este legată de o apăsare sau tracțiune, exercitată de mușchii noștri. În fizică însă avem nevoie de o definiție mai precisă. Definim aici forța cu ajutorul accelerației pe care o suferă un corp standard (etalon) dat, atunci când este așezat într-un mediu adecvat.

Drept corp etalon este convenabil să folosim (sau mai degrabă să ne imaginăm că-l folosim!) un cilindru particular de platină păstrat cu grijă la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de lângă Paris și numit *kilogramul etalon* (vezi fig. 5-1). Pentru secțiunile care urmează afirmăm aici că acest corp a fost ales drept etalonul nostru de *masă* și i s-a prescriș, prin definiție, o masă m_0 exact egală cu un kilogram. Vom descrie mai târziu modul în care se prescriu mase altor corpuri.

Ca mediu, plasăm corpul etalon pe o masă orizontală având frecări neglijabile și îi atașăm un resort. Ținem celălalt capăt al resortului în mîna noastră, ca în figura 5-2, a. Acum tragem resortul orizontal spre dreapta, astfel încît prin încercări și erori corpul etalon să sufere o accelerație uniformă, măsurată, de $1,00 \text{ m/s}^2$. De-



Figura 5-1. Etalonul național de 1 kilogram numărul 4, păstrat la United States National Bureau of Standards. El reprezintă o copie exactă a etalonului internațional păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de lângă Paris. Kilogramul etalon este format dintr-un cilindru de platină închis sub două clopote de sticlă.

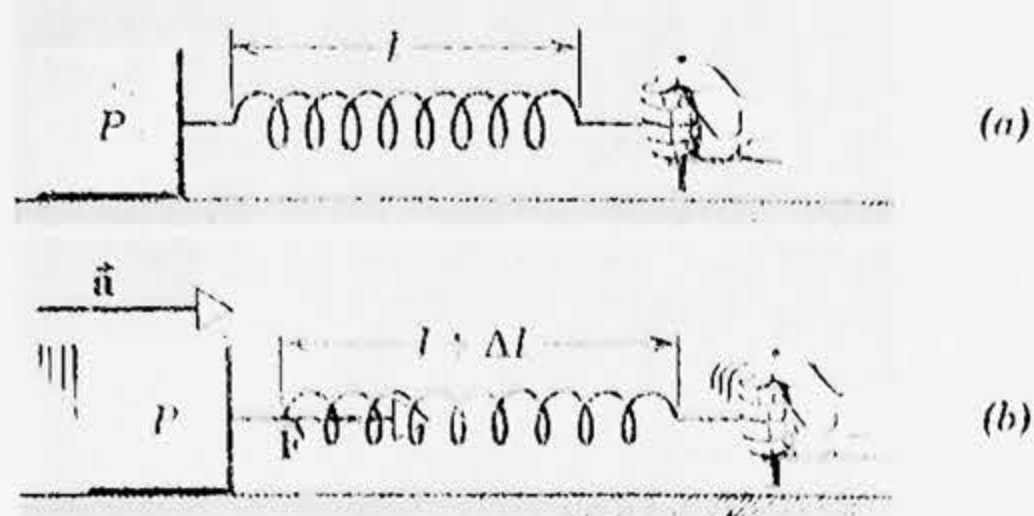


Figura 5-2. (a) O „particulă” P (kilogramul etalon) în repaus pe o suprafață orizontală, fără frecări. (b) Corpul este accelerat trăgând de resort spre dreapta.

clarăm atunci, ca o chestiune de definiție, că resortul (care este corpul semnificativ din mediu) exercită asupra corpului etalon o forță constantă a cărei valoare o vom numi „1,00 Newton”. Observăm că, exercitând această forță, resortul este ținut întins cu o cantitate Δl peste lungimea sa inițială, așa cum arată figura 5-2,b.

Putem repeta experiența, fie întinzând resortul mai mult, fie folosind un resort mai rigid, astfel încât să putem măsura o accelerație de $2,00 \text{ m/s}^2$ a corpului etalon. Declarăm acum că resortul exercită o forță de $2,00 \text{ N}$ asupra corpului etalon. În general, dacă observăm că acest corp etalon particular are o accelerație a într-un anumit mediu, spunem atunci că mediul exercită o forță F asupra corpului etalon, unde F (în newtoni) este numeric egal cu a (în m/s^2).

Să vedem acum dacă forța, așa cum am definit-o, este o mărime *vectorială*. În figura 5-2, b, i-am atribuit forței o intensitate F și este o chestiune foarte simplă de a-i atribui totodată o direcție și un sens, anume direcția și sensul accelerației pe care o produce forța. Cu toate acestea, pentru ca o mărime să fie un vector nu este suficient să aibă mărime, direcție și sens; ea trebuie să se supună legilor adunării vectoriale, descrise în capitolul 2. Putem afla numai din experiență dacă forțele, așa cum le-am definit, se supun într-adevăr acestor legi.

Să aranjăm astfel încât să exercităm o forță de $4,00 \text{ N}$ de-a lungul axei x și o forță de $3,00 \text{ N}$ de-a lungul axei y și să aplicăm aceste forțe *simultan* corpului etalon, așezat ca și mai înainte pe o suprafață orizontală fără frecări. Care va fi accelerația corpului etalon? Vom găsi experimental că accelerația este de $5,00 \text{ m/s}^2$ dirijată de-a lungul unei linii care face un unghi de 37° cu axa x . Cu alte cuvinte, vom zice că corpul etalon a fost supus unei forțe de $5,00 \text{ N}$ în aceeași direcție. Același rezultat poate fi obținut compunând forța de $4,00 \text{ N}$ și forța de $3,00 \text{ N}$ vectorial conform regulii paralelogramului. Experiențele de acest fel arată în mod decisiv că forțele sînt vectori. Ele au o intensitate (modul); ele au o direcție și un sens pe această direcție; ele se compun conform regulii paralelogramului.

Rezultatul experiențelor de acest tip general este formulat adesea astfel: *Dacă mai multe forțe acționează asupra unui corp, fiecare produce propria sa accelerație în mod independent. Accelerația rezultantă este suma vectorială a acestor accelerații independente.*

5-4. Masa; legea a doua a lui Newton

În secțiunea 5-3 am considerat numai accelerațiile imprimate unui corp particular, kilogramul etalon. Am fost în stare prin aceasta să definim forțele sub aspect cantitativ. Ce efect vor avea aceste forțe asupra altor obiecte? Deoarece corpul nostru standard a fost ales arbitrar, în primul rând, știm că pentru orice obiect dat accelerația va fi direct proporțională cu forța aplicată. Chestiunea semnificativă care rămâne atunci este: ce efect va avea *aceeași forță* asupra obiectelor diferite? Experiența de toate zilele ne dă un răspuns calitativ. Aceeași forță va produce accelerații diferite asupra unor corpuri diferite. O minge de baseball va fi accelerată mai mult de o forță dată decât un automobil. Pentru a obține un răspuns cantitativ la această întrebare avem nevoie de o metodă de a măsura masa, acea proprietate a corpului care determină rezistența sa la o variație a mișcării sale.

Să legăm un resort de corpul nostru etalon (kilogramul etalon căruia i-am prescris arbitrar o masă $m_0 = 1,00$ kg, exact) și să-i imprimăm o accelerație a_0 de $2,00$ m/s², de exemplu, folosind metoda din figura 5-2, b. Să măsurăm cu grijă alungirea Δl a resortului, produsă de forța pe care o exercită resortul asupra blocului.

Îndepărtăm acum kilogramul etalon și substituim un corp arbitrar a cărui masă o notăm cu m_1 . Aplicăm *aceeași forță* (forța care a accelerat kilogramul etalon cu $2,00$ m/s²) corpului arbitrar (întinzând resortul cu aceeași cantitate) și măsurăm accelerația a_1 , de exemplu, de $0,50$ m/s².

Definim raportul maselor a două corpuri ca fiind raportul invers al accelerațiilor imprimate acestor corpuri de aceeași forță sau

$$m_1/m_0 = a_0/a_1 \quad (\text{acționează aceeași forță } \vec{F})$$

În acest exemplu avem numeric

$$m_1 = m_0(a_0/a_1) = 1,00 \text{ kg} \cdot (2,00 \text{ m/s}^2)/(0,50 \text{ m/s}^2) = 4,00 \text{ kg}.$$

Cele de-al doilea corp, care are doar un sfert din accelerația primului corp, atunci când asupra lui acționează aceeași forță, are, prin definiție o masă de patru ori mai mare decât primul corp. Prin urmare, masa poate fi privită ca o măsură cantitativă a inerției.

Dacă repetăm experiența precedentă cu o altă forță aplicată, vom găsi că raportul accelerațiilor a'_0/a'_1 este același ca în experiența precedentă, sau

$$m_1/m_0 = a_0/a_1 = a'_0/a'_1.$$

Raportul maselor a două corpuri este deci independent de forțele folosite.

Mai mult, experiența arată că putem atribui în mod consecvent masă oricărui corp cu ajutorul acestui procedeu. De exemplu, să comparăm un al doilea corp arbitrar, cu corpul etalon și să determinăm astfel masa sa, să zicem m_2 . Putem compara acum cele două corpuri, m_2 și m_1 , direct, obținând accelerațiile a''_2 și a''_1 atunci când se aplică aceeași forță. Raportul maselor, definit ca de obicei din

$$m_2/m_1 = a''_1/a''_2 \quad (\text{acționează aceeași forță})$$

va avea aceeași valoare pe care o obținem folosind masele m_2 și m_1 determinate mai înainte prin comparație directă cu etalonul.

Putem arăta, într-o altă experiență de acest tip, că, dacă obiectele de masă m_1 și m_2 sînt legate împreună, ele se comportă din punct de vedere mecanic ca un singur obiect de masă $m_1 + m_2$. Cu alte cuvinte, masele se adună ca mărimi scalare (și sînt mărimi scalare).

Tabela 5-2 arată domeniul de valori în care pot fi determinate masele, folosind diferite tehnici de măsură.

Tabela 5-2

UNELE MASE MĂSURATE

Obiectul	Masa (kg)
Galaxia noastră	$2,2 \cdot 10^{41}$
Soarele	$2,0 \cdot 10^{30}$
Pămîntul	$6,0 \cdot 10^{24}$
Luna	$7,4 \cdot 10^{22}$
Masa apei tuturor oceanelor	$1,4 \cdot 10^{21}$
Un vas oceanic	$7,2 \cdot 10^7$
Un elefant	$4,5 \cdot 10^3$
Un om	$7,3 \cdot 10^1$
Bob de strugure	$3,0 \cdot 10^{-3}$
Virusul mozaicului de tutun	$6,7 \cdot 10^{-10}$
Un fir de praf	$2,3 \cdot 10^{-13}$
O moleculă de penicilină	$5,0 \cdot 10^{-17}$
Un atom de uraniu	$4,0 \cdot 10^{-25}$
Un proton	$1,7 \cdot 10^{-27}$
Un electron	$9,1 \cdot 10^{-31}$

Putem acum rezuma toate experiențele și definițiile descrise mai sus într-o singură ecuație, ecuația fundamentală a mecanicii clasice

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (5-1)$$

În această ecuație \vec{F} este suma (vectorială) a tuturor forțelor care acționează asupra corpului, m este masa corpului și \vec{a} este accelerația sa (vectorială). Ecuația (5-1) poate fi considerată ca o formulare a legii a doua a lui Newton. Dacă o scriem sub forma $\vec{a} = \vec{F}/m$, putem vedea ușor că accelerația corpului este direct proporțională cu forța rezultantă care acționează asupra lui și paralelă ca direcție cu această forță, și că accelerația, pentru o forță dată, este invers proporțională cu masa corpului.

Observăm că prima lege a mișcării este conținută în legea a doua ca un caz particular, deoarece dacă $\vec{F} = 0$, atunci $\vec{a} = 0$. Cu alte cuvinte, dacă forța rezultantă ce acționează asupra unui corp este zero, accelerația corpului este zero. Prin urmare, în absența forțelor aplicate un corp se va mișca cu viteză constantă sau va fi în repaus (viteză nulă), ceea ce afirmă prima lege a mișcării. Prin urmare, din cele trei legi ale mișcării ale lui Newton numai două sînt independente, legea a doua și legea

a treia (secțiunea 5-5). Partea din dinamica punctului material (a mișcărilor de translație) care cuprinde numai sistemele pentru care forța rezultantă \vec{F} este nulă, se cheamă *statică*.

Ecuatia (5-1) este o ecuație vectorială. Putem scrie această ecuație vectorială unică sub forma a trei ecuații scalare:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \quad \text{și} \quad F_z = ma_z \quad (5-2)$$

care leagă componentele pe direcțiile x , y și z ale forței rezultante (F_x , F_y și F_z) de componentele pe direcțiile x , y și z ale accelerației (a_x , a_y și a_z) imprimată masei m . Trebuie subliniat faptul că F_x este *suma* componentelor pe direcția x ale *tuturor* forțelor, F_y este *suma* componentelor pe direcția y ale *tuturor* forțelor și F_z este *suma* componentelor pe direcția z ale *tuturor* forțelor ce acționează asupra lui m .

5-5. Legea a treia a mișcării a lui Newton

Forțele care acționează asupra unui corp își au originea în alte corpuri care formează mediul primului corp. Orice forță izolată este numai un aspect al interacțiunii mutuale dintre două corpuri. Se găsește experimental că atunci când un corp exercită o forță asupra unui al doilea corp, acesta din urmă exercită totdeauna o forță asupra primului corp. Mai mult, se găsește că aceste forțe sînt egale în modul dar de sens opus. O forță singură, izolată, este deci o imposibilitate.

Dacă una din cele două forțe implicate în interacția dintre două corpuri este numită „acțiune”, cealaltă este numită „reacțiune”. Oricare dintre forțe poate fi considerată „acțiune”, iar cealaltă „reacțiune”. Aici nu este implicată cauza și efectul, ci este implicată o interacție mutuală simultană.

Această proprietate a forțelor a fost formulată pentru prima dată de către Newton în cea de a treia lege a mișcării: „Fiecărei acțiuni i se opune întotdeauna o reacțiune egală; sau, acțiunile mutuale a două corpuri unul asupra celuilalt sînt totdeauna egale și dirijate în sensuri opuse”.

Cu alte cuvinte, dacă corpul A exercită o forță asupra corpului B , corpul B exercită o forță egală în modul dar de sens opus asupra corpului A ; și mai mult decît atît, forțele acționează de-a lungul liniei care unește corpurile. Observăm că acțiunea și reacțiunea, care apar întotdeauna în pereche, acționează asupra unor corpuri *diferite*. Dacă ele ar acționa asupra aceluiași corp, n-am avea niciodată o mișcare accelerată, deoarece forța rezultantă asupra oricărui corp ar fi totdeauna zero.

Să ne imaginăm un copil care lovește cu piciorul o ușă deschisă. Forța exercitată de copilul C asupra ușii U accelerează ușa (ea se deschide); în același timp ușa U exercită o forță egală în modul dar de sens opus asupra copilului C , care decelerează pe copil (piciorul său pierde viteză). Copilul va sesiza dureros această forță de „reacțiune” ca răspuns la „acțiunea” sa, mai ales dacă este desculț.

Exemplele care urmează ilustrează aplicarea legii a treia și clarifică sensul ei.

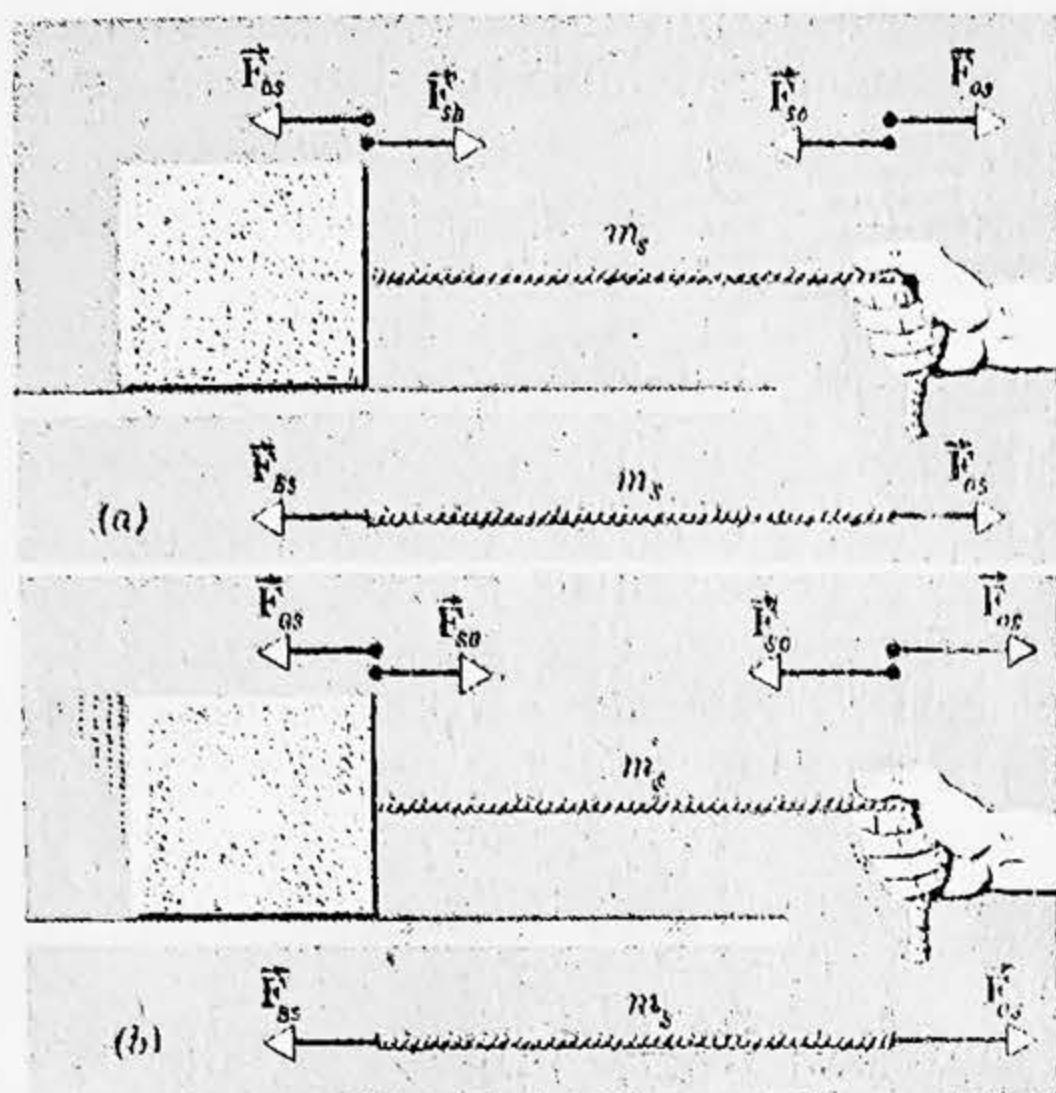


Figura 5-3. Exemplul 1. Un om trage de o sfoară fixată de un bloc. (a) Forțele exercitate asupra sforii de către bloc și de către om sînt egale în modul dar opuse ca sens. În modul acesta, forța orizontală rezultantă asupra sforii este nulă, așa cum este arătat în diagrama corpului liber. Sfoara nu se mișcă accelerat. (b) Forța exercitată asupra sforii de către om depășește pe cea exercitată de bloc. Forța orizontală netă are intensitatea $F_{OS} - F_{BS}$ și este îndreptată spre dreapta. În modul acesta, sfoara este accelerată spre dreapta. Asupra blocului acționează de asemenea o forță de frecare care nu este arătată aici.

Exemplul 1. Să considerăm un om care trage orizontal de o sfoară legată de un bloc așezat pe o masă orizontală, ca în figura 5-3. Omul trage de sfoară cu o forță \vec{F}_{OS} . Sfoara exercită o forță de reacțiune \vec{F}_{SO} asupra omului. Conform legii a treia a lui Newton, $\vec{F}_{OS} = -\vec{F}_{SO}$. De asemenea, sfoara exercită o forță \vec{F}_{SB} asupra blocului, iar blocul exercită o forță de reacțiune \vec{F}_{BS} asupra sforii. Iarăși, conform legii a treia, $\vec{F}_{SB} = -\vec{F}_{BS}$.

Să presupunem că sfoara are o masă m_s . Atunci pentru a urni blocul și sfoara din repaus, trebuie să avem o accelerație, să zicem \vec{a} . Singurele forțe care acționează asupra sforii sînt \vec{F}_{OS} și \vec{F}_{BS} , astfel încît forța rezultantă exercitată asupra ei este $\vec{F}_{OS} + \vec{F}_{BS}$ și aceasta trebuie să fie diferită de zero dacă sfoara trebuie accelerată. În adevăr, din legea a doua avem

$$\vec{F}_{OS} + \vec{F}_{BS} = m_s \vec{a}.$$

Deoarece forțele și accelerația acționează de-a lungul aceleiași linii, putem omite notația vectorială și scrie relația dintre intensitățile vectorilor, anume

$$F_{OS} - F_{BS} = m_s a.$$

Vedem deci că în general \vec{F}_{OS} nu are aceeași mărime ca \vec{F}_{BS} (fig. 5-3, b). Aceste două forțe acționează asupra aceluiași corp și nu sînt acțiunea și reacțiunea.

Conform legii a treia a lui Newton, mărimea lui \vec{F}_{OS} este totdeauna egală cu mărimea lui \vec{F}_{SO} , iar mărimea lui \vec{F}_{BS} este totdeauna egală cu mărimea lui \vec{F}_{SB} . Totuși, numai dacă accelerația \vec{a} a sistemului este nulă vom avea perechea de forțe \vec{F}_{OS} și \vec{F}_{SO} egală ca mărime cu perechea de forțe \vec{F}_{SB} și \vec{F}_{BS} (fig. 5-3, a).

Numai în acest caz particular, ne-am putea imagina că sfoara transmite pur și simplu forța exercitată de om către bloc fără schimbare. Același rezultat rămîne valabil în principiu dacă $m_s = 0$. În practică nu avem niciodată o sfoară fără masă. Putem însă adesea neglija masa unei sfori, în care caz se presupune că sfoara (firul) transmite o forță neschimbată. Forța exercitată în fiecare punct al sforii se numește *tensiune* din acel punct. Putem măsura tensiunea în oricare punct al sforii tăind o lungime corespunzătoare din ea și inserînd un dinamometru cu resort; tensiunea se citește pe scală. Tensiunea este aceeași în toate punctele sforii numai dacă sfoara nu este accelerată sau dacă este presupusă fără masă.

Exemplul 2. Să considerăm un resort legat de tavan, de celălalt capăt fiind atârnat un bloc în repaus (fig. 5-4, a). Deoarece nu este accelerat nici un corp, toate forțele exercitate asupra oricărui corp vor da o rezultantă vectorială nulă. De exemplu, forțele exercitate asupra blocului suspendat sînt \vec{T} , tensiunea din resortul întins, care trage masa vertical în sus și \vec{G} , atracția Pămîntului care acționează vertical în jos asupra corpului, numită greutatea sa. Aceste forțe sînt desenate în figura 5-4, b, unde se arată numai blocul, pentru claritate. Alte forțe nu acționează asupra blocului.

În legea a doua a lui Newton, \vec{F} reprezintă suma tuturor forțelor care acționează asupra corpului, astfel încît pentru bloc

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{G}.$$

Blocul este în repaus, deci accelerația sa este nulă. $\vec{a} = 0$. Prin urmare, din relația $\vec{F} = m\vec{a}$, obținem $\vec{T} + \vec{G} = 0$ sau

$$\vec{T} = -\vec{G}.$$

Forțele acționează de-a lungul aceleiași drepte, astfel încît intensitățile lor sînt egale sau

$$T = G.$$

Prin urmare, tensiunea din resort este o măsură exactă a greutății blocului. Vom folosi acest rezultat mai tîrziu în prezentarea unui procedeu static de măsură a forțelor.

Este instructiv de examinat forțele exercitate asupra resortului; ele sînt arătate în figura 5-4, c. \vec{T}' este tracțiunea exercitată de bloc asupra resortului și reprezintă forța de reacțiune a forței de acțiune \vec{T} . Forța \vec{T}' are de aceea aceeași intensitate ca și \vec{T} , care este \vec{G} . Forța \vec{P} este tracțiunea dirijată în sus a tava-

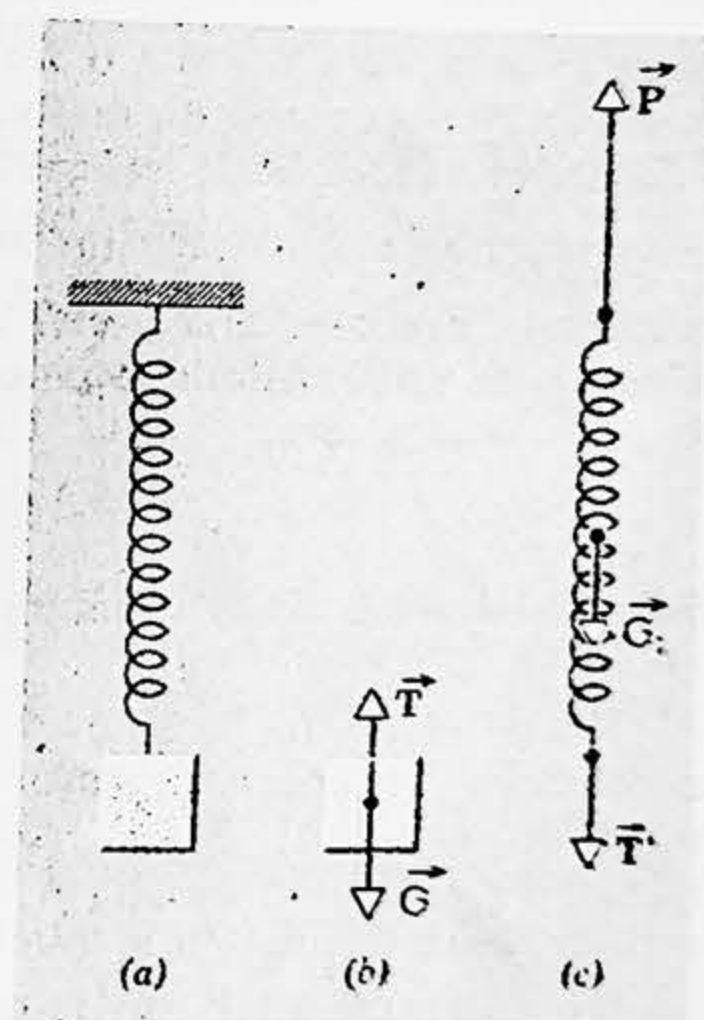


Figura 5-4. Exemplul 2. (a) Un bloc este suspendat de un resort. (b) Diagrama corpului liber care arată toate forțele verticale exercitate asupra blocului. (c) O diagramă analoagă pentru forțele verticale care acționează asupra resortului.

nului asupra resortului, iar \vec{G}_1 este greutatea resortului, adică atracția exercitată de Pământ asupra lui. Deoarece resortul este în repaus și toate forțele acționează de-a lungul aceleiași drepte, avem:

$$\vec{P} + \vec{T}' + \vec{G}_1 = 0$$

SAU

$$P = G + G_1.$$

Tavanul trage deci de resort cu o forță a cărei intensitate este egală cu suma greutăților blocului și resortului.

Din a treia lege a mișcării, forța exercitată de resort asupra tavanului, \vec{P}' trebuie să fie egală în modul cu \vec{P} , care reprezintă forța de reacțiune, opusă forței de acțiune \vec{P} . Forța \vec{P}' are deci modulul $G + G_1$.

În general, resortul exercită forțe diferite asupra corpurilor legate de capetele sale, deoarece $P' \neq T$. În cazul particular în care greutatea resortului este neglijabilă, $G_1 = 0$ și $P' = G = T$. Prin urmare un resort de *greutate neglijabilă* poate fi considerat ca transmițând o forță de la un capăt la celălalt fără vreo schimbare.

Este instructiv să clasificăm toate forțele din această problemă după perechile acțiune-reacțiune. Reacțiunea la forța \vec{G} , exercitată de Pământ asupra blocului, trebuie să fie o forță exercitată de către bloc asupra Pământului. În mod analog, reacțiunea la forța \vec{G}_1 este o forță exercitată de resort asupra Pământului. Deoarece Pământul este atât de masiv, nu ne putem aștepta ca aceste forțe să imprimă Pământului o accelerație sesizabilă. Deoarece Pământul nu este arătat în diagramele noastre, aceste forțe nu au fost arătate. Forțele \vec{T} și \vec{T}' sînt acțiunea și reacțiunea, așa cum sînt \vec{P} și \vec{P}' . Observăm că deși $\vec{T} = -\vec{G}$ în problema noastră, aceste forțe nu constituie o pereche acțiune — reacțiune, deoarece ele acționează asupra aceluiași corp.

5-6. Sisteme de unități mecanice

Unitatea de forță este definită ca o forță care produce o unitate de accelerație atunci cînd este aplicată unei unități de masă. Unitatea de masă în sistemul MKS (metru, kilogram, secundă) este *kilogramul* (fig. 5-1). Unitatea de masă în sistemul CGS (centimetru, gram, secundă) este *gramul*, definit ca a mia parte a masei de un kilogram.

În sistemul MKS unitatea de forță este egală cu forța care accelerează un kilogram-masă cu 1 m/s^2 ; am văzut că această unitate se numește *newton* (N). În sistemul CGS, care include sistemul lui Gauss, unitatea de forță este egală cu forța care accelerează un gram-masă cu 1 cm/s^2 . Această unitate se numește *dynă*. Deoarece $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ și $1 \text{ m/s}^2 = 10^2 \text{ cm/s}^2$, rezultă că $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne}$.

În fiecare din sistemele noastre de unități am ales masa, lungimea și timpul ca mărimi fundamentale. Au fost adoptate etaloane pentru aceste mărimi suplimentare și definite unități de măsură cu ajutorul

acestor etaloane. Forța apare ca o mărime derivată determinată din relația $\vec{F} = m\vec{a}$.

În sistemul tehnic de unități însă, forța, lungimea și timpul sînt alese ca mărimi fundamentale, iar masa este o mărime derivată. În acest sistem masa este determinată din relația $m = F/a$. Etalonul și unitatea de forță în acest sistem este kilogramul-forță. Kilogramul-forță a fost definit ca fiind egal cu forța de atracție a Pămîntului exercitată asupra kilogramului-masă etalon într-un anumit loc de pe suprafața Pămîntului. Putem obține această forță pe o cale operațională, atîrnînd corpul etalon de un resort într-un anumit punct pe suprafața Pămîntului, unde accelerația gravitațională este considerată standard sau normală, și anume $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Inițial această accelerație era prescrisă nivelului mării și paralelei de 45° (astăzi această din urmă accelerație are valoarea $g_0 = 9,80616 \text{ m/s}^2$). Dacă corpul este în repaus forța de greutate exercitată de Pămînt asupra corpului, adică greutatea sa G , este echilibrată de tensiunea din resort. Prin urmare $T = G = 1 \text{ kgf}$, în acest caz. Putem folosi acum acest resort (sau oricare altul astfel etalonat) pentru a exercita o forță de 1 kgf asupra oricărui alt corp; pentru a face aceasta, legăm pur și simplu resortul de un alt corp și-l întindem cu aceeași cantitate ca și pentru forța de 1 kgf . Corpul etalon este etalonul de masă de 1 kg . Accelerația gravitațională standard sau normală este aleasă prin convenție, după cum am spus, $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Kilogramul forță poate fi deci definit din $F = ma$ ca fiind forța care accelerează o masă de 1 kg cu o accelerație de $9,80665 \text{ m/s}^2$.

Aceasta ne permite să comparăm kilogramul forță cu newtonul:

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ m/s}^2 = 9,80665 \text{ N} \cong 9,8 \text{ N}.$$

Unitatea tehnică de masă poate fi acum dedusă; ea se definește ca masa unui corp a cărui accelerație este de 1 m/s^2 atunci cînd asupra sa acționează o forță de 1 kgf . Astfel, în sistemul tehnic

$$F [\text{kgf}] = m [\text{u.t.m.}] \times a [\text{m/s}^2].$$

Legal, kilogramul este unitate de masă, iar kilogramul-forță este unitate de forță, deși în practica inginerescă kilogramul este adesea tratat ca unitate de forță sau de greutate. De aici s-au născut termenii kilogram-masă și kilogram-forță. Unitatea tehnică de masă este un corp cu masa de $9,80665 \text{ kg}$; nu este confecționat nici un etalon standard de metal pentru unitatea tehnică de masă, ci este definit cu ajutorul etalonului masă din MKS. Kilogramul-forță este forța care imprimă etalonului masă de 1 kg o accelerație egală cu accelerația gravitațională standard de $9,80665 \text{ m/s}^2$. După cum vom vedea mai tîrziu, accelerația gravitațională variază cu distanța de la centrul Pămîntului și această accelerație „standard” sau „normală” este deci valoarea accelerației la o anumită distanță de la centrul Pămîntului. (După cum am spus, accelerația normală este aproximativ egală cu accelerația de la nivelul mării și paralela 45° , aceasta din urmă fiind $g_0 = 9,80616 \text{ m/s}^2$.)

În această carte doar forțele vor fi măsurate uneori în kilogram-forță (nu vom folosi unitatea tehnică de masă).

Unitățile de forță, masă și accelerație în cele trei sisteme sînt rezumate în tabela 5-3.

UNITĂȚILE ÎN $F=ma$

Sistemul de unități	Forța	Masa	Accelerația
MKS	newton (N)	kilogram (kg)	m/s^2
CGS (Gauss)	dynă (dyn)	gram (g)	cm/s^2
MKfS (tehnice)	kilogram-forță (kgf)	u.t.m.	m/s^2

Dimensiunile forței sînt aceleași ca dimensiunile masei înmulțite cu accelerația. Într-un sistem în care masa, lungimea și timpul sînt mărimi fundamentale, dimensiunile forței sînt deci: $masă \times lungime/timp^2$ sau MLT^{-2} . Vom adopta prin convenție masa, lungimea și timpul ca mărimi mecanice fundamentale.

Reamintindu-ne că etaloanele noastre de lungime și timp sînt etaloane atomice, unii au făcut speculații constînd în faptul că kilogramul etalon ar putea fi înlocuit într-o bună zi printr-un etalon atomic de masă. Acest nou etalon ar putea consta dintr-un anumit număr specificat de atomi de un anumit tip a căror masă totală în circumstanțe adecuate să fie 1 kg. În momentul de față însă precizia cu care pot fi comparate masele, cum ar fi cu o balanță, depășește precizia cu care putem determina un număr exact de atomi care să constituie o masă dată.

5-7. Legile forței (tipuri de forță)

Cele trei legi ale mișcării pe care le-am descris constituie doar o parte din programul mecanicii pe care l-am schițat în paragraful 5-1. Rămîn de investigat *legile forței*, care reprezintă procedeele cu ajutorul cărora calculăm forța ce acționează asupra unui corp dat pe baza proprietăților corpului și a mediului său. Legea a doua a lui Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (5-3)$$

este în esență, nu o lege a naturii ci o definiție a forței. Trebuie să identificăm diferite funcții de tipul:

$$\vec{F} = \text{funcție de proprietățile particulei și ale mediului} \quad (5-4)$$

astfel încît să putem, în adevăr, elimina pe \vec{F} din ecuațiile (5-3) și (5-4), obținînd astfel o ecuație care să ne permită să calculăm accelerația unei particule în termenii proprietăților particulei și ale mediului său. Vedem de aici clar că forța este un concept care leagă accelerația particulei, pe de o parte, de proprietățile particulei, iar pe de altă parte de proprietățile mediului în care ea se află. Am arătat mai înainte că un criteriu pentru a declara programul mecanicii ca fiind reușit ar fi descoperirea faptului că există în adevăr legi *simple* de tipul ecuației (5-4). Se constată că acesta este chiar cazul și acest fapt constituie rațiunea esențială pentru care noi „credem” în legile mecanicii clasice. Dacă legile forței ar fi fost foarte complicate, n-am fi rămas cu sentimentul că am reușit să pătrundem în mecanismele naturii.

Numărul mediilor posibile pentru o particulă accelerată este atât de mare încât o discuție amănunțită a tuturor legilor forței nu este realizabilă în acest capitol. Vom indica însă în tabela 5-4 legile forței care se aplică la cele cinci situații particulă-mediu din tabela 5-1. În ocazii adecvate din text vom discuta aceste legi ale forței, precum și altele, în detaliu; multe dintre legile din tabela 5-4 sînt aproximații sau cazuri particulare.

Tabela 5-4

LEGILE FORȚEI PENTRU SISTEMELE DIN TABELA 5-1

Sistemul	Legea forței
1. Un bloc tras de un resort întins, pe o suprafață orizontală aspră	(a) Forța resortului: $\vec{F} = -k\vec{x}$ unde \vec{x} este alungirea resortului și k este o constantă care caracterizează resortul; \vec{F} este îndreptat spre dreapta; vezi capitolul 15. (b) Forța de frecare: $\vec{F} = -\mu mg$, unde μ este coeficientul de frecare și mg este greutatea blocului; \vec{F} este îndreptat spre stînga; vezi capitolul 6.
2. O minge de golf în zbor.	$\vec{F} = -mg$; \vec{F} este îndreptat în jos (vezi secțiunea 5-8)
3. Un satelit artificial	$\vec{F} = GmM/r^2$, unde G este constanta gravitațională, M masa Pămîntului și r raza orbitei; \vec{F} este îndreptat către centrul Pămîntului; vezi capitolul 16. Aceasta este legea gravitației universale a lui Newton
4. Un electron în vecinătatea unei sfere încărcate	$\vec{F} = (1/4\pi\epsilon_0)eQ/r^2$, unde ϵ_0 este o constantă, e este sarcina electronului, Q este sarcina sferei și r este distanța de la electron pînă la centrul sferei; \vec{F} este îndreptat spre dreapta; vezi capitolul 27. Aceasta este legea lui Coulomb din electrostatică.
5. Doi magneți bară	$\vec{F} = (3\mu_0/2\pi)\mu^2/r^4$, unde μ_0 este o constantă, μ este momentul dipolar magnetic al fiecărui magnet și r este distanța dintre centrele magneților; presupunem că $r \gg l$, unde l este lungimea fiecărui magnet; \vec{F} este îndreptat spre dreapta.

5-8. Greutatea și masa

Greutatea unui corp este forța gravitațională exercitată asupra lui de către Pămînt. Greutatea, fiind o forță, este o mărime vectorială. Direcția acestui vector este direcția forței gravitaționale, adică către centrul Pămîntului. Mărimea greutății se exprimă în unități de forță, precum newtonul sau kilogramul-forță.

Dacă un corp de masă m este lăsat să cadă liber, accelerația sa este egală cu accelerația gravitației \vec{g} și forța care acționează asupra lui este egală cu greutatea sa \vec{G} . Legea a doua a lui Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, aplicată unui corp în cădere liberă, ne dă $\vec{G} = m\vec{g}$. Atât \vec{G} cât și \vec{g} sînt vectori dirijați către centrul Pămîntului. Putem scrie de aceea

$$G = mg, \quad (5-5)$$

unde G și g sînt intensitățile vectorului greutate și vectorului accelerație. Pentru a împiedica un corp să cadă trebuie să exercităm asupra lui o forță îndreptată în sus și egală în modul cu G , astfel încît forța netă să fie nulă. În figura 5-4, a tensiunea din resort dă o astfel de forță.

Am stabilit mai înainte că g are aceeași valoare pentru toate obiectele din același loc, după cum arată experiența. De aici rezultă că raportul greutăților a două obiecte trebuie să fie egal cu raportul maselor lor. Prin urmare, o balanță, care în realitate este un instrument pentru a compara două forțe dirijate în jos, poate fi folosită în practică pentru a compara masele. Dacă o cantitate de sare de pe un platan (taler) al balanței apasă în jos asupra platanului cu aceeași forță ca și un gram-masă etalon de pe celălalt platan, știm¹ că masa sării este egală cu un gram. Spunem că sarea „cîntărește” un gram, deși gramul este o unitate de masă, nu de greutate. Totuși, este totdeauna important să facem o distincție clară între greutate și masă.

Am văzut că greutatea unui corp, forța exercitată în jos de către Pămînt asupra acelui corp, este o mărime vectorială. Masa unui corp este o cantitate scalară. Relația cantitativă dintre greutate și masă este dată de $\vec{G} = m\vec{g}$. Deoarece \vec{g} variază de la punct la punct pe suprafața Pămîntului, \vec{G} , adică greutatea unui corp de masă m , este diferită în diferite localități. Astfel, greutatea unui kilogram-masă într-o localitate unde g este $9,80 \text{ m/s}^2$ este $9,80 \text{ N}$; într-o localitate unde g este $9,78 \text{ m/s}^2$ același kilogram-masă are greutatea $9,78 \text{ N}$. Dacă aceste greutăți au fost determinate prin măsurarea alungirii unui resort, diferența în greutate a aceluiași kilogram-masă în două localități diferite se va manifesta într-o alungire ușor diferită a resortului în aceste două localități. Prin urmare, spre deosebire de masa unui corp, care este o proprietate intrinsecă a corpului, greutatea unui corp depinde de poziția sa relativ la centrul Pămîntului. Dinamometrul (resort cu scală) dă indicații diferite, balanța dă aceeași indicație, în diferite locuri de pe Pămînt.

Vom generaliza conceptul de greutate în capitolul 16 în care discutăm gravitația universală. Vom vedea acolo că greutatea unui corp este nulă în regiunile de spațiu unde efectele gravitaționale sînt nule, deși efectele inerțiale și deci masa corpului rămîn neschimbate față de cele de pe Pămînt. Într-o navă cosmică, care nu se află sub influența gravitației, este o chestiune banală de a ridica un bloc mare de plumb ($\vec{G} = 0$).

¹ Trebuie făcute corecții pentru forța ascensională datorită diferitelor volume de aer dislocuite de sare și de etalon. Aceste corecții sînt discutate în capitolul 17.

dar astronautul se va lovi totuși la degetele piciorului dacă va lovi cu acestea blocul ($m \neq 0$).

Este necesară aceeași forță pentru a accelera un corp în spațiul lipsit de gravitație ca și pentru a-l accelera de-a lungul unei suprafețe orizontale fără frecări, pe Pământ, deoarece masa sa este aceeași în fiecare loc. Dar este necesară o forță mai mare pentru a ține corpul împotriva forței de atracție a Pământului, pe suprafața Pământului, decât pentru a-l ține în spațiu, deoarece greutatea sa este diferită în fiecare loc.

Adesea, în loc de a da masa, ni se dă greutatea corpului asupra căruia se exercită forțele. Accelerația \vec{a} produsă de o forță \vec{F} care acționează asupra unui corp a cărui greutate are valoarea \vec{G} , poate fi obținută combinând ecuația (5-3) cu ecuația (5-5). Astfel, din $\vec{F} = m\vec{a}$ și $G = mg$ obținem

$$m = G/g, \text{ astfel încît } \vec{F} = (G/g)\vec{a}. \quad (5-6)$$

Cantitatea G/g joacă rolul lui m din ecuația $F = ma$ și este de fapt masa corpului a cărui greutate este G . De exemplu, un om a cărui greutate este 70 kgf într-un punct unde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ are o masă $m = G/g = 70 \text{ kgf}/(9,8 \text{ m/s}^2) = 70 \text{ kg}$. Observăm că greutatea sa într-un alt punct unde $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ este $G = mg = 70 \text{ kg} \cdot 9,82 \text{ m/s}^2 \approx 71 \text{ kgf}$.

5-9. Un procedeu static de măsurare a forțelor

În secțiunea 5-3 am definit forța prin măsurarea accelerației imprimată unui corp etalon prin tracțiunea sa cu un resort întins. Aceasta poate fi numită metodă dinamică de măsurare a forței. Deși convenabilă pentru scopurile definiției, ea nu constituie un procedeu practic pentru măsurarea forțelor. O altă metodă de măsurare a forțelor este bazată pe măsurarea schimbării formei sau dimensiunilor unui corp (de exemplu a unui resort) asupra căruia se aplică forța atunci când corpul nu este accelerat. Acest procedeu se poate numi metodă statică de măsurare a forțelor.

Ideea metodei statice este de a folosi faptul că atunci când un corp, sub acțiunea mai multor forțe, are accelerație nulă, suma vectorială a tuturor forțelor care acționează asupra corpului trebuie să fie zero. Aceasta este, desigur, exact conținutul primei legi a mișcării. O singură forță acționând asupra unui corp ar produce o accelerație; această accelerație poate fi anulată dacă aplicăm corpului o altă forță egală în modul dar opusă ca sens. În practică căutăm să ținem corpul în repaus. Dacă acum alegem o anumită forță ca fiind unitatea noastră de forță, sîntem în stare să măsurăm forțele. Forța exercitată de Pământ asupra unui corp etalon într-un anumit punct poate fi luată ca unitate de forță, de exemplu.

Instrumentul cel mai des folosit pentru măsurarea forțelor pe această cale este dinamometrul (cîntar cu resort). El constă dintr-un resort în spirală avînd la un capăt un ac indicator, care se mișcă în dreptul unei scale. Forța exercitată asupra dinamometrului schimbă lungimea

resortului. Dacă un corp cîntărind 1,00 N este atîrnat, de resort, resortul se lungește pînă cînd forța exercitată de resort asupra corpului este egală în modul dar opusă ca sens cu greutatea corpului. Se poate face un marcaj pe scală în dreptul acului notînd „1,00 N”. Analog, greutatele de 2,00 N, 3,00 N etc. pot fi atîrnate de resort și făcute marcajele corespunzătoare pe scală în dreptul indicatorului în fiecare caz. În modul acesta resortul va fi etalonat. Presupunem că forța exercitată asupra resortului este totdeauna aceeași cînd acul indicator se află în aceeași poziție. Cîntarul etalonat poate acum fi folosit pentru a măsura oricare forță necunoscută, nu numai forța exercitată de Pămînt asupra unui corp.

Legea a treia este folosită în mod tacit în procedeul nostru static deoarece noi presupunem că forța exercitată de resort asupra corpului este aceeași în modul cu forța exercitată de corp asupra resortului. Această din urmă forță este forța pe care vrem s-o măsurăm. Legea întîi este de asemenea folosită, deoarece presupunem că \vec{r} este zero atunci cînd \vec{a} este zero. Trebuie subliniat din nou aici faptul că dacă accelerația n-ar fi zero, corpul de greutate \vec{G} n-ar întinde resortul cu aceeași lungime ca în cazul cînd $\vec{a}=0$. În adevăr, dacă resortul și corpul atașat, de greutate \vec{G} ar cădea liber sub acțiunea gravitației astfel încît $\vec{a}=\vec{g}$, resortul nu s-ar întinde deloc și tensiunea sa ar fi zero.

5-10. Unele aplicații ale legilor mișcării ale lui Newton

Este util să prezentăm cîteva procedee de rezolvare a problemelor în mecanica clasică și să le ilustrăm prin mai multe exemple. Legea a doua a lui Newton afirmă că suma vectorială a tuturor forțelor care acționează asupra unui corp este egală cu masa înmulțită cu accelerația sa. Prima treaptă în rezolvarea problemei este deci: (1) Identificăm corpul la a cărui mișcare se referă problema. Oricît de evident ar părea aceasta, lipsa de claritate în ceea ce privește ce anume a fost sau trebuie ales drept „corp”, este o sursă importantă de greșeli. (2) Odată „corpul” ales, ne îndreptăm atenția asupra obiectelor din „mediu” deoarece aceste obiecte (planele înclinate, resorturile, firele, Pămîntul etc.) exercită forțe asupra corpului. Trebuie să fim clarificați asupra naturii acestor forțe. (3) Următorul pas este de a alege un sistem de referință (inercial) adecvat. Vom alege originea și vom orienta axele de coordonate astfel încît să simplificăm sarcina treptei următoare cît mai mult posibil. (4) Facem acum o diagramă separată a corpului singur, arătînd reperul și toate forțele care acționează asupra corpului. Aceasta se numește diagrama corpului liber (*eliberat de legături*). (5) În sfîrșit, aplicăm legea a doua a lui Newton sub forma ecuației (5-2), fiecărei componente a forței și accelerației.

Exemplele următoare ilustrează metoda de analiză folosită în aplicarea legilor lui Newton ale mișcării. Fiecare corp este tratat ca și cum ar fi un punct material de o anumită masă, astfel încît forțele care acționează asupra lui pot fi presupuse ca acționînd într-un punct. Firele

și scripetii sînt considerați ca avînd masă neglijabilă. Deși unele situații alese pentru analiză pot părea simple și artificiale, ele constituie prototipul pentru multe situații reale interesante; dar mai important este faptul că metoda de analiză — care este lucrul principal pentru înțelegere — este aplicabilă tuturor situațiilor moderne și complicate ale mecanicii clasice, chiar lansarea unei nave spre Marte.

Exemplul 3. Figura 5-5, a arată o greutate G atîrnată de fire. Să considerăm nodul de la joncțiunea celor trei fire ca fiind „corpul” nostru. Corpul rămîne în repaus sub acțiunea celor trei forțe arătate în figura 5-5, b. Să presupunem că ni se dă valoarea uneia dintre aceste forțe. Cum putem găsi valoarea celorlalte forțe?

\vec{F}_A , \vec{F}_B și \vec{F}_C sînt toate forțele care acționează asupra corpului. Deoarece corpul nu este accelerat (este chiar în repaus), $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$. Alegînd axele x și y așa cum este arătat în figură, putem scrie această ecuație vectorială sub forma a trei ecuații scalare:

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0,$$

$$F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} = 0,$$

folosind ecuația (5-2). Cea de a treia ecuație scalară pentru axa z este pur și simplu

$$F_{Az} = F_{Bz} = F_{Cz} = 0.$$

Adică vectorii se află toți în planul $x-y$, astfel încît ei n-au nici o componentă pe direcția z .

Din figură vedem că

$$F_{Ax} = -F_A \cos 30^\circ = -0,866 F_A,$$

$$F_{Ay} = F_A \sin 30^\circ = 0,500 F_A$$

și

$$F_{Bx} = F_B \cos 45^\circ = 0,707 F_B,$$

$$F_{By} = F_B \sin 45^\circ = 0,707 F_B.$$

De asemenea,

$$F_{Cy} = -F_C = -G,$$

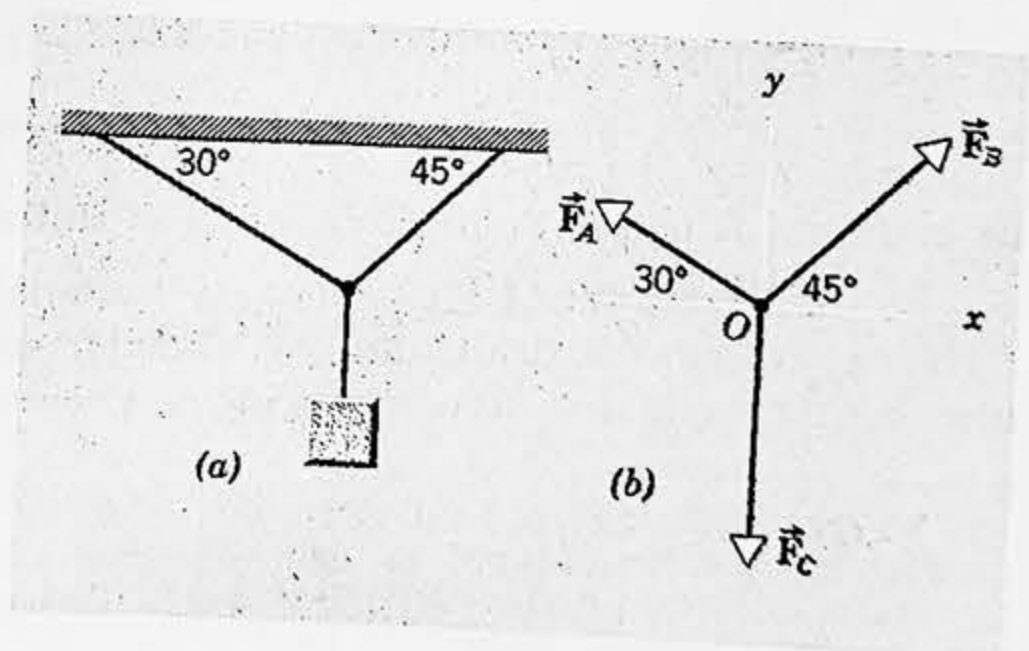


Figura 5-5. Exemplul 3. (a) Un corp este suspendat prin fire. (b) Diagrama corpului liber (diagrama forțelor) care arată toate forțele ce acționează asupra nodului. Se presupune că firele au greutate neglijabilă.

deoarece firul C servește pur și simplu pentru a transmite forța de la un capăt al joncțiunii pînă la celălalt capăt al său. Substituind aceste rezultate în ecuațiile noastre originale, obținem

$$\begin{aligned} -0,866 F_A + 0,707 F_B &= 0, \\ 0,500 F_A + 0,707 F_B - G &= 0. \end{aligned}$$

Dacă ni se dă modulul oricăreia dintre aceste trei forțe, putem rezolva aceste ecuații în raport cu celelalte două. De exemplu, dacă $G=100$ N obținem $F_A=-73,7$ N și $F_B=89,6$ N.

Exemplul 4. Vrem să analizăm mișcarea unui bloc pe un plan înclinat neted.

(a) *Cazul static.* Figura 5-6, a arată un bloc de masă m ținut în repaus pe un plan neted, înclinat sub un unghi θ față de orizontală cu ajutorul unui fir prins de peretele vertical. Forțele care acționează asupra blocului sînt arătate în figura 5-6, b. \vec{F}_1 este forța exercitată asupra blocului de către fir; $m\vec{g}$ este forța exercitată asupra blocului de către Pămînt, adică este greutatea sa; \vec{F}_2 este forța exercitată asupra blocului de către suprafața înclinată. \vec{F}_2 , numită forță normală, este perpendiculară pe suprafața de contact, deoarece nu există nici o forță de frecare între suprafețe¹. Dacă ar exista o forță de frecare, \vec{F}_2 ar avea o componentă paralelă cu planul înclinat. Deoarece vrem să analizăm mișcarea blocului, alegem **TOATE forțele care acționează ASUPRA blocului**. Studentul trebuie să observe că blocul va exercita forțe asupra altor corpuri din mediul său înconjurător (firul, Pămîntul, suprafața planului înclinat) în conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii; aceste forțe nu sînt însă necesare pentru a determina mișcarea blocului, deoarece ele nu acționează asupra blocului.

Să presupunem că θ și m sînt date. Cum vom găsi pe F_1 și F_2 ? Deoarece blocul nu este accelerat, obținem

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0.$$

Este convenabil să alegem axa x a sistemului nostru de referință de-a lungul planului înclinat, iar axa y perpendiculară pe planul înclinat (fig. 5-6, b). Cu această alegere a coordonatelor, numai o singură forță, $m\vec{g}$, trebuie descompusă în componente pentru rezolvarea problemei. Cele două ecuații scalare care se obțin prin descompunerea lui $m\vec{g}$ după axele x și y sînt

$$F_1 - mg \sin \theta = 0 \quad \text{și} \quad F_2 - mg \cos \theta = 0,$$

de unde se pot obține F_1 și F_2 , dacă θ și m sînt date.

(b) *Cazul dinamic.* Să presupunem acum că firul este tăiat. Atunci forța \vec{F}_1 , forța de tracțiune a firului asupra blocului, va dispărea. Forța rezultantă asupra blocului nu va mai fi zero și blocul va fi accelerat. Care este accelerația sa?

¹ Forța normală este un exemplu de forță restrictivă care limitează libertatea de mișcare pe care corpul ar avea-o altfel. Ea este o forță elastică provenită de la micile deformații ale corpurilor în contact, corpuri care nu sînt perfect rigide așa cum presupunem adesea în mod tacit.

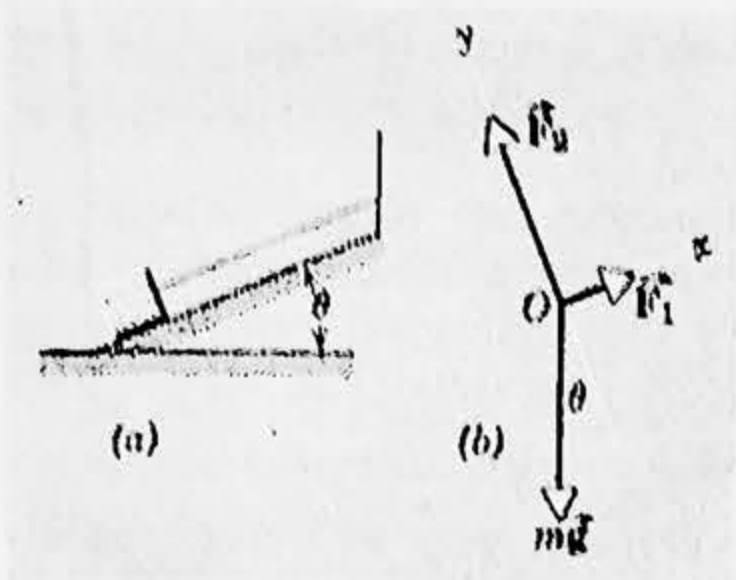


Figura 5-6. Exemplul 4. (a) Un bloc este ținut pe un plan înclinat neted cu ajutorul unui fir. (b) Diagrama corpului liber care arată toate forțele ce acționează asupra blocului.

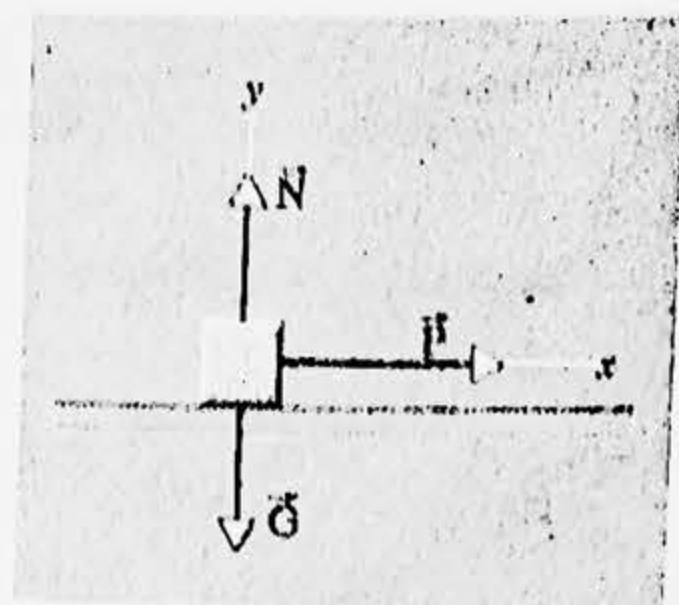


Figura 5-7. Exemplul 5. Un bloc este tras deasupra unei mese netede. Sunt arătate forțele care acționează asupra blocului.

Din ecuația (5-2) avem $F_x = ma_x$ și $F_y = ma_y$. Folosind aceste ecuații obținem

$$F_y - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

și

$$-mg \sin \theta = ma_x,$$

ceea ce dă

$$a_y = 0, \quad a_x = -g \sin \theta.$$

Accelerația este dirijată în jos de-a lungul planului înclinat având modulul $g \sin \theta$.

Exemplul 5. Să considerăm un bloc de masă m tras de-a lungul unei suprafețe orizontale netede de către o forță orizontală \vec{P} , așa cum este arătat în figura 5-7. \vec{N} este forța normală exercitată asupra blocului de către suprafața fără frecări, iar \vec{G} este greutatea blocului.

(a) Dacă blocul are o masă de 2,0 kg, care este forța normală?

Din legea a doua a mișcării, cu $a_y = 0$, obținem

$$F_y = ma_y \quad \text{sau} \quad N - G = 0$$

Prin urmare, $N = G = mg = 2,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ N}$.

(b) Ce forță F este necesară pentru a imprima blocului o viteză orizontală de 4,0 m/s în 2,0 s pornind din repaus?

Accelerația a_x rezultă din

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t} = \frac{4,0 \text{ m/s} - 0}{2,0 \text{ s}} = 2,0 \text{ m/s}^2.$$

Din legea a doua, $F_x = ma_x$ sau $P = ma_x$. Forța P este deci

$$P = ma_x = 2,0 \text{ kg} \cdot 2,0 \text{ m/s}^2 = 4,0 \text{ N}.$$

Exemplul 6. Figura 5-8, a arată un bloc de masă m_1 pe o suprafață orizontală netedă tras de un fir legat de un bloc de masă m_2 atârnat peste un scripete. Presupunem că scripetele nu are masă și este lipsit de frecări și că el servește doar

8.

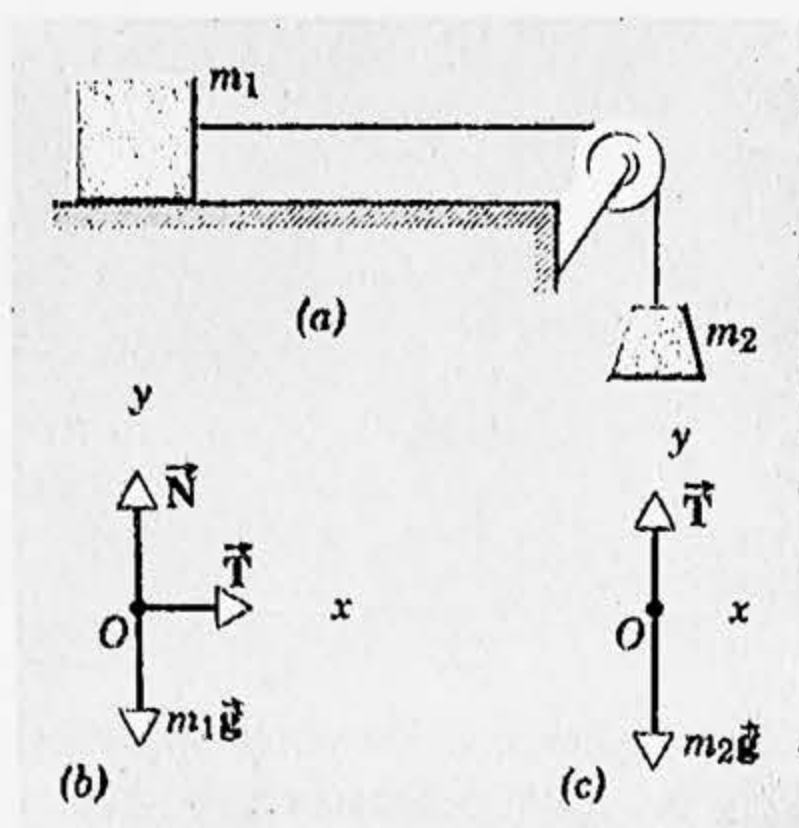


Figura 5-8. Exemplul 6. (a) Două corpuri sînt legate printr-un fir; m_1 se află pe o masă netedă, m_2 atîrnă liber. (b) Diagrama corpului liber arată toate forțele ce acționează asupra lui m_1 . (c) O diagramă analogă pentru m_2 .

Pentru a-l determina pe T trebuie să studiem mișcarea blocului m_2 . Forțele care acționează asupra lui m_2 sînt arătate în figura 5-8, c. Deoarece firul și blocul sînt accelerate, nu putem conchide că T este egal cu m_2g . În adevăr, dacă T ar fi egal cu m_2g , forța rezultantă asupra lui m_2 ar fi zero, condiție valabilă numai dacă sistemul nu este accelerat.

Ecuția mișcării pentru blocul suspendat este

$$m_2g - T = m_2a_{2y}. \quad (5-8)$$

Direcția tensiunii din fir se schimbă în dreptul scripetelui și, deoarece firul are o lungime fixă, este clar că

$$a_{2y} = a_{1x},$$

astfel încît putem reprezenta accelerația sistemului ca fiind pur și simplu a . Obținem atunci din ecuațiile (5-7) și (5-8)

$$m_2g - T = m_2a \quad (5-9)$$

și

$$T = m_1a.$$

Acestea dau

$$m_2g = (m_1 + m_2)a \quad (5-10)$$

sau

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

și

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad (5-11)$$

ceea ce ne dă accelerația sistemului a și tensiunea din fir T .

pentru a schimba direcția tensiunii din fir în acel punct. Să se afle accelerația sistemului și tensiunea din fir.

Să presupunem că alegem blocul de masă m_1 drept corp a cărui mișcare o studiem. Forțele care acționează asupra acestui bloc, considerat punct material, sînt arătate în figura 5-8, b. \vec{T} , tensiunea din fir, trage corpul spre dreapta; $m_1\vec{g}$ este forța exercitată în jos de Pămînt asupra blocului și \vec{N} este forța verticală exercitată asupra blocului de masă netedă. Blocul va fi accelerat numai în direcția x , astfel încît $a_{1y} = 0$. Putem de aceea scrie

$$N - m_1g = 0 = m_1a_{1y}$$

și

$$T = m_1a_{1x}. \quad (5-7)$$

Din aceste ecuații conchidem că $N = m_1g$. Nu cunoaștem pe T , deci nu putem rezolva în raport cu a_{1x} .

Observăm că tensiunea din fir este totdeauna mai mică decât m_2g . Aceasta rezultă clar din ecuația (5-11), care poate fi scrisă astfel

$$T = m_2g \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Observăm de asemenea că a este totdeauna mai mic decât g , adică decât accelerația datorită gravitației. Numai dacă m_1 este egal cu zero, ceea ce înseamnă că nu există nici un bloc pe masă, obținem $a = g$ (din ecuația 5-10). În acest caz $T = 0$ (din ecuația 5-11).

Putem interpreta ecuația (5-10) într-un mod simplu. Forța netă neechilibrată exercitată asupra sistemului de masă $m_1 + m_2$ este m_2g . Prin urmare, din $F = ma$, obținem direct ecuația 5-10.

Pentru a concretiza exemplul, să presupunem că $m_1 = 2,0$ kg și $m_2 = 1,0$ kg. Atunci

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{1}{3} g = 3,3 \text{ m/s}^2$$

și

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2}{3} \cdot 9,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 6,5 \text{ N}.$$

Exemplul 7. Să considerăm două corpuri de mase inegale legate printr-un fir care trece peste un scripete fără frecări și fără masă, așa cum este arătat în figura 5-9, a. Fie m_2 mai mare decât m_1 . Să se afle tensiunea din fir și accelerația corpurilor.

Vom considera accelerația în sus drept pozitivă. Dacă accelerația lui m_1 este a , accelerația lui m_2 trebuie să fie $-a$. Forțele care acționează asupra lui m_1 și asupra lui m_2 sunt arătate în figura 5-9, b în care T reprezintă tensiunea din fir.

Ecuația mișcării pentru m_1 este

$$T - m_1g = m_1a$$

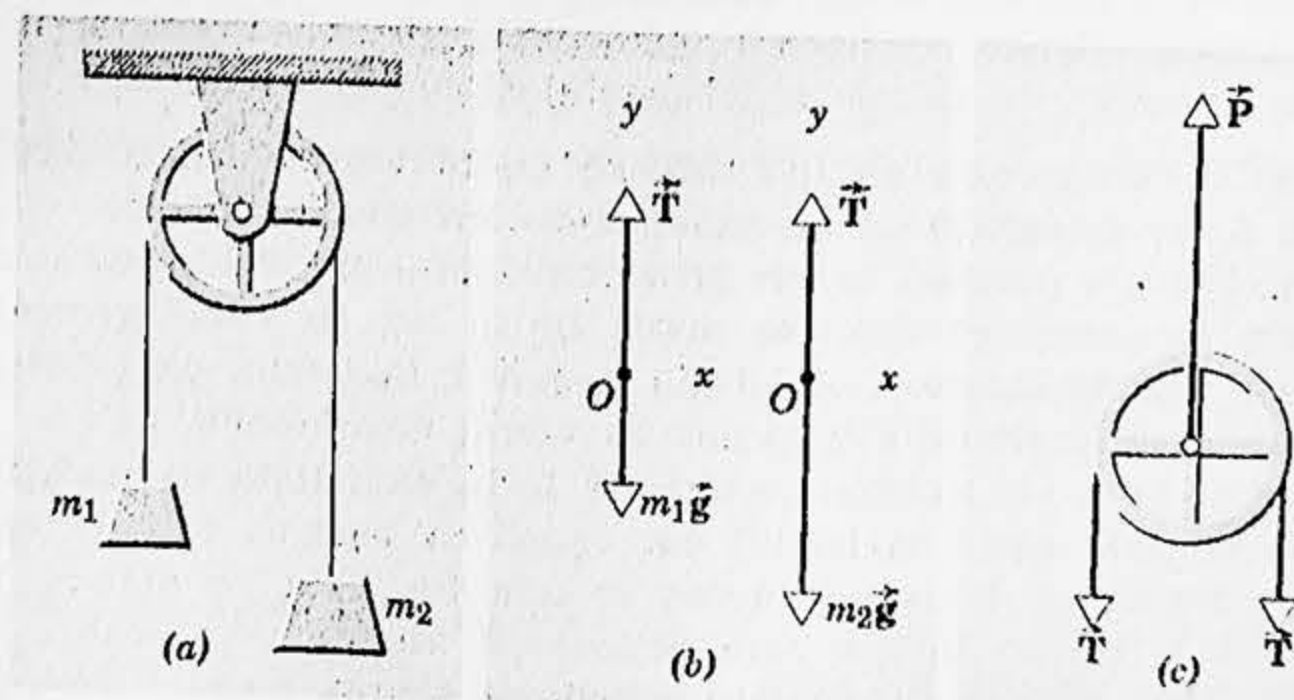


Figura 5-9. Exemplul 7. (a) Două corpuri având mase inegale sunt suspendate pe un fir într-o mașină Atwood. (b) Diagramele corpurilor libere (diagramole forțelor) pentru m_1 și m_2 . (c) Diagrama corpului liber pentru scripete presupus fără masă.

și pentru m_2 este

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

Combinând aceste ecuații, obținem

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad (5-12)$$

și

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

De exemplu, dacă $m_2 = 2,0 \text{ kg}$ și $m_1 = 1,0 \text{ kg}$,

$$a = g/3,$$

$$T = \frac{4}{3} \cdot 9,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 13,1 \text{ N}.$$

Observăm că modulul lui T este totdeauna intermediar între greutatea masei m_1 ($9,8 \text{ N}$ în exemplul nostru) și greutatea masei m_2 ($19,6 \text{ N}$ în exemplul nostru). Aceasta era de așteptat, deoarece T trebuie să fie mai mare decât $m_1 g$ pentru a-i accelera pe m_1 în sus, iar $m_2 g$ trebuie să fie mai mare decât T pentru a-i imprima lui m_2 o accelerație în jos. În cazul particular când $m_1 = m_2$, obținem $a = 0$ și $T = m_1 g = m_2 g$, ceea ce reprezintă rezultatul static care era de așteptat.

Figura 5-9, c arată forțele care acționează asupra scripetelui de masă nulă. Dacă tratăm scripetele ca un punct material, toate forțele pot fi considerate ca acționând în centrul său. P este forța exercitată în sus de către suport asupra scripetelui și T este forța exercitată în jos de către fiecare segment al firului asupra scripetelui. Deoarece scripetele nu are nici o mișcare de translație,

$$P - T + T = 2T.$$

Dacă înlăturăm ipoteza noastră că scripetele nu are masă și îi atribuim o masă m , va trebui atunci să includem o forță mg exercitată în jos asupra suportului. De asemenea, după cum vom vedea mai jos, mișcarea de rotație a scripetelui produce tensiuni diferite în fiecare segment al firului. Frecările din lagăre afectează și ele mișcarea de rotație a scripetelui și tensiunea din fire.

Exemplul 8. Să considerăm un lift care se mișcă vertical cu o accelerație \vec{a} . Vrem să aflăm forța exercitată de un pasager asupra podelei liftului.

Vom lua accelerația pozitivă în sus și negativă în jos. Astfel, accelerație pozitivă în acest caz înseamnă că liftul se mișcă fie în sus cu viteză crescătoare, fie în jos cu viteză descrescătoare. Accelerația negativă înseamnă că liftul se mișcă în sus cu viteză descrescătoare sau în jos cu viteză crescătoare.

Din legea a treia a lui Newton rezultă că forța exercitată de pasager asupra podelei va fi totdeauna egală în modul dar opusă ca sens cu forța exercitată de podea asupra pasagerului. Putem de aceea calcula fie forța de acțiune, fie forța de reacțiune. Dacă folosim forțele care acționează asupra pasagerului, vom afla forța din urmă. Dacă folosim forțele care acționează asupra podelei, vom afla forța dinții.

Situația este arătată în figura 5-10. Greutatea reală a pasagerului, este \vec{G} și forța exercitată asupra lui de către podea, notată cu \vec{P} , este greutatea sa aparentă în liftul accelerat. Forța rezultantă care acționează asupra lui este $\vec{P} + \vec{G}$. Forțele

vor fi considerate pozitive dacă sînt dirijate în sus. Din legea a doua a mișcării avem:

$$F = ma$$

sau

$$P - G = ma \quad (5-13)$$

unde m este masa pasagerului, iar a accelerația sa (și a liftului).

Să presupunem de exemplu că pasagerul cîntărește 70 kgf și accelerația este $1,0 \text{ m/s}^2$ în sus. Avem

$$m = \frac{G}{g} = \frac{70 \cdot 9,8 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 70 \text{ kg}$$

și din ecuația (5-13),

$$P = 70 \text{ kgf} = 70 \text{ kg} \cdot 1,0 \text{ m/s}^2$$

sau

$$P = \text{greutatea aparentă} \approx 77,2 \text{ kgf.}$$

Dacă ar trebui să măsurăm această forță direct, punîndu-l pe pasager să stea pe un dinamometru fixat pe podeaua liftului (sau suspendat de tavan) am găsi o indicație de 77,2 kgf pentru un om a cărui greutate este 70 kgf. Pasagerul simte exercitînd o presiune în jos asupra podelei, o forță mai mare (podeaua îl împinge în sus cu o forță mai mare) decît în cazul cînd el și liftul ar fi în repaus. Oricine simte această senzație atunci cînd liftul pornește în sus din repaus.

Dacă luăm accelerația de $1,0 \text{ m/s}^2$ în jos, atunci $a = -1,0 \text{ m/s}^2$ și $P = 62,8 \text{ kgf}$ pentru pasager. Pasagerul care cîntărește 70 kgf are senzația că apasă în jos pe podea cu o forță mai mică decît atunci cînd el și liftul sînt în repaus. Dacă cablul liftului s-ar rupe și liftul ar cădea liber cu o accelerație $a = -g$, atunci P ar fi egal cu $G + (G/g)(-g) = 0$. Atunci pasagerul și podeaua n-ar exercita nici o forță unul asupra celuilalt. Greutatea aparentă a pasagerului, așa cum ar fi indicată de un dinamometru pus pe podea, ar fi zero.

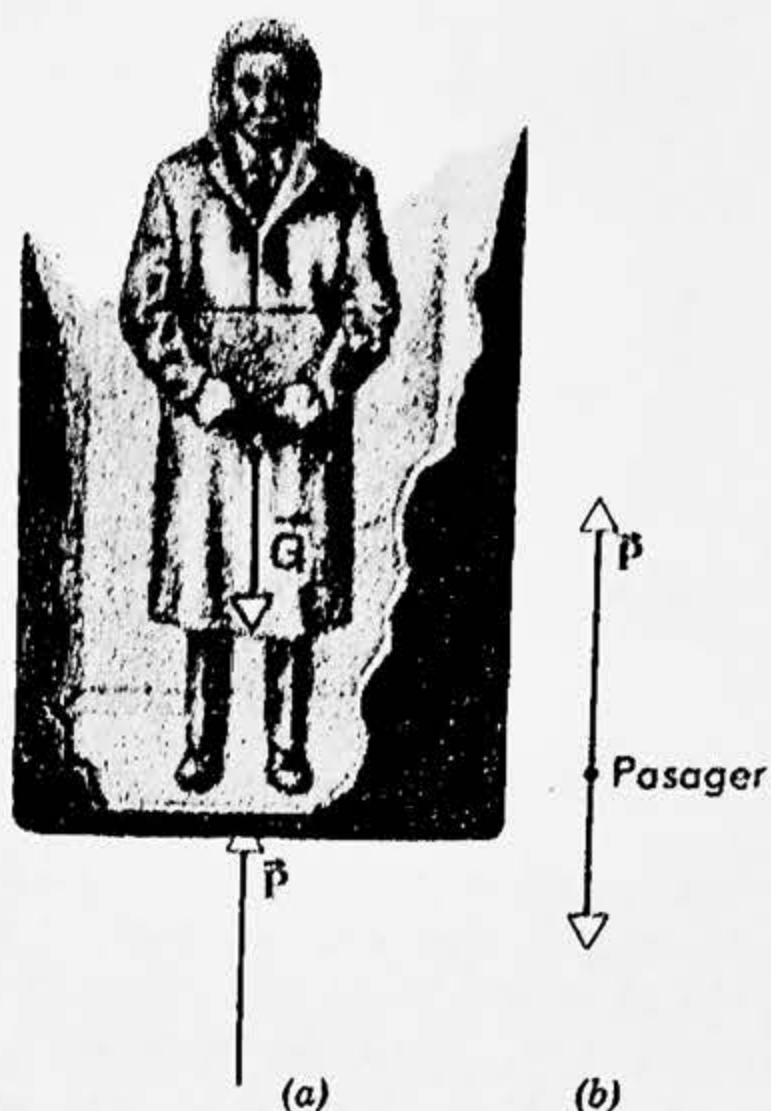


Figura 5-10. Exemplul 8. (a) Un pasager stă pe podeaua unui lift. (b) Diagrama corpului liber pentru pasager.

Întrebări

1. Cît este greutatea dv. în kilograme-forță? Dar în newtoni?

2. De ce cădeți înainte atunci cînd un tren în mișcare decelerează pentru a opri și cădeți înapoi atunci cînd un tren accelerează din repaus? Ce se întîmplă cînd un tren cotește pe o curbă cu viteză absolută constantă?

3. Un cal este pus să tragă un car. Calul refuză să tragă, citînd legea a treia a lui Newton în apărarea sa: „Forța de tracțiune exercitată de cal asupra unui car este egală în modul dar opusă ca sens cu forța exercitată de car asupra calului”. „Dacă eu nu pot exercita niciodată o forță mai

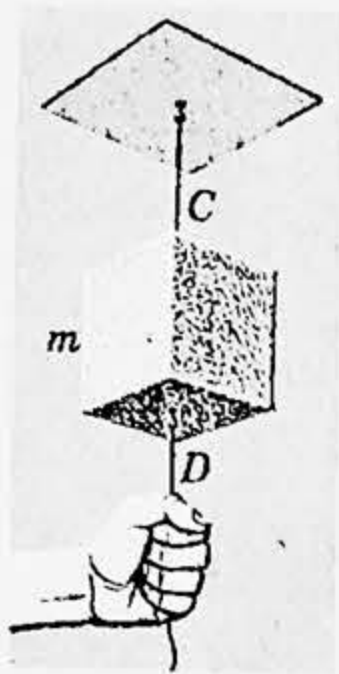


Figura 5-11.

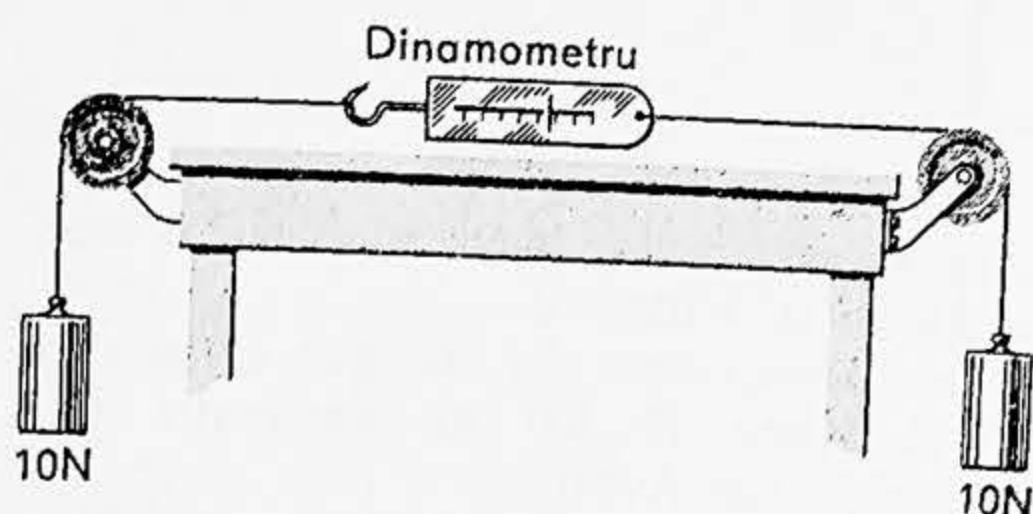


Figura 5-12.

mare asupra carului decât acesta exercită asupra mea cum aş putea vreodată să urnesc carul din repaus?" întreabă calul. Cum i-aţi răspunde?

4. Un bloc de masă m este agăţat cu un fir C de tavan, iar un alt fir D este legat de baza blocului (fig. 5-11). Să se explice următorul fapt: dacă smucim firul D , el se va rupe, dar dacă tragem încet de firul D , se va rupe firul C .

5. Două greutăţi de câte 10 N sînt legate de un dinamometru așa cum este arătat în figura 5-12. Va indica dinamometrul 0 N, 10 N, 20 N sau va indica altceva?

6. Criticaţi afirmaţia, deseori făcută, că masa unui corp este o măsură a „cantităţii de materie” din el.

7. Folosind forţa, lungimea şi timpul ca mărimi fundamentale, care vor fi dimensiunile masei?

8. Este definiţia masei pe care am dat-o limitată la obiectele iniţial în repaus?

9. Este etalonul curent de masă accesibil, invariabil, reproductibil, indestructibil? Are el simplitate pentru scopuri de comparaţie? Ar fi etalonul atomic mai bun în vreo privinţă?

10. Să presupunem că atomul de carbon a fost ales ca etalon de masă. Ce informaţie ar fi necesară pentru a exprima masa kilogramului etalon

prin acest etalon atomic? Cum ar putea fi obţinută această informaţie?

11. Sugeraţi căi practice cu ajutorul cărora s-ar putea determina masele diferitelor obiecte enumerate în tabela 5-2.

12. În jocul „trasul funiei” trei oameni trag de o funie spre stînga în punctul A şi trei oameni trag spre dreapta în punctul B cu forţe de intensitate egală. O greutate de 2,0 kg este atîrnată vertical de centrul sforii. (a) Pot oamenii să ţină funia AB orizontală? (b) Dacă nu, să se explice de ce. Dacă da, să se determine valoarea forţelor necesare în A şi B pentru a face aceasta.

13. Ambele afirmaţii care urmează sînt adevărate; explicaţi-le. Două echipe în jocul „trasul funiei” trebuie să tragă totdeauna la fel de tare una de cealaltă. Echipa care împinge mai tare împotriva solului cîştigă.

14. În ce circumstanţe ar fi greutatea dv. zero? Depinde răspunsul dv. de alegerea sistemului de referinţă?

15. Două obiecte de mase egale se află în repaus pe platanele unei balanţe. Va rămîne balanţa echilibrată atunci cînd este accelerată în sus sau în jos într-un lift?

16. O sfoară de masă neglijabilă este trecută peste un scripete fără frecări. O maimuţă este agăţată de un

capăt al sforii și o oglindă avînd aceeași greutate ca maimuța este legată de celălalt capăt al sforii la nivelul maimuței. Poate maimuța să se depărteze de imaginea sa văzută în oglindă: (a) cățărîndu-se în sus de-a lungul sforii, (b) lăsîndu-se în jos de-a lungul sforii, (c) lăsînd liberă sfoara?

Probleme

1. Două blocuri de mase m_1 și m_2 sînt legate printr-un resort ușor pe o masă orizontală fără frecări. Să se afle raportul accelerațiilor lor a_1 și a_2 după ce ele sînt depărtate și apoi lăsate liber.

2. Să presupunem că singurele forțe care acționează asupra a două corpuri sînt interacțiunile lor mutuale. Dacă ambele corpuri pornesc din repaus, să se arate că distanțele parcurse de fiecare corp sînt invers proporționale cu masele respective ale corpurilor.

3. Un corp de masă m este acționat de două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 așa cum se arată în figura 5-13. Dacă $m=5,0$ kg, $F_1=3,0$ N și $F_2=4,0$ N, să se afle accelerația vectorială a corpului.

4. Un bloc de masă M este tras deasupra unei suprafețe orizontale fără frecări cu ajutorul unei sfori de masă m , ca în figura 5-14. La capătul sforii se aplică o forță \vec{P} . (a) Să se afle accelerația blocului și a sforii. (b) Să se afle forța pe care sfoara o exercită asupra blocului M exprimată în funcție de P , M și m .

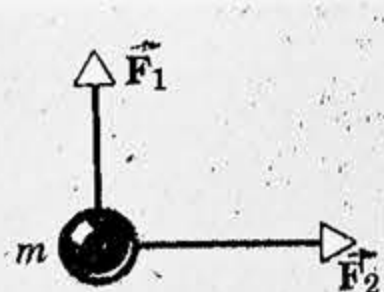


Figura 5-13.

17. Un student stînd pe platforma mare a unui cîntar de tip dinamometru notează greutatea sa. El face apoi un pas pe această platformă și observă că dinamometrul indică mai puțin decît greutatea sa la începutul pasului și mai mult decît greutatea sa la sfîrșitul pasului. Să se explice.

5. Un vehicul care se mișcă cu o viteză inițială de 72 km/h și cîntărește 1200 kg este adus în repaus pe o distanță de 60 m. (a) Să se afle forța de frînare și timpul necesar pentru a opri vehiculul. (b) Presupunînd aceeași forță de frînare, să se afle distanța și timpul necesare pentru oprire, dacă viteza inițială a carului ar fi 36 km/h.

6. Un electron se mișcă rectiliniu de la catodul unui tub electronic (vidat) către anodul său, aflat la o distanță de 1,0 cm. Electronul pleacă cu viteza zero și ajunge la anod cu o viteză $6,0 \cdot 10^6$ m/s. (a) Să se presupună accelerația constantă și să se calculeze forța ce acționează asupra electronului. Se va lua masa electronului $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Această forță este de natură electrică. (b) Să se compare această forță cu forța gravitațională exercitată asupra electronului, pe care am neglijat-o cînd am presupus mișcarea rectilinie. Este această presupunere valabilă?

7. Un corp cu masa de 30 kg este acționat de forța gravitației în jos și de o forță orizontală de 588 N. Să se afle accelerația și viteza corpului în funcție de timp presupunînd că el pornește din repaus.

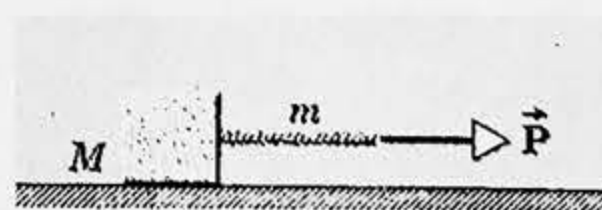


Figura 5-14.

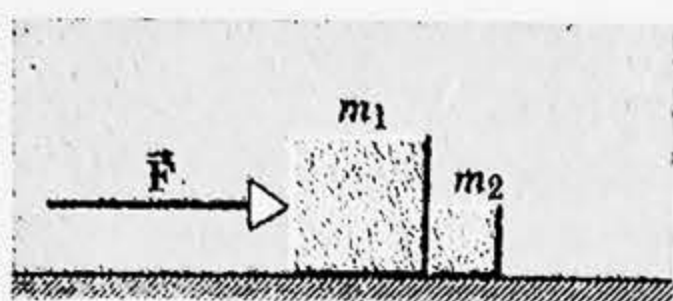


Figura 5-15.

8. Un electron este emis orizontal dintr-un tun electronic cu o viteză de $1,2 \cdot 10^7$ m/s într-un câmp electric care exercită asupra lui o forță verticală constantă de $4,5 \cdot 10^{-15}$ N. Masa electronului poate fi luată de $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Să se determine distanța verticală cu care este deviat electronul în timpul cât el se mișcă înainte, orizontal, cu 3,0 cm.

9. Un cosmonaut a cărui masă este de 75 kg părăsește Pământul. Să se calculeze greutatea sa: (a) pe Pământ, (b) la 400 mile deasupra Pământului (unde $g = 8,1$ m/s²) și (c) în spațiul interplanetar. Care este masa sa în fiecare din aceste puncte?

10. Două blocuri sînt în contact pe o masă fără frecări. O forță orizontală este aplicată unui bloc așa cum este arătat în figura 5-15. (a) Dacă $m_1 = 2,0$ kg, $m_2 = 1,0$ kg și $F = 3,0$ N, să se afle forța de contact dintre cele două blocuri. (b) Să se arate că dacă aceeași forță se aplică lui m_2 în locul lui m_1 , forța de contact dintre blocuri este 2,0 N, ceea ce diferă de valoarea dedusă la punct (a). Explicați.

11. Trei blocuri sînt legate, așa cum se arată în figura 5-16, pe o masă orizontală fără frecări și trase spre dreapta cu o forță $T_3 = 60$ N. Dacă $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 20$ kg și $m_3 = 30$ kg, să se afle tensiunile T_1 și T_2 . Să se facă o analogie cu corpurile trase în tan-

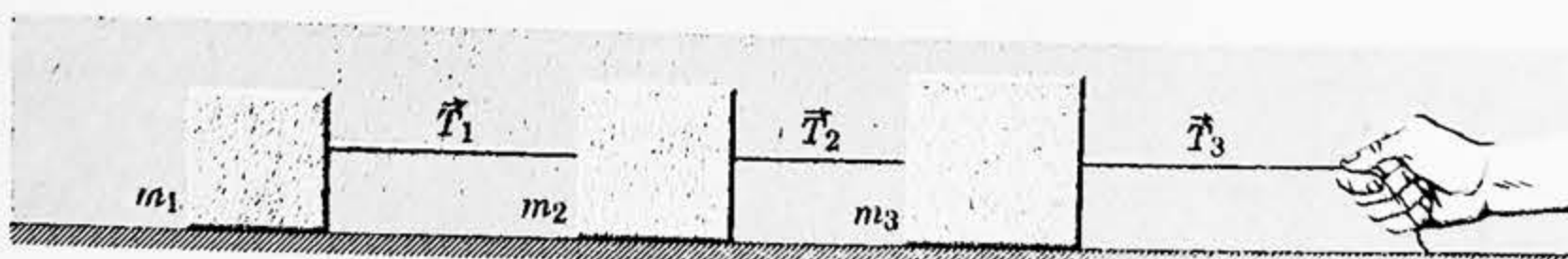


Figura 5-16.

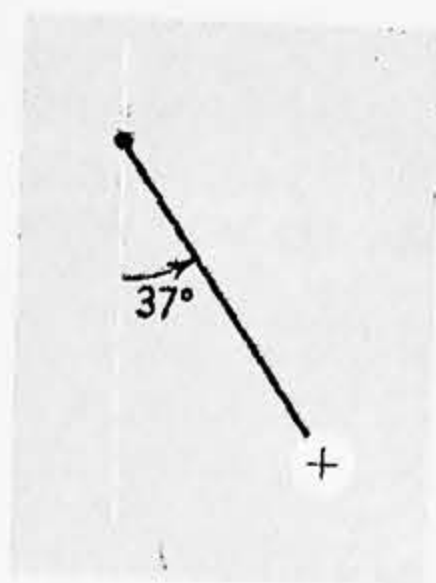


Figura 5-17.

dem, așa cum o locomotivă trage un tren format din vagoane cuplate.

12. O sferă încărcată de masă $3,0 \cdot 10^{-4}$ kg este suspendată printr-un fir. O forță electrică acționează orizontal asupra sferei astfel încît firul formează un unghi de 37° cu verticala, cînd este în repaus (fig. 5-17). Să se afle (a) valoarea forței electrice și (b) tensiunea din fir.

13. Cum ar putea fi coborît un obiect de 1,00 kN de pe un acoperiș folosind un fir cu tensiunea de rupere de 0,90 kN, fără a rupe firul?

14. Să se calculeze accelerația inițială în sus a unei rachete de masă $1,3 \cdot 10^4$ kg dacă forța inițială de propulsie în sus a motoarelor sale este de $2,6 \cdot 10^5$ N. Se poate neglija greutatea rachetei (atrakția exercitată în jos de Pământ asupra rachetei)?

15. Un bloc de masă $m_1 = 30$ kg aflat pe un plan înclinat neted care formează un unghi de 30° cu orizontala, este legat printr-un fir, trecut peste un mic scripete fără frecări, de un al doilea bloc de masă $m_2 = 20$ kg atîrnat vertical (fig. 5-18). (a) Care este accelerația fiecărui corp? (b) Care este tensiunea din fir?

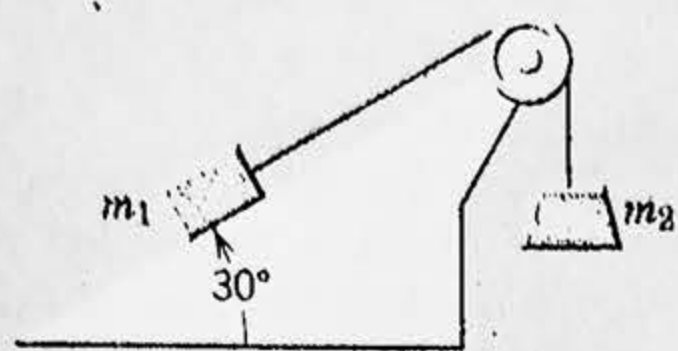


Figura 5-18.

16. O maimuță de 10 kg se cățăra pe o sfoară de masă neglijabilă, legată de un corp cu masa de 15 kg și trecut peste o ramură de copac (fără frecare!) (a) Să se explice cantitativ cum se poate cățăra maimuța în sus pe sfoară astfel încât să poată ridica corpul cu masa de 15 kg deasupra solului. (b) Dacă, după ce corpul a fost ridicat de pe sol, maimuța se oprește din cățărat și rămâne agățată de sfoară, care vor fi acum accelerația sa și tensiunea din sfoară?

17. Un bloc este lăsat liber din repaus din vârful unui plan înclinat fără frecări de 16 m lungime. El ajunge la baza planului după 4,0 s. Un al doilea bloc este lansat în sus de-a lungul planului de la baza sa în momentul când primul bloc este lăsat liber, astfel încât el revine înapoi la baza planului simultan cu primul bloc. (a) Să se afle accelerația fiecărui bloc pe planul înclinat. (b) Care este viteza inițială a celui de-al doilea bloc? (c) Cât de sus de-a lungul planului înclinat va urca acesta?

18. Un bloc este lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat cu o viteză v_0 . Unghiul planului înclinat față de orizontală este θ . (a) Cât de departe de-a lungul planului se va deplasa blocul? (b) Cât timp îi trebuie ca să ajungă acolo? (c) Care este viteza sa în momentul când revine înapoi la baza planului? Să se găsească răspunsurile numerice pentru $\theta = 30^\circ$ și $v_0 = 2,0$ m/s.

19. Un bloc alunecă în jos pe un plan înclinat, fără frecări, care formează un unghi θ cu podeaua unui lift. Să se afle accelerația sa față de planul înclinat în următoarele cazuri. (a) Liftul coboară cu viteza constantă v . (b) Liftul urcă cu viteza constantă v . (c) Liftul coboară cu accelerația a . (d) Liftul coboară cu decelerația a . (e) Cablul liftului se rupe.

20. Un ascensor cîntărind 3,0 t este tras în sus de un cablu cu o accelerație de $1,0$ m/s². (a) Care este tensiunea în cablu? (b) Care este tensiunea atunci când ascensorul accelerează în jos cu $1,0$ m/s²?

21. O lampă atîrnă vertical de un fir într-un lift care coboară. Liftul are o decelerație de $1,8$ m/s² înainte de a opri. (a) Dacă tensiunea din fir este de 80 N, care este masa lămpii? (b) Care este tensiunea din fir dacă liftul urcă cu o accelerație de $1,8$ m/s²?

22. O bilă de plumb atîrnă de tavanul unui vagon de cale ferată funcționează ca un accelerometru. (a) Să se deducă expresia generală care leagă accelerația orizontală a vagonului de unghiul θ format de firul cu bila de plumb cu verticala. (b) Să se afle α dacă $\theta = 20^\circ$. Să se afle θ dacă $\alpha = 1,5$ m/s².

23. Să ne referim la figura 5-7. Fie masa blocului de 20 kg și unghiul θ egal cu 30° . (a) Să se afle tensiunea din fir și forța normală care acționează asupra blocului. (b) Dacă firul este tăiat să se afle accelerația blocului. Se va neglija frecarea.

24. Să ne referim la figura 5-8, a. Fie $m_1 = 40$ kg și $m_2 = 20$ kg. Să se afle tensiunea din fir și accelerația celor două blocuri.

25. Să ne referim la figura 5-9, a. Fie $m_1 = 0,50$ kg și $m_2 = 1,0$ kg. Să se afle accelerația celor două blocuri și tensiunea din fir.

26. Un lanț flexibil uniform de lungime l cu greutatea pe unitatea de lungime λ , este trecut peste un scri-

pete mic, de masă neglijabilă, fără frecări. El este lăsat liber dintr-o poziție de repaus cu o lungime x a lanțului atârând de o parte și o lungime $l-x$ de cealaltă parte. (a) În ce circumstanțe se va mișca el accelerat? (b) Presupunând că aceste circumstanțe au loc, să se afle accelerația a în funcție de x .

27. Un bloc triunghiular de masă M cu unghiurile de 30° , 60° și 90° stă în repaus, cu latura ce formează unghiuri de 30° — 90° , pe o masă orizontală. Un bloc cubic de masă m stă în repaus pe latura ce formează unghiuri de 60° — 30° cu celelalte două (fig. 5-19). (a) Ce accelerație orizontală a trebuie să aibă M față de masă pentru ca m să rămână staționar față de blocul triunghiular, presupunând contactul fără frecări? (b) Ce forță orizontală F trebuie aplicată sistemului pentru a obține acest rezultat, presupunând că suprafața tablei este fără frecări? (c) Să presupunem că lui M nu i se aplică nici o forță și că ambele suprafețe sînt fără frecări. Să se descrie mișcarea resultantă.

28. Două particule, fiecare de masă m , sînt legate printr-un fir ușor de lungime $2l$, așa cum se arată în figura 5-20. O forță \vec{F} se aplică în mijlocul firului ($x=0$) sub un unghi drept față de poziția inițială a firului. Să se arate că accelerația lui m în direcția perpendiculară pe \vec{F} este dată de

$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

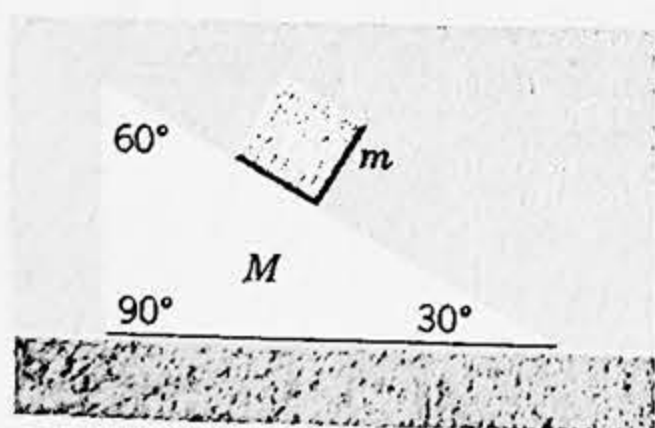


Figura 5-19.

în care x este distanța perpendiculară de la una din particule pînă la linia de acțiune a lui \vec{F} . Să se discute situația cînd $x=l$.

29. Viteza limită. Rezistența aerului în cazul mișcării corpurilor în cădere liberă depinde de mai mulți factori, precum dimensiunile corpului și forma sa, densitatea și temperatura aerului, viteza corpului prin aer. O ipoteză utilă, dar numai aproximativ valabilă, este aceea că forța de rezistență \vec{f}_R este proporțională cu viteza și opusă ca sens; adică $\vec{f}_R = -k\vec{v}$, unde k este o constantă a cărei valoare în fiecare caz particular este determinată de factori, alții decît viteza.

Să considerăm căderea liberă a unui obiect pornind din repaus prin aer.

a) Să se arate că legea a doua a lui Newton dă

$$mg - kv = ma$$

$$\text{sau} \quad mg - k \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

(b) Să se arate că corpul va înceta să se miște accelerat atunci cînd atinge viteza $v_T = mg/k$, numită *viteză limită*.

(c) Să se verifice, prin substituirea ei în ecuația mișcării de la punctul (a) că viteza variază cu timpul astfel

$$v = v_T (1 - e^{-kt/m})$$

și să se reprezinte v în funcție de t .

(d) Să se reprezinte calitativ graficele lui y și lui a în funcție de t pentru această mișcare, ținînd seama că accelerația inițială este g și accelerația finală este zero.

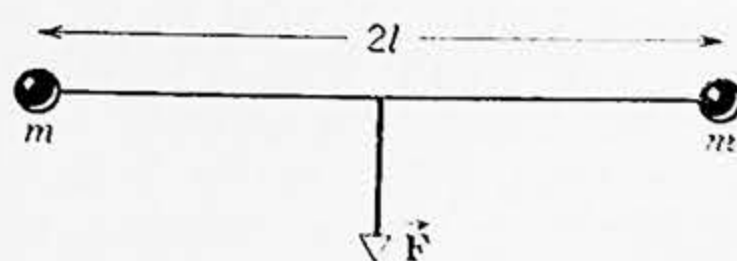


Figura 5-20.

Dinamica punctului material – II

6-1. Introducere

În capitolul 5 am considerat dinamica punctelor materiale supuse unei forțe care era constantă atât în modul cât și ca direcție. Forțele cu care am avut de a face erau exercitate de Pământ sau de fire întinse, adică ele erau fie de natură gravitațională fie de natură elastică. În acest capitol vom considera un alt tip de forțe, care rezultă din frecare.

Vom discuta de asemenea dinamica mișcării circulare uniforme în care forța, deși constantă în modul, variază ca direcție în timp. În capitolul 10 vom considera problemele în care forța, deși constantă ca direcție, variază ca modul în timp, așa cum se întâmplă atunci când un corp exercită o forță momentană asupra unui alt corp în timpul unei ciocniri. În sfârșit, în capitolul 15 vom considera problemele în care forța variază atât în modul cât și ca direcție în timp, cum este de exemplu forța exercitată de un fir asupra unei mase care oscilează, suspendată de fir.

6-2. Forțele de frecare¹

Dacă lansăm un bloc de masă m cu viteza inițială \vec{v}_0 de-a lungul unei mese orizontale lungi, pînă la urmă el ajunge în repaus. Aceasta înseamnă că, în timp ce se mișcă, el suferă o accelerație medie \vec{a} îndreptată în sensul opus mișcării sale. Dacă (într-un reper inerțial) vedem că un corp este accelerat, noi asociem totdeauna mișcării o forță definită prin legea a doua a lui Newton. În acest caz, declarăm că masa exercită

¹ Vezi „Frecarea solidelor” de E. H. Freltag, în *Contemporary Physics*, vol. 2, 1961, p. 198, pentru o tratare generală bună; vezi de asemenea articolul „Frecarea” în *The Encyclopedia Britannica*.

o forță de frecare a cărei valoare medie este $\overrightarrow{m\vec{a}}$, asupra blocului care alunecă.

În adevăr, ori de câte ori suprafața unui corp alunecă peste suprafața unui alt corp, fiecare corp exercită o forță de frecare asupra celuilalt, paralelă cu suprafețele lor. Forța de frecare asupra fiecărui corp este dirijată în sens opus mișcării sale față de celălalt corp. Forțele de frecare se opun automat mișcării, niciodată nu o ajută. Chiar dacă nu există nici o mișcare relativă, pot exista forțe de frecare între suprafețe.

Deși am ignorat efectele lor pînă acum, frecările sînt foarte importante în viața noastră de toate zilele. Lăsată să acționeze singură, ea va aduce orice corp aflat în rotație, la oprire. Într-un automobil, aproximativ 20% din energia motorului este folosită pentru a contracara forțele de frecare (dar numai 1 sau 2% într-un motor turboreactiv). Frecarea produce uzarea și griparea părților mobile, și se pierd multe ore de către ingineri pentru a o reduce. Pe de altă parte, fără frecare nu am putea să mergem; nu am putea ține un toc în mînă și chiar dacă am putea, el n-ar scrie; transportul cu roți pe care-l cunoaștem, n-ar fi posibil.

Vrem să știm cum se exprimă forțele de frecare în funcție de proprietățile corpului și ale mediului său; adică vrem să știm *legea forței* pentru forțele de frecare. În cele ce urmează considerăm alunecarea (nu rostogolirea) unei suprafețe uscate (nelubrificate) peste o altă suprafață. După cum vom vedea mai tîrziu, frecarea văzută la nivel microscopic, este un fenomen foarte complicat¹ și legile forței pentru frecarea de alunecare uscată au caracter empiric și sînt aproximative în predicțiile lor. Ele nu au simplitatea elegantă și precizia pe care o găsim pentru legea forței gravitaționale (cap. 16) sau pentru legea forței electrostatice (cap. 26). Este remarcabil însă, ținînd seama de diversitatea enormă a suprafețelor întîlnite, că multe aspecte ale comportării frecării pot fi înțelese calitativ pe baza unui mecanism simplu.

Să considerăm un bloc aflat în repaus pe o masă orizontală ca în figura 6-1. Să legăm de el un fir pentru a măsura forța necesară pentru a pune blocul în mișcare. Găsim că blocul nu se va mișca dacă aplicăm o forță mică. Spunem că forța aplicată de noi este echilibrată de o forță de frecare opusă, exercitată asupra blocului de către masă, forță care acționează de-a lungul suprafeței de contact. Pe măsură ce mărim forța aplicată, găsim o anumită forță bine definită la care blocul începe să se miște. Odată mișcarea începută, aceeași forță produce o mișcare accelerată. Reducînd forța, după ce mișcarea a început, găsim că este posibil să menținem blocul într-o mișcare uniformă fără accelerație; această forță poate fi mică dar nu este niciodată zero.

Forțele de frecare care acționează între suprafețe aflate în repaus una față de cealaltă se numesc forțe de *frecare statică*. Forța maximă de frecare statică va fi aceeași cu forța minimă necesară pentru a începe mișcarea. Odată mișcarea începută, forțele de frecare care acționează între suprafețe, de obicei descresc, astfel încît pentru a menține mișca-

¹ Vezi, de exemplu, „Aderență și alunecare” de Ernest Rabinowicz, în *Scientific American*, mai 1956.



Figura 6-1. Un bloc fiind pus în mișcare de către forța aplicată F învinge forțele de frecare. În primele două desene forța aplicată crește treptat de la 0 pînă la valoarea $\mu_s N$. Nu se produce nici o mișcare pînă în acest moment, deoarece forța de frecare echilibrează mereu forța aplicată. În momentul în care F devine mai mare decît $\mu_s N$, blocul se pune în mișcare, așa cum este arătat în desenul al cincelea. În general, $\mu_0 N < \mu_s N$; acoasta lasă o forță neechilibrată spre stînga și blocul se mișcă accelerat. În ultimul desen F a fost redus pînă la valoarea $\mu_0 N$. Forța netă este nulă și blocul continuă să se miște cu viteză constantă.

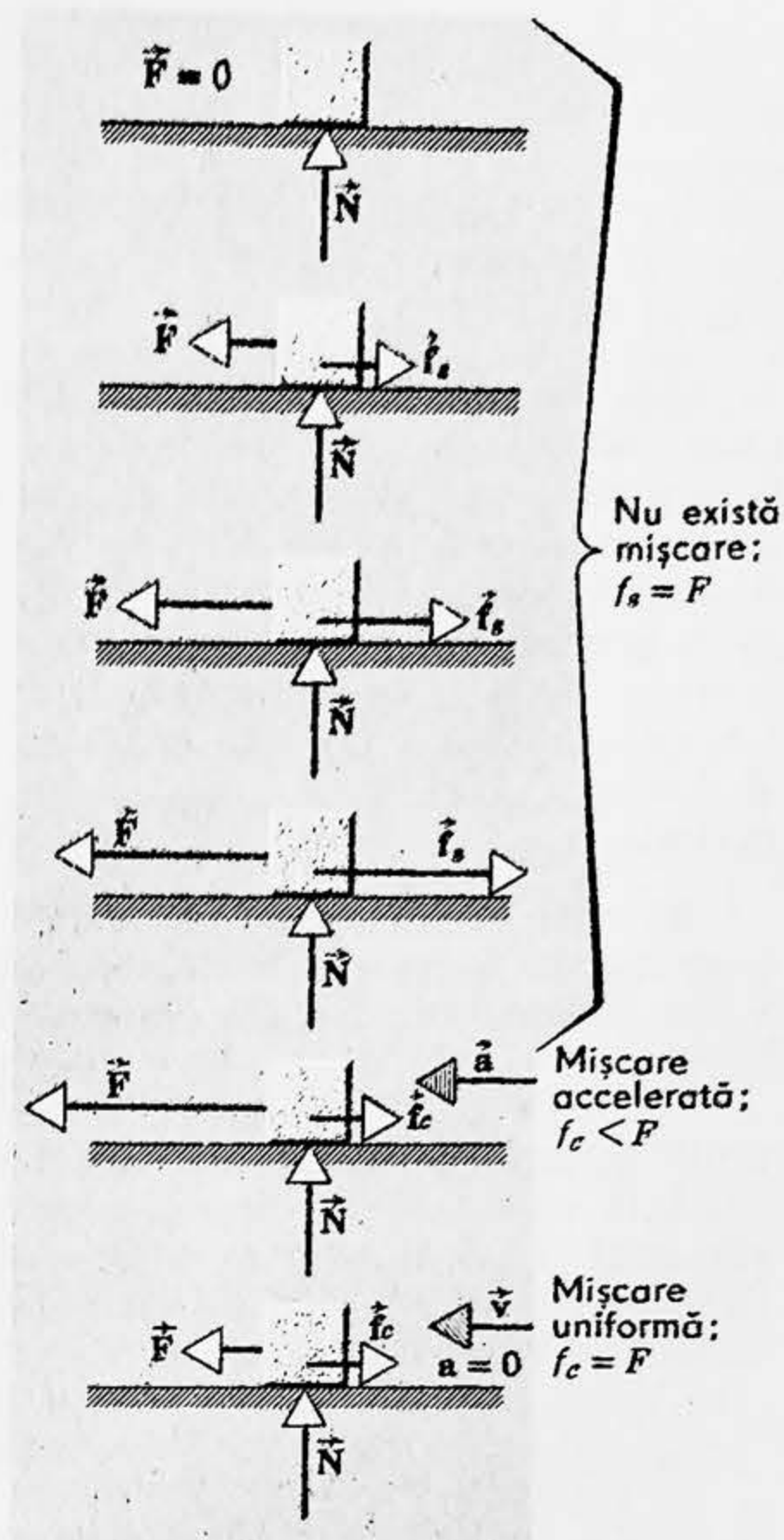
rea uniformă este necesară o forță mai mică. Forțele care acționează între suprafețe aflate în mișcare relativă se numesc forțe de frecare cinetică.

Forța maximă de frecare statică între o pereche de suprafețe uscate nelubrificate se supune următoarelor două legi empirice: (1) Ea este aproximativ independentă de aria suprafeței de contact, între limite largi, și (2) ea este proporțională cu forța normală. Forța normală, numită uneori forță de apăsare, este cea pe care fiecare corp o exercită asupra celuilalt sub un unghi drept față de interfața lor mutuală. Ea provine din deformarea elastică a corpurilor în contact, astfel de corpuri nefiind niciodată în realitate complet rigide. În cazul unui bloc aflat în repaus pe o masă orizontală sau alunecînd de-a lungul ei, forța normală este egală în modul cu greutatea blocului. Deoarece blocul nu are accelerație verticală, masa trebuie să exercite o forță asupra blocului dirijată în sus și egală în modul cu forța de atracție exercitată în jos de către Pămînt asupra blocului, adică egală cu greutatea blocului.

Raportul dintre valoarea forței maxime de frecare statică și valoarea forței normale se numește *coeficient de frecare statică* pentru suprafețele considerate. Dacă f_s reprezintă valoarea forței de frecare statică, putem scrie

$$f_s \leq \mu_s N, \quad (6-1)$$

unde μ_s este coeficientul de frecare statică și N este valoarea forței normale. Semnul egal are loc numai dacă f_s atinge valoarea sa maximă.



Forța de frecare cinetică f_c între suprafețe uscate nelubrificate se supune aceluiași două legi ca și frecarea statică. (1) Ea este aproximativ independentă de aria suprafeței de contact, între limite largi, și (2) ea este proporțională cu forța normală. Forța de frecare cinetică este și ea aproape independentă de viteza relativă cu care suprafețele se mișcă una peste cealaltă.

Cele două legi ale frecării, de mai sus, au fost descoperite experimental de către Leonardo da Vinci (1452—1519) și redescoperite în 1699 de inginerul francez G. Amontons. Formularea dată de Leonardo celor două legi era remarcabilă ținând seama că a avut loc cu aproape două secole înainte ca conceptul de forță să fie complet elaborat de Newton. Formularea lui Leonardo era următoarea: (1) „Frecarea produsă de aceeași greutate va fi de aceeași tărie la începutul mișcării, deși contactul poate fi de lărgimi sau lungimi diferite” și (2) „Frecarea produce o valoare dublă a efortului dacă greutatea e dublă”. Omul de știință francez Charles A. Coulomb (1737—1806) a realizat multe experiențe privind frecarea și a pus în evidență deosebirea dintre frecarea statică și cea cinetică.

Raportul dintre valoarea forței de frecare cinetică și valoarea forței normale se numește *coeficient de frecare cinetică*. Dacă f_c reprezintă valoarea forței de frecare cinetică

$$f_c = \mu_c N, \quad (6-2)$$

unde μ_c este coeficientul de frecare cinetică.

Atît μ_s cît și μ_c sînt constante adimensionale, fiecare reprezentînd raportul a două forțe (a intensităților lor). De obicei pentru o pereche dată de suprafețe $\mu_s > \mu_c$. Valorile lui μ_s și μ_c depind de natura ambelor suprafețe în contact. Atît μ_s cît și μ_c pot fi mai mari decît unu, deși în mod obișnuit ei sînt mai mici decît unu. Observăm că ecuațiile (6-1) și (6-2) reprezintă relații numai între *intensitățile* forței normale și forței de frecare. Aceste forțe sînt totdeauna dirijate perpendicular una pe cealaltă.

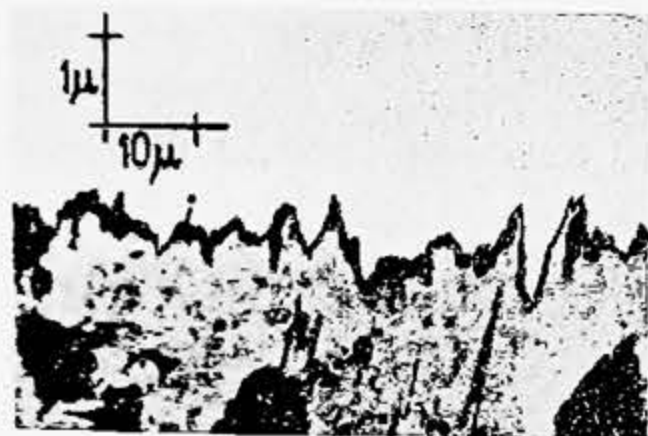


Figura 6-2. O imagine mult mărită a unei secțiuni printr-o suprafață de oțel lustruit fin. Secțiunea a fost tăiată sub un unghi astfel încît distanțele verticale să fie exagerate printr-un factor 10 față de distanțele orizontale. Neregularitățile suprafeței au o înălțime de cîteva mii de diametre atomice. Din cartea *Friction and Lubrication of Solids*, de F. P. Bowden și D. Tabor, Clarendon Press, 1950.

La scara atomică chiar o suprafață foarte fin polizată este departe de a fi plană. Figura 6-2, de exemplu, arată un profil real, mărit foarte mult, al unei suprafețe de oțel care se consideră a fi bine lustruită. Putem vedea imediat că dacă două corpuri sînt puse în contact, suprafața microscopică reală de contact este mult mai mică decît suprafața macroscopică aparentă de contact, într-un caz particular aceste arii pot fi ușor în raportul 1 : 10⁴.

Aria reală (microscopică) a suprafeței de contact este proporțională cu forța normală, deoarece punctele de contact se deformează plastic sub presiunea mare ce se dezvoltă în aceste puncte. Mai multe puncte de contact devin astfel „sudate la rece” între ele. Acest fenomen, *adeziune de*

suprafață, se produce datorită faptului că în punctele de contact moleculele de pe fețele opuse ale suprafeței sînt atît de apropiate între ele încît ele exercită forțe intermoleculare puternice unele asupra celorlalte.

Atunci cînd un corp (de exemplu un metal) este tras deasupra altuia, rezistența de frecare este legată de ruperea a mil de suduri fine, care se refac în mod continuu pe măsură ce se fac noi contacte întîmplătoare (vezi fig. 6-3). Experimente cu trasori radioactivi au arătat că în procesul de ruptură, mici fragmente ale unei suprafețe de metal pot fi deslipite și pot adera la cealaltă suprafață. Dacă viteza relativă a celor două suprafețe este suficient de mare, se pot produce topiri locale în anumite zone de contact chiar dacă suprafața ca un întreg se poate încălzi doar moderat.

Coefficientul de frecare depinde de multe variabile, cum sînt natura materialelor, prelucrarea suprafețelor, peliculele superficiale, temperatura și gradul de contaminare. De exemplu, dacă două suprafețe de metal, bine curățate, sînt așezate într-o cameră cu vid înalt, astfel încît să nu se formeze pelicule de oxid pe suprafață, coeficientul de frecare crește pînă la valori enorme și suprafețele devin în realitate puternic „sudate” între ele. Introducerea unei mici cantități de aer în cameră astfel încît să se poată forma pelicule de oxid pe suprafețele în contact reduce coeficientul de frecare la valoarea sa „normală”.

Cu aceste complicații nu este surprinzător faptul că nu există o teorie exactă a frecării uscate și că legile frecării sînt empirice. Teoria adeziunii de suprafață a frecării metalelor duce totuși la o înțelegere a celor două legi ale frecării menționate mai sus. (1) Aria microscopică de contact, care determină forța de frecare f_c este proporțională cu forța normală N și astfel f_c este proporțional cu N , așa cum arată ecuația (6-2). (2) Faptul că forța de frecare este independentă de aria aparentă de contact înseamnă, de exemplu, că forța necesară pentru a tira un „bloc” de metal de-a lungul unei mese de metal este aceeași indiferent care față a blocului este în contact cu masa. Putem înțelege aceasta numai dacă aria microscopică de contact este aceeași pentru toate pozițiile blocului și aceasta este într-adevăr situația. Cu fața mare în jos, există un număr relativ mare de contacte de arie relativ mică care suportă greutatea; cu fața mică în jos există contacte mai puține (deoarece aria aparentă de contact este mai mică), însă aria unui contact individual este mai mare exact cu același factor, din cauza presiunii mai

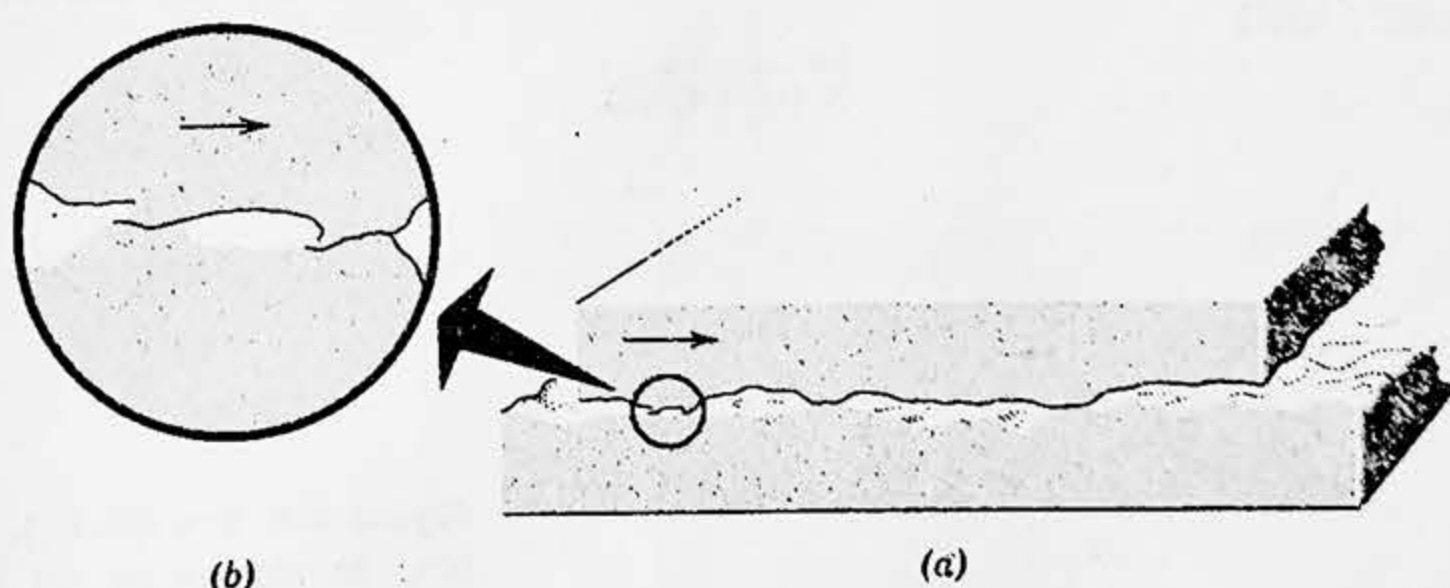


Figura 6-3. Frecarea de alunecare. (a) Corpul superior alunecă spre dreapta peste corpul inferior în această diagramă mărită. (b) O imagine și mai detaliată arată două puncte în care s-a produs adeziunea de suprafață. Este necesară o forță pentru a rupe aceste suduri și a menține mișcarea.

mari exercitate de blocul așezat vertical asupra acestui număr mic de contacte care suportă aceeași greutate.

Forța de frecare pe care o întâmpină un corp care se rostogolește peste un altul este mult mai mică decât forța de frecare pentru o mișcare de alunecare și acesta este, în adevăr, avantajul roții față de sanie. Această frecare redusă se datorește în mare parte faptului că în timpul rostogolirii sudurile de contact microscopice sînt „netezite” mai degrabă decât „rupte” ca în cazul frecării de alunecare. Aceasta poate reduce forța de frecare pînă la de o mie de ori.

Rezistența de frecare în cazul frecării uscate de alunecare poate fi considerabil redusă prin lubrificare. Un desen mural într-o grotă din Egipt datînd din anul 1900 î.e.n. arată o statuie mare de piatră trasă pe o sanie în timp ce un om din fața saniei toarnă ulei lubrifiant în drumul ei. O tehnică și mai eficace este de a introduce un strat de gaz între suprafețele care alunecă; „rondelele de gheață uscată” menționate la pagina 82 și lagărele cu suport de gaz constituie două exemple. Frecarea poate fi redusă și mai mult suspendînd un obiect în rotație într-un spațiu vidat cu ajutorul forțelor magnetice. J. W. Beams, de exemplu, a pus în rotație un rotor de 14 kg de acest tip cu o turație de 1000 rot/s; cînd motorul a fost oprit, rotorul pierdea viteză cu o cantitate de numai 1 rot/s într-o zi¹.

Exemple privind modul în care se aplică legile empirice ale frecării urmează mai jos. Coeficienții de frecare dați sînt presupuși constanți. În adevăr, μ_c poate fi privit ca o valoare medie bună, care nu diferă prea mult de valorile pentru diferite viteze particulare în domeniul considerat.

Exemplul 1. Un bloc se află în repaus pe un plan înclinat care formează un unghi θ cu orizontala ca în figura 6-4, a. Mărind unghiul de înclinare, se găsește că alunecarea începe la un unghi de înclinare θ_s . Care este coeficientul de frecare statică între bloc și planul înclinat?

Forțele care acționează asupra blocului, considerat punct material, sînt arătate în figura 6-4, b. \vec{G} este greutatea blocului, \vec{N} este forța normală exercitată asupra blocului de către suprafața planului înclinat și \vec{f}_s este forța tangențială de frecare exercitată de planul înclinat asupra blocului. Observăm că forța rezultantă exercitată de planul înclinat asupra blocului, $\vec{N} + \vec{f}_s$, nu mai este perpendiculară pe suprafața de contact, așa cum era pentru suprafețele netede ($\vec{f}_s = 0$). Blocul este în repaus, astfel încît

$$\vec{N} + \vec{f}_s + \vec{G} = 0.$$

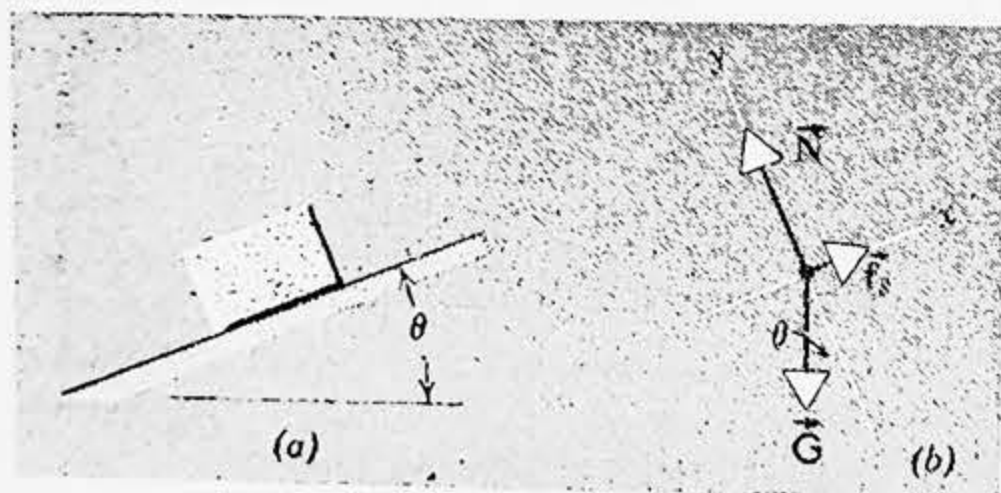


Figura 6-4. Exemplul 1. (a) Un bloc în repaus pe un plan înclinat aspru (rugos). (b) Diagrama forțelor pentru bloc.

¹ Vezi „Mișcarea de rotație foarte rapidă”, de Jesse W. Beams, în *Scientific American*, aprilie, 1961.

Descompunând forțele noastre în componente pe direcțiile x și y de-a lungul planului înclinat și respectiv perpendicular pe plan, obținem

$$N - G \cos \theta = 0,$$

$$f_s - G \sin \theta = 0 \quad (6-3)$$

Însă, $f_s \leq \mu_s N$. Dacă mărim încet unghiul planului înclinat pînă cînd începe alunecarea, atunci pentru acel unghi $\theta = \theta_s$ și putem scrie $f_s = \mu_s N$. Substituind aceasta în ecuațiile (6-3), obținem

$$N = G \cos \theta_s$$

și

$$\mu_s N = G \sin \theta_s$$

astfel încît

$$\mu_s = \tan \theta_s.$$

Prin urmare, măsurarea unghiului de înclinare la care apare alunecarea ne oferă o metodă experimentală simplă pentru determinarea coeficientului de frecare statică între două suprafețe.

Studentul poate folosi argumente analoge pentru a arăta că unghiul de înclinare θ_c necesar pentru a menține o viteză constantă a blocului în timpul alunecării lui în jos pe planul înclinat, după ce a fost urnit prin lovire ușoară, este dat de

$$\mu_c = \tan \theta_c$$

unde $\theta_c < \theta_s$. Cu ajutorul unei rigle studentul poate acum determina pe μ_s și μ_c pentru o monedă care alunecă în jos pe acest manual.

Exemplul 2. Să considerăm un automobil care se mișcă de-a lungul unui drum orizontal drept cu o viteză v_0 . Dacă coeficientul de frecare statică dintre anvelope și șosea este μ_s , care este distanța cea mai scurtă pe care poate fi oprit automobilul?

Forțele care acționează asupra automobilului, considerat punct material, sînt arătate în figura 6-5. Automobilul este presupus mișcîndu-se în sensul pozitiv al axei x . Dacă presupunem că f_s este o forță constantă, avem o mișcare uniform decelerată.

Din relația (vezi ecuația 3-16)

$$v^2 = v_0^2 + 2ax,$$

cu viteza finală $v=0$, obținem

$$x = -v_0^2/2a,$$

unde semnul minus înseamnă că \vec{a} este îndreptat în sensul negativ al axei x .

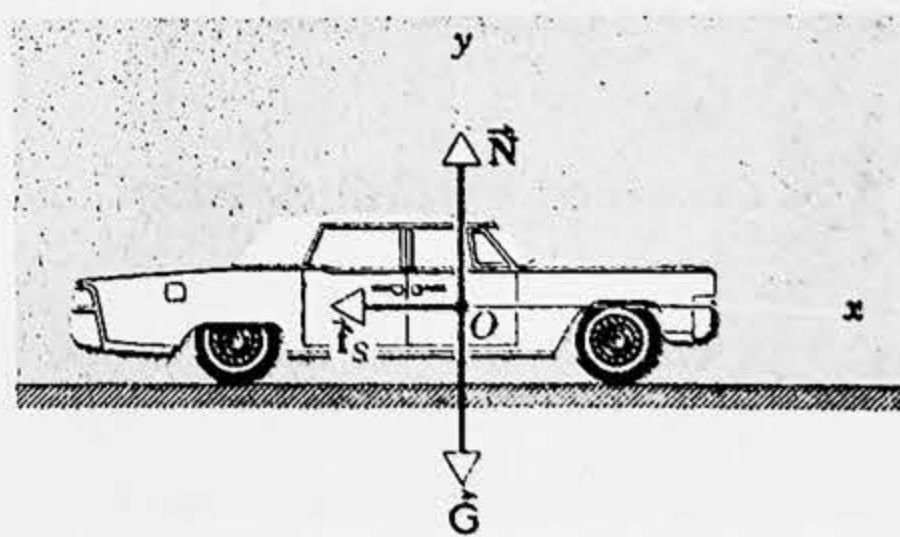


Figura 6-5. Exemplul 2. Forțele care acționează asupra unui automobil ce frînează.

Pentru a determina pe a , să aplicăm legea a doua a mișcării componente pe direcția x a mișcării:

$$-f_s = ma = (G/g) a \quad \text{sau} \quad a = -g(f_s/G).$$

Din componentele pe direcția y obținem

$$N - G = 0 \quad \text{sau} \quad N = G$$

astfel încît

$$\mu_s = f_s/N = f_s/G$$

și

$$a = -\mu_s g.$$

Atunci distanța pînă la oprire este

$$x = -v_0^2/2a = v_0^2/2g\mu_s. \quad (6-4)$$

Cu cît viteza inițială este mai mare cu atît distanța necesară pentru a opri este mai mare; și anume această distanță variază cu pătratul vitezei inițiale. De asemenea, cu cît coeficientul de frecare statică dintre suprafețe este mai mare, cu atît distanța necesară pentru a opri este mai mică.

Am folosit coeficientul de frecare statică în această problemă, în locul coeficientului de frecare la alunecare, deoarece presupunem că nu există alunecare între anvelope și șosea. Am neglijat frecarea la rostogolire. Mai mult, am presupus că operează forța maximă de frecare statică ($f_s = \mu_s N$) deoarece problema cere distanța minimă necesară pentru oprire. Cu o forță de frecare statică mai mică, distanța de oprire va fi evident mai mare. Tehnica corectă de frînare, necesară aici, este de a menține automobilul exact la limita patinării (derapării). Dacă suprafața este netedă și frînele sînt apăsate la maximum, se poate produce alunecarea. În acest caz μ_c înlocuiește pe μ_s și distanța necesară pentru a opri va crește conform ecuației (6-4).

Ca exemplu particular, dacă $v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ și $\mu_s = 0,60$ (o valoare tipică), obținem

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,60 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 34 \text{ m}.$$

Observăm că masa automobilului nu apare în ecuația (6-4). Cum putem explica practica de „îngreunare“ a automobilului cu scopul de a mări siguranța în circulație pe șoselele cu polei?

Studentul trebuie acum să cerceteze cum, în principiu, forțele de frecare ar modifica rezultatele exemplelor din paragraful 5-10.

6-3. Dinamica mișcării circulare uniforme

În paragraful 4-4 am arătat că dacă un corp se mișcă cu viteza absolută constantă v pe un cerc de rază r , el suferă o accelerație centripetă \vec{a} a cărei valoare este v^2/r . Direcția lui \vec{a} este totdeauna radială către centrul rotației. În modul acesta \vec{a} este un vector variabil, deoarece,

chiar dacă modulul său rămâne constant, direcția sa variază în mod continuu în timpul mișcării. Reamintim că nu este necesar să existe mișcare în direcția accelerației. În general, nu există vreo relație fixă între direcția accelerației \vec{a} și direcția vitezei \vec{v} a unei particule, așa cum se vede în figura 4-7. Pentru o particulă în mișcare circulară uniformă accelerația \vec{a} și viteza \vec{v} sînt totdeauna sub un unghi drept una față de cealaltă.

Orice corp accelerat trebuie să fie supus acțiunii unei forțe \vec{F} , definită de legea a doua a lui Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$). În modul acesta (presupunînd că ne aflăm într-un reper inerțial), dacă vedem un corp efectuînd o mișcare circulară uniformă, putem fi siguri că o forță netă \vec{F} , dată în modul de

$$F = ma = mv^2/r$$

trebuie să acționeze asupra corpului; corpul nu este în echilibru. Direcția lui \vec{F} în fiecare moment trebuie să fie în direcția lui \vec{a} în acel moment și anume radial către centru. Trebuie să fim totdeauna în stare să explicăm această forță indicînd un anumit obiect din mediu care exercită forța asupra corpului care se mișcă accelerat pe cerc.

Dacă corpul în mișcare circulară uniformă este un disc, situat la capătul unui fir, care se mișcă pe un cerc pe o masă orizontală fără frecări (ca în fig. 6-6), forța \vec{F} exercitată asupra discului este dată de tensiunea \vec{T} din fir. Această forță \vec{T} este forța netă care acționează asupra discului. Ea accelerează discul modificînd continuu direcția vitezei sale astfel încît discul se mișcă pe un cerc. \vec{T} este totdeauna dirijat către acul din centrul cercului și valoarea sa este mv^2/R . Dacă firul ar fi tăiat în punctul de legătură cu discul, n-ar exista o forță netă exercitată asupra discului. Discul s-ar mișca atunci cu viteză constantă pe o linie dreaptă de-a lungul direcției tangente la cerc în punctul în care a fost tăiat firul. Prin urmare, pentru a obliga discul să se miște pe cerc, trebuie aplicată o forță care să-l tragă în spre centru.

Forțele responsabile pentru mișcarea circulară uniformă se numesc forțe centripete deoarece ele sînt dirijate „către centrul” mișcării circulare. Denumirea de forță „centripetă” înseamnă însă, doar că ea este

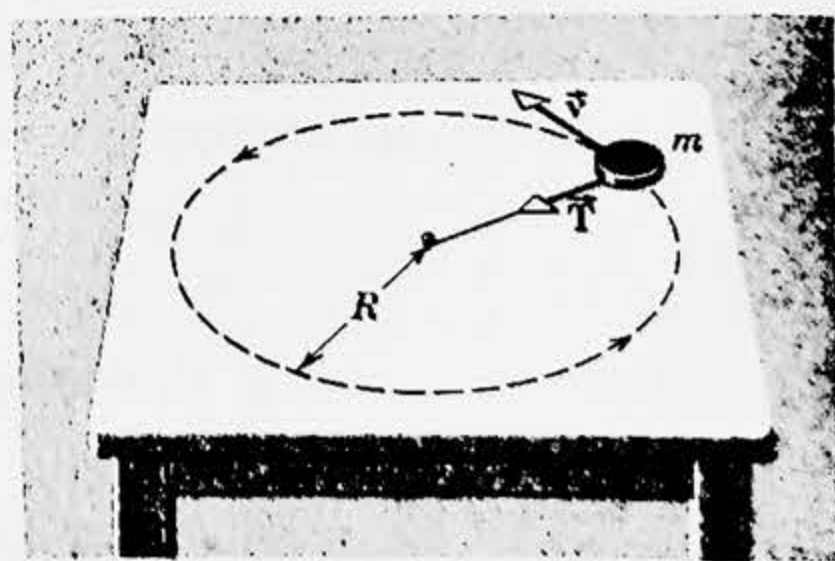


Figura 6-6. Un disc m se mișcă cu viteză absolută constantă pe o traiectorie circulară, pe o suprafață orizontală fără frecări. Singura forță orizontală ce acționează asupra lui m este forța centripetă \vec{T} cu care firul trage de corp.

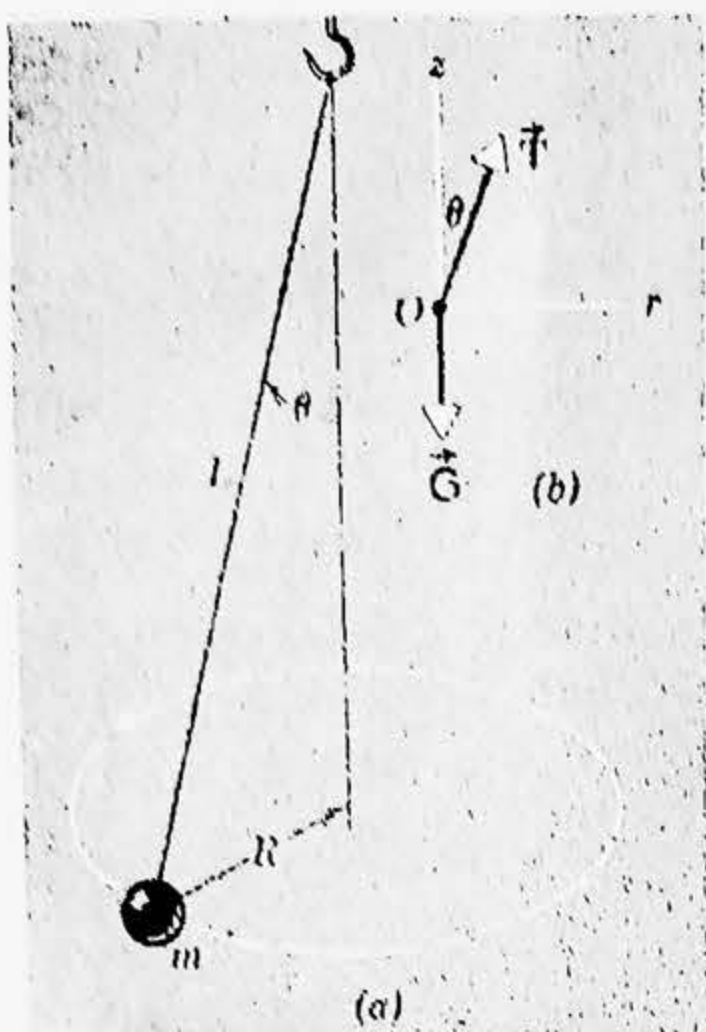


Figura 6-7. Exemplul 3. (a) Un corp de masă m suspendat pe un fir de lungime L descrie un cerc. Firul descrie un con circular drept cu semideschiderea θ . (b) Diagrama forțelor pentru m .

suprafața unui con. Acest dispozitiv este numit *pendul conic*. Să se afle timpul necesar pentru o revoluție completă a corpului.

Dacă firul face un unghi θ cu verticala, raza traiectoriei circulare este $R = L \sin \theta$. Forțele care acționează asupra corpului de masă m sînt \vec{G} — greutatea sa și \vec{T} — forța de tensiune din fir, așa cum se arată în figura 6-7, b. Este clar că $\vec{T} + \vec{G} \neq 0$. Prin urmare, forța rezultantă care acționează asupra corpului nu este nulă, ceea ce și trebuia, deoarece pentru a menține corpul în mișcare pe un cerc cu viteză absolută constantă, este necesară o forță.

Putem descompune pe \vec{T} în fiecare moment într-o componentă radială și o componentă verticală:

$$T_r = T \sin \theta \text{ și } T_z = T \cos \theta.$$

Deoarece corpul nu are accelerație verticală,

$$T_z - G = 0.$$

Dar

$$T_z = T \cos \theta \text{ și } G = mg,$$

astfel încît

$$T \cos \theta = mg.$$

îndreptată totdeauna radial către centru; numele nu ne spune nimic despre natura forței sau despre corpul care o exercită. Astfel, pentru discul care se rotește din figura 6-6, forța centripetă este o forță elastică dată de fir; pentru Luna care se rotește în jurul Pămîntului (pe o orbită aproximativ circulară) forța centripetă este atracția gravitațională exercitată de Pămînt asupra Lunii; pentru un electron care se rotește în jurul unui nucleu atomic forța centripetă este electrostatică. Forța centripetă *nu* este un nou tip de forță, ci pur și simplu un mod de a descrie comportarea în timp a forțelor care sînt atribuite anumitor corpuri din mediu. Astfel, o forță poate fi centripetă și elastică, centripetă și gravitațională sau centripetă și electrostatică, printre alte posibilități.

Să considerăm cîteva exemple de forțe care acționează ca forțe centripete.

Exemplul 3. Pendulul conic. Figura 6-7, a reprezintă un mic corp de masă m , care se rotește pe un cerc orizontal cu viteză absolută constantă v la capătul unui fir de lungime L . În timp ce corpul descrie cercul, firul mătură

Accelerația radială este v^2/R . Această accelerație este creată de T_r — componenta radială a lui \vec{T} , ceea ce reprezintă forța centripetă care acționează asupra lui m . Prin urmare

$$T_r = T \sin \theta = mv^2/R.$$

Împărțind această ecuație la cea precedentă, obținem

$$\operatorname{tg} \theta = v^2/Rg \quad \text{sau} \quad v^2 = Rg \operatorname{tg} \theta,$$

ceea ce dă viteza absolută constantă a bilei. Dacă notăm cu τ timpul unei revoluții complete a corpului, avem

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} = \sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta}$$

sau

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta}} = 2\pi \sqrt{R/(g \operatorname{tg} \theta)}.$$

Dar $R = L \sin \theta$, astfel încît

$$\tau = 2\pi \sqrt{(L \cos \theta)/g}.$$

Această ecuație ne dă relația dintre τ , L și θ . Observăm că τ , numit *perioada* mișcării, nu depinde de m .

Dacă $L = 0,98$ m și $\theta = 30^\circ$, care este perioada mișcării? Avem

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{0,98 \text{ m} \cdot 0,866}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 1,85 \text{ s}.$$

Exemplul 4. Rotorul. În multe parcuri de distracții găsim un dispozitiv numit *rotor*. Rotorul este o cameră cilindrică goală care poate fi pusă în mișcare în jurul axei verticale centrale a cilindrului. O persoană intră în rotor, închide ușa și stă lipită de perete. Rotorul își mărește treptat viteza de rotație pornind din repaus pînă cînd la o anumită viteză podeaua de sub om este deschisă în jos lăsînd să se vadă o groapă adîncă. Pasagerul nu cade ci rămîne „țintuit“ de peretele rotorului. Să se afle coeficientul de frecare necesar pentru a împiedica căderea.

Forțele care acționează asupra omului sînt arătate în figura 6-8. \vec{G} este greutatea omului, \vec{f}_s este forța de frecare statică dintre om și peretele rotorului, iar \vec{P} este forța centripetă exercitată de perete asupra omului, necesară pentru a-l menține în mișcare pe cerc. Fie R raza rotorului și v viteza absolută finală a omului. Deoarece omul nu se mișcă pe verticală, dar suferă o accelerație radială v^2/R în fiecare moment, avem

$$f_s - G = 0$$

și

$$P(-ma) = (G/g) \cdot (v^2/R).$$

Dacă μ_s este coeficientul de frecare statică dintre om și perete, necesar pentru a împiedica alunecarea, avem $f_s = \mu_s P$ și

$$f_s - G = \mu_s P$$

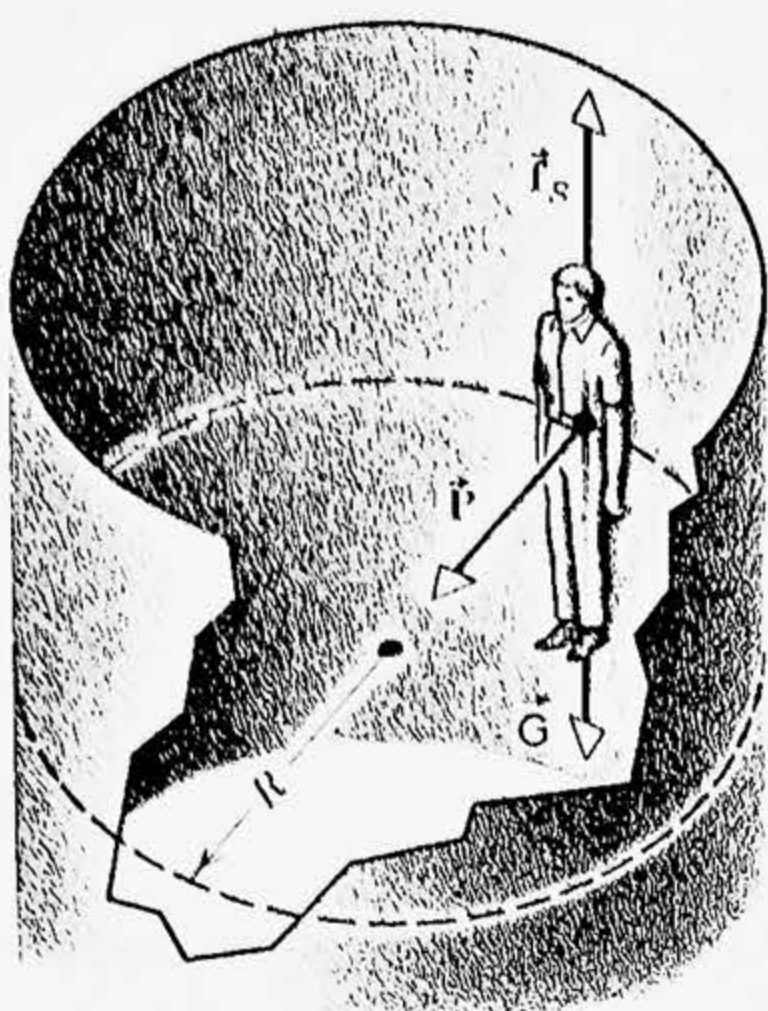
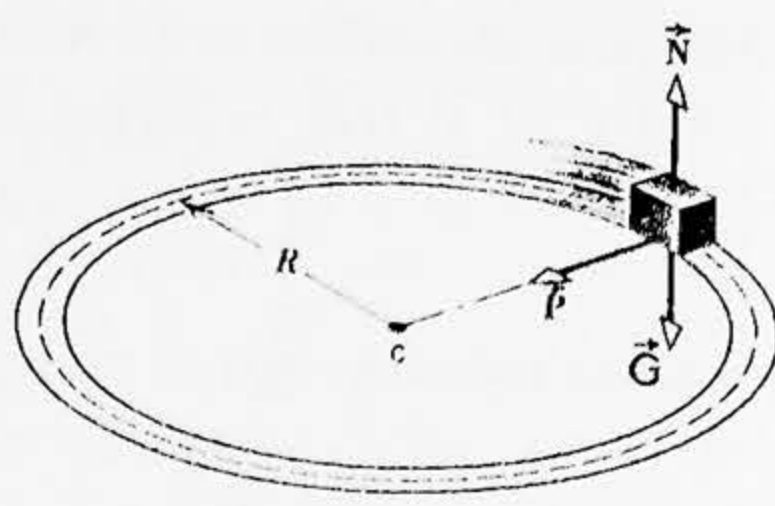
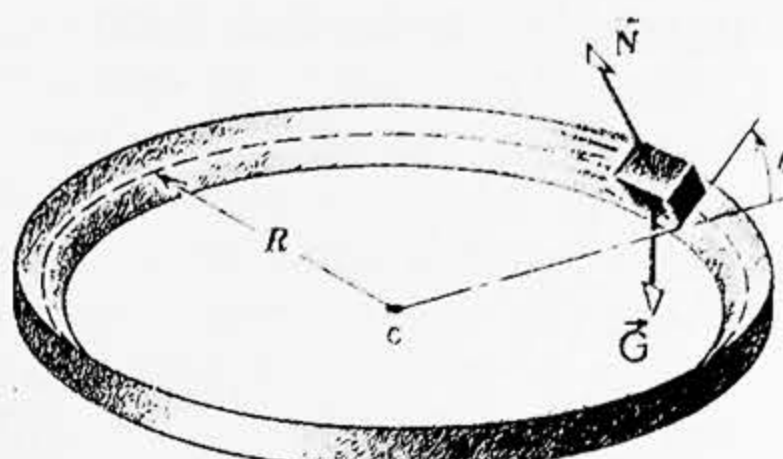


Figura 6-8. Forțele care acționează asupra unei persoane într-un „rotor” de rază R .



(a)



(b)

Figura 6-9.

sau

$$\mu_s = \frac{G}{P} = \frac{gR}{v^2}.$$

Această ecuație ne dă coeficientul minim de frecare, necesar pentru a împiedica alunecarea, pentru un rotor de rază R , atunci când o particulă de pe peretele său are o viteză v . Observăm că rezultatul nu depinde de greutatea omului.

În particular coeficientul de frecare dintre un material textil al îmbrăcăminții și un perete tipic de rotor (canava) este de aproximativ 0,40. Pentru un rotor obișnuit raza este de 2,0 m, astfel încât v trebuie să fie de aproximativ 7,0 m/s sau mai mare.

Exemplul 5. Fie blocul din figura 6-9, *a* reprezentînd un automobil sau un vagon de cale ferată care se mișcă cu viteza absolută constantă v pe un drum orizontal de-a lungul unei curbe care are o rază de curbură R . Pe lîngă cele două forțe verticale, anume forța de gravitație \vec{G} și forța normală \vec{N} , asupra vehiculului mai acționează o forță centripetă orizontală \vec{P} . În cazul automobilului această forță centripetă este furnizată de forța de frecare exercitată de șosea asupra anvelopelor; în cazul vagonului de cale ferată forța centripetă este furnizată de șinele care exercită o forță laterală asupra marginii externe a obadelor roților vagonului. De nici una din aceste forțe laterale nu putem fi siguri că este îndeajuns de mare în fiecare moment și ambele produc o uzură inutilă. De aceea, drumul este *încălinat* la curbe, așa cum se arată în figura 6-9, *b*. În acest caz forța normală \vec{N} are nu numai o componentă verticală, ca mai înainte, ci și o componentă orizontală care furnizează forța centripetă necesară pentru mișcarea circu-

lară uniformă. Nu mai sînt deci necesare forțe laterale adiționale dacă șoseaua este înclinată adecvat.

Unghiul corect θ de înclinare poate fi obținut ca mai jos. Nu există accelerație verticală, astfel încît

$$N \cos \theta = G.$$

Forța centripetă este $N \sin \theta$, astfel încît $N \sin \theta = mv^2/R$. Împărțind ultima ecuație la prima și punînd $G = mg$, obținem

$$\operatorname{tg} \theta = v^2/Rg.$$

Observăm că unghiul corect de înclinare depinde de viteza vehiculului și de curbura drumului. Pentru o curbura dată, drumul trebuie înclinat cu un unghi corespunzător vitezei medii respectate. Adesea, curbele sînt marcate cu semne care indică viteza adecvată pentru care șoseaua a fost înclinată.

Studentul trebuie să verifice formula înclinării în cazurile limită $v=0$; $R \rightarrow \infty$; v mare; R mic. El trebuie să observe analogia mare dintre figura 6-7 din exemplul 3 și figura 6-9, b din acest exemplu.

6-4. Forțele și pseudoforțele

Toate forțele din natură pot fi clasificate în trei categorii, fiecare cu o intensitate relativă diferită: (1) forțele gravitaționale care sînt relativ foarte slabe, (2) forțele electromagnetice care sînt de intensitate intermediară și (3) forțele nucleare. Forțele nucleare sînt de două tipuri, acelea care leagă neutronii și protonii din nucleu (foarte puternice) și cele care sînt responsabile pentru dezintegrarea beta (slabe). Aceste forțe sînt „reale” în sensul că le putem asocia cu anumite obiecte din mediu. Astfel de forțe, precum tensiunea dintr-o sfoară, forța de frecare, forța pe care noi o exercităm asupra unui perete apăsîndu-l sau forța exercitată de un resort comprimat, sînt forțe electromagnetice; toate sînt manifestări macroscopice ale atracțiilor și repulsiilor (electromagnetice) dintre atomi.

În modul nostru de tratare a mecanicii clasice am presupus pînă acum că măsurătorile și observațiile noastre erau făcute într-un reper inerțial. Reamintim că acesta este un sistem de referință care fie este în repaus fie se mișcă cu viteză constantă față de stelele fixe; aceasta este familia sistemelor de referință definite de prima lege a lui Newton, anume, acea familie a reperelor în care un corp nu este accelerat ($\vec{a}=0$) dacă nu există în vecinătatea sa nici un corp identificabil care să producă forță ($\vec{F}=0$). Alegerea unui reper este totdeauna la dispoziția noastră, astfel încît dacă alegem numai repere inerțiale, nu ne restrîngem în nici un fel posibilitatea de a aplica mecanica clasică la fenomenele naturale.

Cu toate acestea, dacă găsim convenabil, putem aplica mecanica clasică din punctul de vedere al unui observator aflat într-un reper *neinerțial*. Un astfel de reper ar putea fi un reper care se rotește (și deci este accelerat) față de stelele fixe. Uneori alegem un reper accelerat atunci cînd studiem, de exemplu, separarea lichidelor de densități diferite într-o centrifugă în rotație, circulația globală a vînturilor pe Pămîntul în rotație sau experiențele unui astronaut într-un satelit care orbitează.

Putem aplica mecanica clasică în repere neinertiale dacă introducem forțele numite *pseudoforțe* (sau *forțe de inerție*). Ele sînt numite astfel deoarece, spre deosebire de forțele pe care le-am examinat pînă acum, nu le putem asocia cu nici un corp determinat din mediul înconjurător al particulei asupra căreia ele acționează; nu le putem clasifica în nici o categorie enumerată în primul paragraf al acestui capitol. În sfîrșit, dacă privim particula dintr-un reper inertial, pseudoforțele dispar. Aceste forțe sînt deci pur și simplu un artificiu care ne permite să aplicăm mecanica clasică în mod normal evenimentelor, dacă insistăm să privim aceste evenimente dintr-un sistem de referință accelerat.

Să considerăm călușei în rotație, pe care este așezată o bilă în dreptul marginii mai ridicate periferice. Un observator de pe călușei este într-un sistem neinertial. Dacă el îngenunchiază și examinează bila, vede că, față de el, ea nu se mișcă; dacă o trage puțin afară de pe obadă, către centrul rotației, el observă că ea se mișcă înapoi ca și cum s-ar găsi sub influența unei forțe dirijată radial spre exterior. El va declara că bila este în echilibru sub acțiunea acestei forțe îndreptată spre exterior (o *pseudoforță*, numită în acest caz *forță centrifugă*) și a unei forțe radiale îndreptată spre interior exercitată de obadă.

Un observator de pe sol (reper inertial) care urmărește bila o va descrie în mod diferit. El va declara că bila se află într-o mișcare circulară uniformă, accelerată radial spre interior cu accelerația $a = v^2/R$. Forța îndreptată spre interior \vec{F} exercitată de obadă asupra bilei explică această accelerație din legea a doua a lui Newton sau $F = ma = mv^2/R$. Bila sigur nu este în echilibru din punctul de vedere al acestui observator sau al oricărui observator din oricare reper inertial. Numai dacă obada n-ar exercita această forță spre interior, bila s-ar mișca cu viteză uniformă pe o linie dreaptă și ar fi în echilibru. Acest observator n-ar găsi nici o urmă de forță dirijată radial spre exterior (pseudoforță) și în adevăr nu există loc pentru o astfel de forță în analiza mișcării efectuată de el.

Este clar din acest exemplu simplu că pseudoforța radială îndreptată spre exterior (sau forța centrifugă) constatată de observatorul aflat pe călușei în rotație trebuie să aibă valoarea mv^2/R . Astfel, valoarea pseudoforței depinde de viteza particulei *văzută dintr-un alt reper*, anume de pe Pămînt; viteza particulei în propriul sistem de referință (în rotație) este zero.

În problemele de mecanică, deci, avem două posibilități: (1) să alegem un *reper inertial* ca sistem de referință și să considerăm numai forțele „reale”, adică forțele pe care le putem asocia cu anumite corpuri din mediul înconjurător, sau (2) să alegem un *reper neinertial* ca sistem de referință și să considerăm nu numai forțele „reale”, ci și pseudoforțele definite adecvat. Deși noi de obicei alegem prima alternativă, uneori o alegem pe cea de a doua; amîndouă sînt complet echivalente și alegerea este o chestiune de conveniență. Vom discuta reperele neinertiale și pseudoforțele mai tîrziu în capitolele 11 și 16.

6-5. Mecanica clasică, mecanica relativistă și mecanica cuantică

În primele capitole am pus bazele mecanicii clasice. Am prezentat legile mișcării și am dat mai multe exemple de legi ale forțelor. În ultimele capitole vom discuta alte tipuri de forțe și vom continua să dezvoltăm structura teoriei. Aici vrem să arătăm locul mecanicii clasice în cadrul fizicii moderne.

Fizica nu este o doctrină statică ci o știință care se dezvoltă. Din punct de vedere istoric au existat perioade lungi de studiu profund al unei anumite clase de probleme, culminând, adesea destul de brusc și într-un mod neașteptat, cu o „renaștere” în forma unei teorii noi, mai comprehensive. Aceasta s-a întâmplat aproximativ în anul 1670 (mecanica newtoniană), aproximativ în 1870 (teoria electromagnetismului a lui Maxwell), în 1905 (teoria relativității a lui Einstein) și aproximativ în 1925 (mecanica cuantică). Unii fizicieni cred că interesul actual pentru problemele din domeniul particulelor elementare (vezi anexa II vol. II) ne va conduce eventual spre o altă „reinveșmîntare” majoră.

Pe măsură ce fizica s-a dezvoltat, multe lucruri s-au schimbat, cum sînt problemele care trebuie rezolvate și mijloacele folosite pentru a le investiga. Dar în tot cuprinsul ei, metoda generală de cercetare sau procesul de rezolvare rămîne în esență același. Astfel, se constată că teoriile mai vechi ale fizicii au domenii de valabilitate limitate și reprezintă cazuri particulare ale teoriilor mai comprehensive, care la rîndul lor au limitări, și așa mai departe. Totuși, independent de orice domeniu particular sau problemă a fizicii, noi cerem totdeauna ca teoria să reziste la proba experienței, căutăm mărimi care să fie invariante, sîntem ghidați de credința în simplitatea și simetria naturii și căutăm și folosim analogii și modele. Apar conceptele majore de unificare care sînt valabile în toate domeniile fizicii, așa cum sînt legile de conservare. Toate acestea sînt importante pentru înțelegerea ca atare, independent de cunoașterea oricărei teme speciale particulare și este exemplificat acest lucru peste tot în carte. Dacă, în afara stăpînirii mecanicii clasice, studentul ajunge să înțeleagă acest proces, el va fi în stare să înțeleagă și să stăpînească mult mai ușor alte teorii cum sînt teoria relativității și teoria cuantică, în care se aplică aceeași metodă de cercetare dar ale căror domenii de aplicație, spre deosebire de cele ale mecanicii clasice, nu constituie o parte familiară din experiența sa zilnică de viață.

Mecanica clasică, ca toate teoriile din fizică, se bazează pe observațiile lucrurilor care se petrec în natură. Este util de evidențiat cît de limitate sînt experiențele noastre normale asupra fenomenelor naturale. Aceasta este deosebit de adevărat în timpul anilor noștri de formație, care reprezintă perioada în decursul căreia noi ne elaborăm noțiunile intuitive (adesea false!) despre ceea ce este „sensul comun” în evenimentele naturale și ceea ce nu este.

De exemplu, viteza maximă care poate fi folosită pentru a transmite semnale de la un punct la altul este viteza luminii ($c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s) și aceasta pare a pune o limită superioară vitezelor obiectelor materiale. Cu toate acestea, obiectele macroscopice, chiar cele mai rapide dintre ele, cum sînt avioanele cu reacție sau sateliții Pămîntului, au viteze v mult mai mici decît c . Pentru un satelit terestru care se mișcă cu 27 400 km/h, raportul v/c este de numai 0,00025. Mecanica clasică a fost clădită timp de mai multe secole pe baza observațiilor unor obiecte care se mișcă relativ încet, cum sînt planetele, bilele care se rostogolesc în jos pe planuri înclinate sau corpurile în cădere. Experiența noastră cu obiectele mobile a fost într-adevăr limitată, pînă în ultimele cîteva decenii, la o fracțiune infimă din domeniul vitezelor posibile.

În timpul acestor ultime decenii a devenit posibil să facem măsurători asupra particulelor mici cu o viteză esențial mai mare, cum sînt electronii, protonii și alte particule fundamentale.

Un proton accelerat în acceleratorul de 30 GeV de la Laboratoarele Naționale din Brookhaven, are de exemplu $v/c = 0,98$. Trebuie să ne așteptăm oare ca

legile mecanicii clasice, care funcționează atât de minunat când $v/c \ll 1$ să descrie de asemenea corect ciocnirile, dezintegrările și interacțiunile acestor particule elementare care se mișcă cu viteze atât de mari? Acesta este un mod foarte grosolan de extrapolare și în adevăr se găsește experimental că nu merge; mecanica clasică dă răspunsuri care nu concordă cu experiența dacă vitezele obiectelor studiate sînt apreciabile în comparație cu viteza luminii. Aceasta nu trebuie să ne facă să subapreciem mecanica clasică, care servește atât de bine în domeniul vitezelor mici, tocmai cel mai important domeniu din experiențele noastre de toate zilele. Sîntem conduși însă să privim mecanica clasică ca un caz particular al unei teorii mai generale, care să fie valabilă pentru toate vitezele pînă la viteza luminii.

Einstein, în 1905, a propus pentru prima dată o astfel de teorie mai generală, *teoria restrînsă a relativității*. Noi o vom discuta în profunzime mai tîrziu, dar vom formula aici postulatul său fundamental. Acesta constă în afirmația că viteza luminii c este aceeași pentru toți observatorii aflați în repere inerțiale, oricare ar fi mișcarea sursei de lumină. Cu alte cuvinte, dacă o sursă de lumină se mișcă direct către noi cu o viteză v , noi vom măsura aceeași valoare c , dacă observăm lumina trecînd pe lîngă noi, indiferent de valoarea lui v ; vom obține de asemenea viteza c pentru semnalele de lumină dacă sursa s-ar depărta de noi cu viteza v . Dacă această ipoteză de bază pare a viola „bunul simț”, trebuie să ne dăm seama că senzațiile noastre intuitive sînt bazate pe „bunul simț la viteze mici”. Noi nu avem nici o experiență directă în activitățile noastre zilnice despre ceea ce se întîmplă în realitate în natură la viteze mari. Mai mult, toate predicțiile lui Einstein: (1) concordă cu experiența și (2) se reduc la predicțiile mecanicii clasice la viteze mici.

Dăm mai jos una din prevederile teoriei relativității care este în discordanță cu mecanica clasică. Dacă doi observatori urmăresc un obiect ce se mișcă paralel cu axa comună $x-x'$ din figura 4-11, ei vor găsi conform ecuației (4-19),

$$v = v' + u \quad (6-5)$$

unde v' este viteza măsurată de observatorul S' , v este viteza măsurată de observatorul S , iar u este viteza relativă cu care se mișcă cele două sisteme de referință. Observăm că în ecuația (6-5) nu există nimic care să împiedice pe v să depășească pe c dacă v' și u sînt suficient de mari.

Teoria relativității prezice că ecuația (6-5) este un caz particular al unei formule mai generale și anume

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} \quad (6-6)$$

Observăm că pentru $v' \ll c$ și $u \ll c$ ecuația (6-6) se reduce în adevăr la ecuația (6-5). De asemenea, dacă $v' < c$ și $u < c$ atunci v nu-l poate depăși pe c . Dacă de exemplu $v' = u = 0,8c$ ecuația (6-6) dă $v = 0,975c$; pe de altă parte ecuația (6-5) dă $v = 1,6c$ ceea ce este în contradicție cu experiența.

Pentru obiectele macroscopice, ecuațiile (6-5) și (6-6) dau aceleași rezultate în limitele erorilor experimentale, astfel încît folosim natural pe cea mai simplă, — ecuația (6-5). Dacă doi sateliți care se mișcă în sens opus au vitezele $v' = u = 27\,400$ km/h numitorul din ecuația (6-6) are valoarea 1,000 000 000 7, astfel încît viteza v a unui satelit, văzută de pe celălalt, diferă foarte puțin de valoarea $v' + u$ prezisă de ecuația (6-5). Ar trebui viteze de aproape 3 000 ori mai mari decît cea de sus, aproape 80 milioane km/h, în general posibile de obținut numai în

domeniul atomic, pentru a obține o diferență de jumătate de procent între cele două formule.

Relevăm acum un al doilea mod în care experiențele noastre de toate zilele sînt limitate, și anume faptul că toate obiectele cu care avem de obicei de-a face au mase care depășesc cu mult masa electronului ($m=9,11 \cdot 10^{-31}$ kg), de exemplu. Aceasta duce la o consecință interesantă, strîns legată de însuși conceptul de „particulă” pe care se bazează mecanica clasică. Noi nu am ezitat să atribuim o masă m , o poziție x și o viteză v_x unei particule, presupusă în mișcare de-a lungul axei x ¹. Dacă ne întrebăm cu ce precizie Δx și Δv_x am putea măsura poziția x și respectiv viteza v_x , am fi înclinați să spunem că, deși în practică ar putea exista limite, ele nu există în principiu și, cu o atenție suficientă acordată metodelor de măsură putem specifica pe x și pe v_x oricît de precis vrem. Experiențele par să confirme acest punct de vedere pentru obiecte mari precum mingi de golf sau gloanțe.

Cînd avem însă de a face cu obiecte de mase foarte mici, cum sînt electronii, aflăm că însăși procedeele de măsurare introduc imprecizuni fundamentale și că de fapt cu cît cunoașterea lui x devine mai precisă, cu atît cunoașterea lui v_x devine mai puțin precisă, și reciproc. Putem exprima aceasta prin cunoscutele relații de incertitudine ale lui Heisenberg, pe care le scriem astfel:

$$\Delta x \cong \left| \frac{h}{m \Delta v_x} \right|, \quad (6-7)$$

în care h (constanta lui Planck) este o constantă fundamentală a naturii și are valoarea $h=6,63 \cdot 10^{-34}$ kg·m²/s. Ecuația (6-7) arată clar că dacă Δv_x este foarte mic (ceea ce înseamnă că îl cunoaștem pe v_x foarte precis), atunci Δx trebuie să fie relativ mare (ceea ce înseamnă că nu cunoaștem pe x prea precis). În modul acesta, nu pare posibil să măsurăm atît poziția cît și viteza unei particule cu orice precizie dată în același timp. Dacă nu putem face aceasta, rezultă că conceptul nostru global de particulă ca punct material care se mișcă pe o traiectorie, ceea ce reprezintă un concept de bază al mecanicii clasice, este discutabil.

La fel ca în cazul teoriei relativității, aceste considerații ale mecanicii cuantice nu dau nici o diferență pentru obiectele macroscopice din experiența noastră de toate zilele. Să considerăm un glonte avînd o viteză de 10^3 m/s și o masă de 1,0 g ($=10^{-3}$ kg). Să presupunem că cunoaștem viteza cu o precizie de 1,0%, ceea ce înseamnă că $\Delta v_x=0,001 \cdot 10^3=1$ m/s. Impreciziunea în poziția glontelui este acum dată de ecuația (6-7):

$$\Delta x \cong \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{10^{-3} \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}} = 7 \cdot 10^{-31} \text{ m}.$$

Aceasta este o distanță atît de mică (fiind de 10^{-15} ori mai mică decît un nucleu atomic!) încît n-am putea detecta nici o limitare în măsurarea lui x impusă de ecuația (6-7).

Să considerăm acum însă, nu un glonte, ci un electron ($m=9,11 \cdot 10^{-31}$ kg) a cărui viteză măsurată ar fi $2 \cdot 10^6$ m/s, ceea ce este egal aproximativ cu viteza unui electron într-un atom de hidrogen. Dacă presupunem că cunoaștem această

¹ Presupunem că $v_x \ll c$ astfel încît considerațiile teoriei relativității nu intervin în această nouă discuție.

viteză cu o precizie, să zicem, de 1%, atunci $\Delta v_x = 0,01 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. Imprecizia în poziție, prezisă de ecuația (6-7), este atunci

$$\Delta x \approx \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

Deoarece raza unui atom de hidrogen este de aproximativ $5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, vedem că imprecizia cu care putem localiza electronul în atomul de hidrogen, presupunând că am măsurat viteza sa cu precizia amintită, este de 600 ori mai mare decât raza atomului! Conceptul de „particulă” nu înseamnă mare lucru în aceste circumstanțe. El înseamnă pur și simplu că nu putem folosi mecanica clasică pentru a descrie mișcările electronilor în atomi; avem nevoie de mecanica cuantică.

Situația este foarte asemănătoare cu cea a teoriei relativității. Idelle pe care le găsim acceptabile într-un anumit domeniu al experienței (gloante) cad atunci când le aplicăm într-un domeniu din afara experienței noastre normale directe (electroni în atomi). Încă odată soluția este aceeași: se constată că mecanica clasică este un caz particular important al unei teorii mai generale. În acest caz teoria generală este mecanica cuantică dezvoltată aproximativ între 1925—1926 de către Heisenberg, Schrödinger, Born și alții. Încă odată mecanica cuantică nu subestimează meritele mecanicii clasice care continuă să dea rezultate în admirabilă concordanță cu experiențele efectuate cu particule de masă relativ mare.

Situația cea mai depărtată de experiența noastră de toate zilele are de a face cu particule care au masă mică și în același timp viteză mare. Aici trebuie să folosim o teorie și mai generală, *mechanica cuantică relativistă*, care combină atât teoria relativității cât și mecanica cuantică; o astfel de teorie a fost pentru prima dată elaborată de către Dirac în 1927.

În restul tratării mecanicii noi vom reveni la cazul particular familiar al experienței noastre de toate zilele, cazul obiectelor relativ masive și mișcându-se relativ încet (mecanica clasică). Din când în când vom releva cum trebuie modificate predicțiile mecanicii clasice atunci când depășim acest domeniu al experienței.

Întrebări

1. Există o limită dincolo de care o lustruire mai fină a unei suprafețe mărește în loc să micșoreze forțele de frecare. Puteți explica aceasta?

2. Este nerezonabil să ne așteptăm la un coeficient de frecare mai mare decât unitatea?

3. Cum ar putea să ajungă la țarm o persoană care se află în repaus, complet fără frecări, pe gheața care acoperă un lac? Ar putea face aceasta: mergând, rostogolindu-se, zvirlind brațele sau zvirlind picioarele? Cum ar putea fi plasată o persoană

într-o astfel de poziție pentru prima dată?

4. Să se explice modul în care bătaia farurilor automobilului limitează viteza maximă de deplasare în securitate pe timp de noapte.

5. Automobilul dv. derapează de-a lungul liniei centrale pe o șosea cu ploi. Trebuie să rotiți roțile din față în sensul derapării sau în sensul opus: (a) dacă vreți să evitați o ciocnire cu un automobil care vine din față. (b) dacă nu există nici un automobil în apropiere, dar vreți să recâștigați controlul asupra volanului?

6. Dacă vrei să opriți automobilul pe o distanță cât mai scurtă, pe o șosea cu polei, trebuie să: (a) apăsați puternic pe frâne pentru a bloca roțile, (b) apăsați exact atât de tare încât să preîntîmpinați alunecarea sau (c) apăsați treptat frânele?

7. Un cub de greutate G se află în repaus pe un plan înclinat aspru (rugos) care face un unghi θ cu orizontala. Să se compare forța minimă necesară pentru a porni cubul în jos de-a lungul planului cu forța necesară pentru a urni cubul în sus de-a lungul planului înclinat. Cum sînt aceste forțe în comparație cu forța orizontală minimă (transversală pe panta planului) care produce mișcarea cubului în jos pe plan?

8. De ce căile ferate și șoselele sînt înclinate la curbe?

9. Cum afectează rotația Pămîntului greutatea aparentă a unui corp aflat la Ecuator?

10. Un automobil se deplasează pe un drum de țară, care seamănă cu un drum pentru cărucior cu role. Dacă automobilul se mișcă cu viteză uniformă, să se compare forța pe care el o exercită asupra unei secțiuni orizontale a drumului cu forța pe care el o exercită asupra drumului în vîrfurile dealurilor și în fundul unei văi. Să se explice.

11. Să presupunem că vrei să măsoarăți dacă tabla unei mese dintr-un tren este într-adevăr orizontală. Dacă folosiți o nivelă cu spirt, puteți determina aceasta cînd trenul se mișcă în jos sau în sus pe o pantă? Cînd trenul se mișcă de-a lungul unei curbe? (Indicație: există două componente orizontale.)

12. În cazul pendulului conic de la exemplul 3, ce se întîmplă cu perioada τ și cu viteza v dacă $\theta = 90^\circ$? De ce acest unghi nu poate fi obținut fizicește? Să se discute cazul $\theta = 0^\circ$.

13. O monedă este așezată pe discul unui patefon. Motorul este pornit, dar înainte de a se atinge viteza finală de rotație, moneda zboară afară. Să se explice.

14. Un pasager așezat pe scaunul din față al unui autobuz se simte lunecînd în spre ușă atunci cînd șoferul face un viraj brusc spre stînga. Să se descrie forțele ce acționează asupra pasagerului și asupra autobuzului în acel moment dacă: (a) mișcarea este văzută dintr-un sistem de referință legat de Pămînt și (b) dacă sistemul este legat de autobuz.

15. Care este distincția dintre sistemele de referință inerțiale și sistemele care diferă numai printr-o translație sau rotație a axelor?

Probleme

1. Un pompier cîntărind 70 kgf alunecă în jos pe un stîlp vertical cu o accelerație medie de $9,8 \text{ m/s}^2$. Care este forța verticală medie pe care el o exercită asupra stîlpului?

2. Un vagon platformă de cale ferată este încărcat cu lăzi care au un coeficient de frecare statică 0,25 cu podeaua. Dacă trenul se mișcă cu 50 km/h, pe ce distanță minimă poate

opri trenul fără a permite lăzilor să alunece?

3. Căldura produsă prin frecare de schiul în mișcare reprezintă factorul principal care ajută la alunecare în timpul schierii. Schiurile aderă la pornire, dar odată puse în mișcare vor topi zăpada de dedesubt. Ungînd schiurile, apa nu aderă la ele și astfel se reduce frecarea cu pelicula de apă. O reclamă anunță că a produs

un nou tip de schiuri din plastic care reduc frecarea și mai mult și că pe o pîrtie lină de 213,5 m în Alpi, un schior a redus timpul de la 61 la 42 s cu noile schiuri. (a) Să se determine accelerațiile medii pentru fiecare pereche de schiuri. (b) Presupunînd o pantă de 3° , să se calculeze coeficientul de frecare cinetică în fiecare caz.

4. Un student vrea să determine coeficienții de frecare statică și de frecare cinetică dintre o cutie și o scîndură. El așază cutia pe scîndură și mărește treptat înclinarea scîndurii. Atunci cînd unghiul de înclinare față de orizontală atinge 30° , cutia începe să alunece și parcurge 4,0 m în jos pe scîndură în 4,0 s. Să se arate cum poate el determina coeficienții din aceste observații?

5. Un puc de hochei cîntărind 113 gf alunecă pe gheață 15,25 m pînă la oprire. (a) Dacă viteza sa inițială era de 0,61 m/s, care este forța de frecare dintre puc și gheață? (b) Care este coeficientul de frecare cinetică?

6. Un bloc de 5,0 kgf din oțel se află în repaus pe o masă orizontală. Coeficientul de frecare statică dintre bloc și masă este de 0,50. (a) Care este mărimea forței orizontale care este *exact* necesară pentru a pune blocul în mișcare? (b) Care este mărimea unei forțe acționînd în sus sub 60° față de orizontală care va porni *exact* blocul? (c) Dacă forța acționează în jos sub un unghi de 60° față de orizontală, cît de mare poate fi ea astfel încît să nu ducă la mișcarea blocului?

7. O bucată de gheață alunecă în jos pe un plan înclinat la 45° într-un timp de două ori mai mare decît timpul de alunecare în jos pe un plan înclinat la 45° dar fără frecări. Care este coeficientul de frecare cinetică între gheață și planul înclinat?

8. O forță orizontală F de 6,0 kgf împinge un bloc cîntărind 2,0 kgf spre

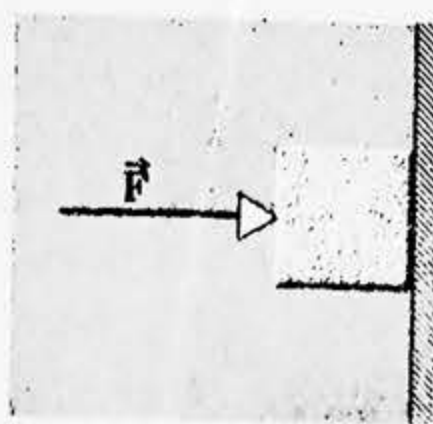


Figura 6-10.

un perete vertical (fig. 6-10). Coeficientul de frecare statică dintre perete și bloc este 0,60, iar coeficientul de frecare cinetică este 0,40. Presupunem că inițial blocul nu se mișcă. (a) Va începe blocul să se miște? (b) Care este forța exercitată asupra blocului de către perete?

9. Blocul B din figura 6-11 cîntărește 72 kgf. Coeficientul de frecare

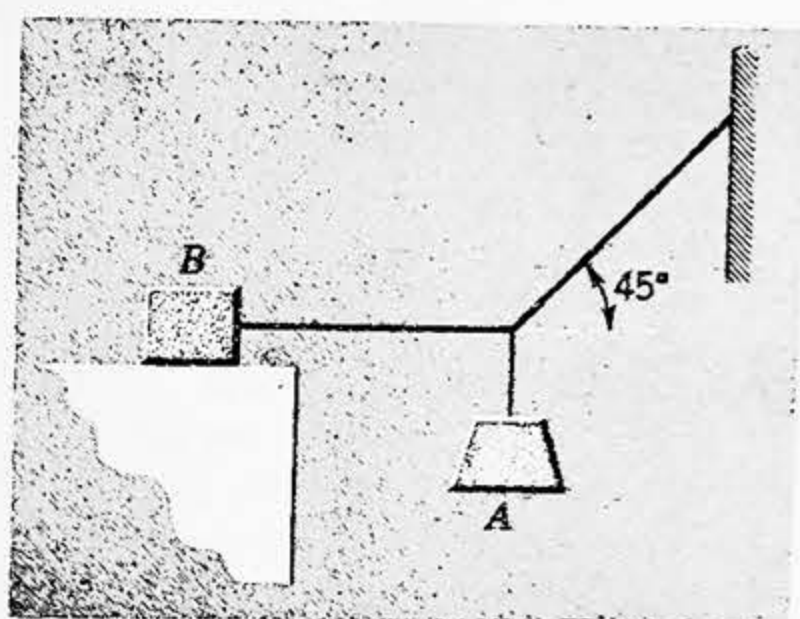


Figura 6-11.

statică dintre bloc și masă este 0,25. Să se afle greutatea maximă a blocului A pentru care sistemul va fi în echilibru.

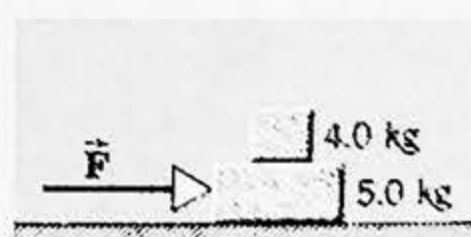


Figura 6-12.

10. Un bloc de 4,0 kg este așezat deasupra unui bloc de 5,0 kg (fig. 6-12). Pentru ca blocul superior să alunece peste cel inferior, trebuie aplicată o forță orizontală de 12 N blocului superior în cazul când blocul inferior este ținut în loc. Presupunând că nu au loc frecări cu masa să se afle: (a) forța orizontală maximă F care poate fi aplicată blocului inferior astfel încât blocurile să se miște împreună și (b) accelerația rezultantă a blocurilor.

11. În figura 6-13, A este un bloc cu greutatea de 4,5 kgf și B este un bloc cu greutatea de 2,26 kgf. (a) Să se determine greutatea minimă (blocul C) care trebuie așezată peste A pentru a-l împiedica să alunece, dacă coeficientul de frecare statică μ_s dintre A și masă este 0,20. (b) Blocul C este ridicat brusc de pe A. Care va fi accelerația blocului A, dacă coeficientul de frecare cinetică μ_c dintre A și masă este 0,20?

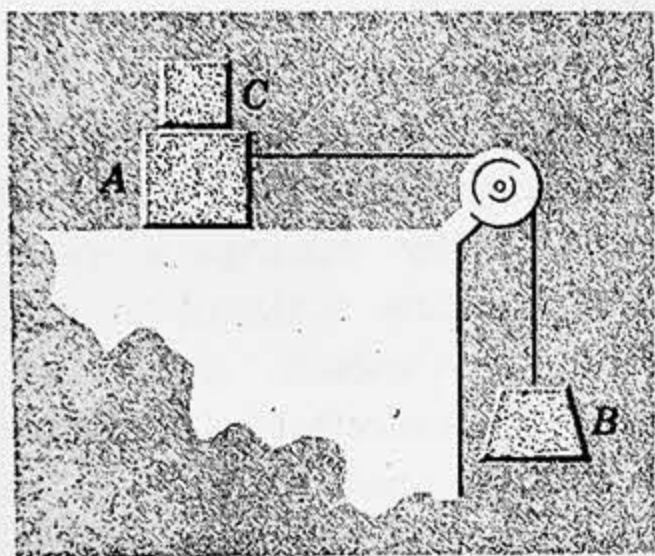


Figura 6-13.

12. Coada unei perii de parchet de masă m face un unghi θ cu direcția verticală. Fie μ_c coeficientul de frecare cinetică dintre perie și podea și μ_s coeficientul de frecare statică dintre perie și podea. Se neglijează masa cozii. (a) Să se afle mărimea forței F dirijată de-a lungul cozii, necesară pentru a face peria să alunece cu viteză uniformă pe podea. (b) Să

se arate că dacă θ este mai mic decât un anumit unghi θ_0 , peria nu poate fi făcută să alunece pe podea oricât de mare ar fi forța dirijată de-a lungul cozii. (c) Cît este unghiul θ_0 ?

13. Un bloc alunecă în jos pe un plan înclinat de unghi Φ cu viteză constantă. Apoi, el este lansat în sus de-a lungul acelulași plan cu o viteză inițială v_0 . Ce spațiu parcurge el în sus pe planul înclinat pînă la oprire? Va aluneca el înapoi?

14. Corpul B are greutatea de 50 kgf, iar corpul A de 16 kgf (fig. 6-14). Fiind dați $\mu_s = 0,56$ și $\mu_c = 0,25$, (a) să se afle accelerația sistemului dacă B este inițial în repaus și (b) să se afle accelerația dacă B se mișcă inițial.

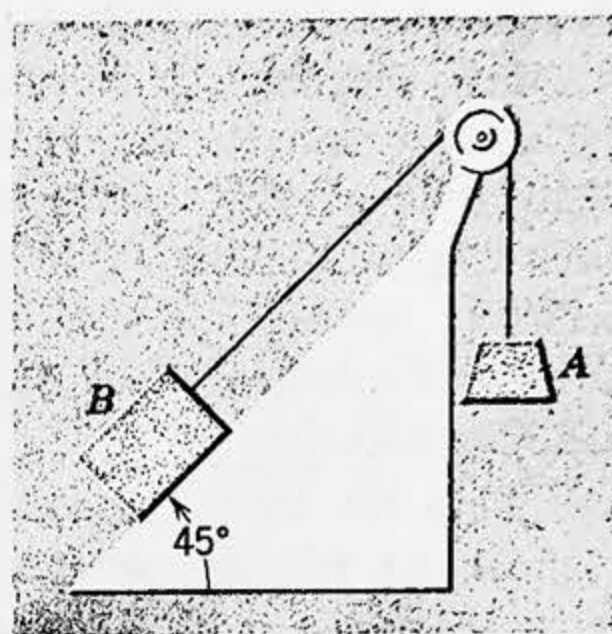


Figura 6-14.

15. Două corpuri cu masele $m_1 = 1,65$ kg și $m_2 = 3,30$ kg legate printr-o tijă de masă neglijabilă, paralelă cu

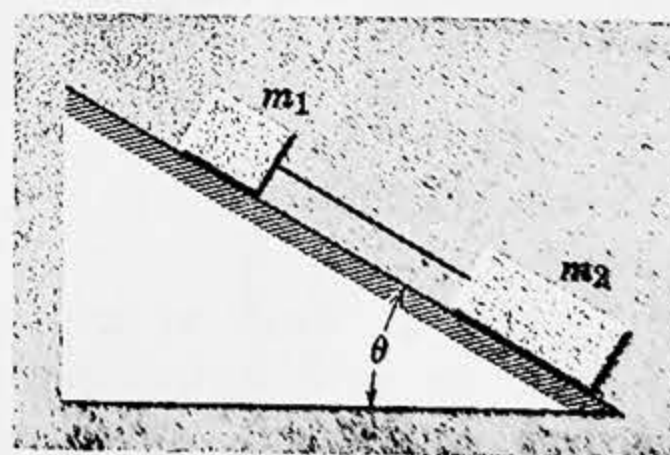


Figura 6-15.

planul înclinat pe care alunecă cele două corpuri, ca în figura 6-15, coboară în jos de-a lungul planului, m_1 urmîndu-l pe m_2 . Unghiul de înclinare al planului este $0-30^\circ$. Coeficientul de frecare cinetică dintre m_1 și planul înclinat este $\mu_1=0,226$; coeficientul de frecare cinetică dintre m_2 și planul înclinat este $\mu_2=0,113$. Să se calculeze: (a) tensiunea din tija care leagă pe m_1 de m_2 și (b) accelerația comună a celor două corpuri. (c) Se schimbă răspunsurile de la punctele (a) și (b) dacă m_2 îl urmează pe m_1 ?

16. Un bloc cu greutatea de 4,0 kgf și un bloc cu greutatea de 8,0 kgf legate printr-un fir alunecă în jos pe un plan înclinat de 30° . Coeficientul de frecare cinetică dintre blocul cu greutatea de 4,0 kgf și plan este 0,10; dintre blocul cu greutatea de 8,0 kgf și plan este 0,20. Să se afle: (a) accelerația blocurilor, și (b) tensiunea din fir, presupunînd că în față este blocul cu greutatea de 4,0 kgf. (c) Să se descrie mișcarea dacă blocurile își schimbă locurile.

17. Un bloc de masă m alunecă într-un jgheab cu fețe perpendiculare între ele ca în figura 6-16. Dacă coeficientul de frecare cinetică dintre bloc și materialul din care este făcut jgheabul este μ_c , să se afle accelerația blocului.



Figura 6-16.

18. Un bloc de masă m aflat la capătul unui fir este învîrtit pe un cerc vertical de rază R . Să se afle viteza critică sub care firul devine slăbit în punctul cel mai înalt.

19. Un aeroplan cu greutatea de 2 260 kgf descrie o buclă cu o viteză de 322 km/h. Să se afle: (a) raza buclei circulare maxime posibile și (b) forța care acționează asupra aeroplanului în punctul inferior al acestei bucle.

20. În modelul lui Bohr al atomului de hidrogen, electronul se mișcă pe o orbită circulară în jurul nucleului. Dacă raza orbitei este $5,3 \cdot 10^{-11}$ m și electronul face $6,6 \cdot 10^{15}$ rot/s, să se afle: (a) accelerația electronului (în mărime și direcție) și (b) forța centripetă care acționează asupra electronului. (Această forță se datorește atracției dintre nucleul încărcat pozitiv și electronul încărcat negativ.) Masa electronului este $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

21. Să presupunem că kilogramul etalon ar cîntări exact 9,80 N la nivelul mării la Ecuatorul terestru, dacă Pămîntul nu s-ar roti în jurul axei sale. Apoi ținem seama de faptul că Pămîntul se rotește astfel încît această masă se mișcă pe un cerc de rază $6,40 \cdot 10^6$ m (raza Pămîntului) cu o viteză constantă de 465 m/s. (a) Să se determine forța centripetă necesară pentru a menține etalonul în mișcare pe orbita sa circulară. (b) Să se determine forța exercitată de kilogramul etalon asupra unei balanțe cu resort de care el este suspendat la Ecuator (greutatea sa).

22. Datorită rotației Pămîntului, un fir cu plumb poate să nu atîrne exact de-a lungul direcției forței gravitaționale terestre (a greutateii sale) ci să devieze puțin de la această direcție. Să se calculeze deviația: (a) la latitudinea de 40° , (b) la Poli și (c) la Ecuator.

23. O curbă circulară a unei șosele este prevăzută pentru trafic cu o viteză de 64,4 km/h. (a) Dacă raza

curbei este de 122 m, care este unghiul corect de înclinare a șoselei? (b) Dacă curba nu este înclinată, care este coeficientul de frecare minim dintre anvelope și șosea care ar împiedica vehiculele să derapeze la această viteză?

24. Un automobil vechi cotește după un colț pe un drum neîncălinat. Dacă raza drumului este de 9,0 m și viteza automobilului de 16 km/h, ce unghi va face cu verticala o curea care atârna liber ținută în mână? Există vreo forță care acționează asupra curelei? Dacă da, este ea o forță centripetă sau o forță centrifugă? Depind răspunsurile de sistemul de referință ales?

25. Un corp cu masa m aflat pe o masă fără frecări este legat de un alt corp cu masa M care atârna de un fir trecut printr-un orificiu al mesei (fig. 6-17). Să se afle condițiile (v și r) cu care trebuie să se rotească corpul cu masa m pentru ca cel cu masa M să stea în repaus.

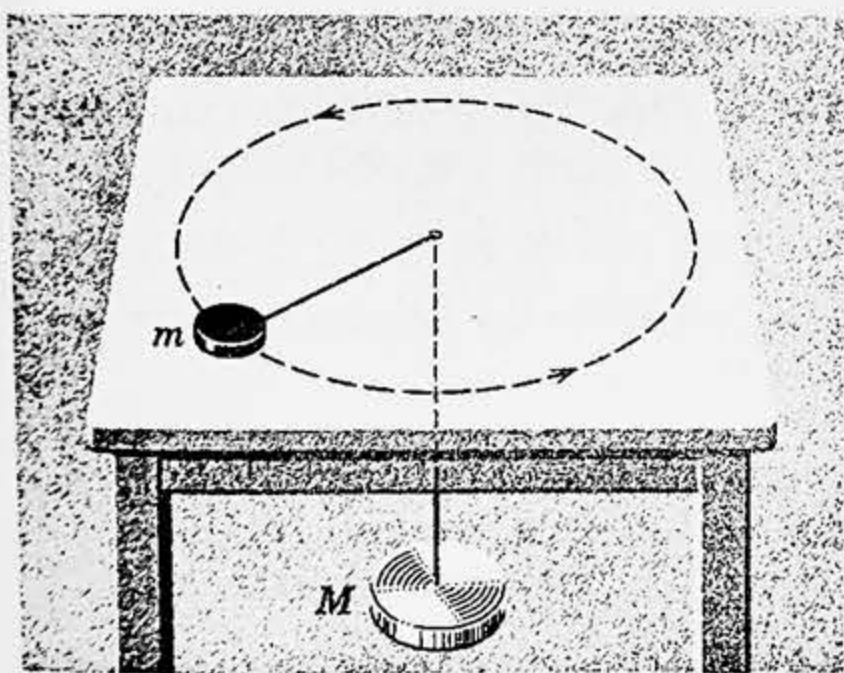


Figura 6-17.

26. Să ne imaginăm că discul din figura 6-6 este legat de un resort în loc de un fir. Lungimea de repaus a resortului este l_0 și tensiunea din resort crește direct proporțional cu elongația sa, tensiunea pe unitatea de

elongație fiind k . Dacă discul se rotește cu o frecvență ν (rotații pe unitatea de timp), să se arate că: (a) raza R a mișcării circulare uniforme este $kl_0/(k-4\pi^2mf^2)$ și (b) tensiunea T din resort este $4\pi^2mkl_0f^2/(k-4\pi^2mf^2)$.

27. (a) Care este raza minimă a unui cerc pe care poate merge un biciclist dacă viteza sa este de 29 km/h și coeficientul de frecare statică dintre anvelope și șosea este 0,32? (b) În aceste condiții care este unghiul maxim de înclinare față de verticală sub care poate merge biciclistul fără să cadă?

28. O monedă mică este așezată pe un disc orizontal plat aflat în rotație. Discul execută trei rotații în 3,14 s. (a) Care este viteza monedei dacă ea se mișcă fără alunecare la o distanță de 5,0 cm de centrul discului? (b) Care este accelerația (în mărime și direcție) monedei de la punctul (a)? (c) Care este forța de frecare care acționează asupra monedei de la punctul (a) dacă moneda are o masă m ? (d) Care este coeficientul de frecare statică dintre monedă și disc dacă moneda alunecă pe disc atunci când este așezată la o distanță mai mare de 10 cm de la centrul discului?

29. Un cub foarte mic de masă m este așezat pe fața interioară a unei pîlnii (fig. 6-18) care se rotește în ju-

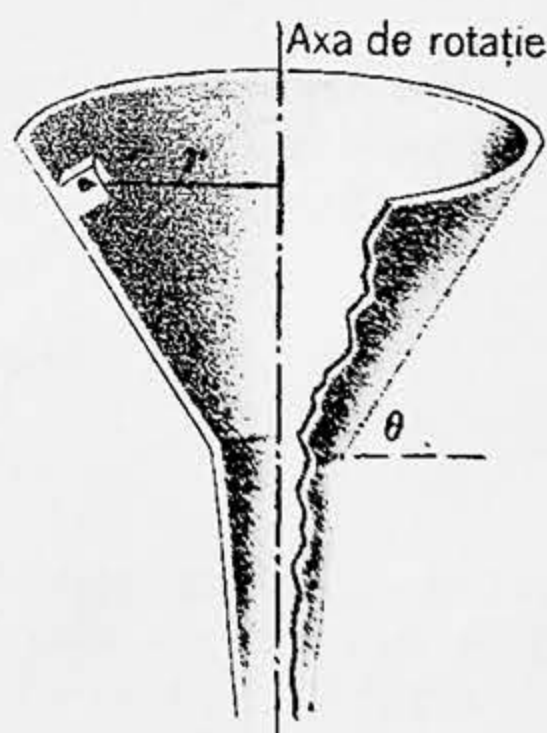


Figura 6-18.

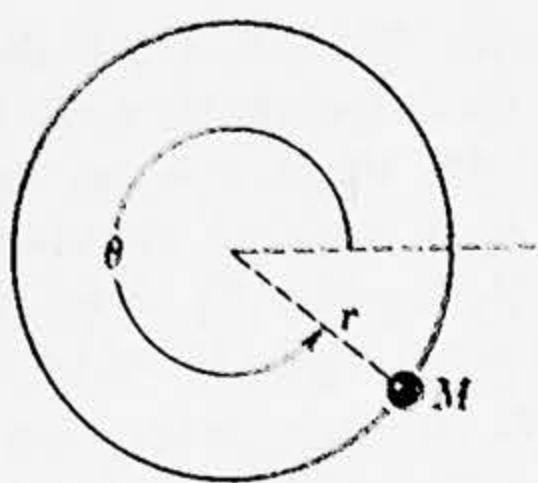


Figura 6-19.

rul unei axe verticale cu o turație constantă de ν rot/s. Peretele pîlniei face un unghi θ cu orizontala. Dacă coeficientul de frecare statică dintre cub și pîlnie este μ și centrul cubului se află la distanța r de axa de rotație,

care este valoarea maximă și cea minimă a lui ν pentru care blocul nu se va mișca față de pîlnie?

30. O particulă de masă $M=0,305$ kg se mișcă în sens trigonometric pe un cerc orizontal de rază $r=2,63$ m cu o viteză absolută constantă $v=0,754$ m/s ca în figura 6-19. Să se determine în momentul $0-322^\circ$ (măsurat în sens trigonometric de la direcția pozitivă a axei x) următoarele mărimi: (a) componenta pe direcția x a vitezei; (b) componenta pe direcția y a accelerației; (c) forța totală care acționează asupra particulei; (d) componenta forței totale care acționează asupra particulei în direcția vitezei sale.

Lucrul mecanic și energia

7-1. Introducere

O problemă fundamentală a dinamicii punctului material este aceea de a afla cum se va mișca o particulă dacă cunoaștem forțele care acționează asupra ei. Prin „cum se va mișca o particulă” înțelegem cum variază poziția sa în timp. Dacă mișcarea este unidimensională, problema este de a găsi pe x în funcție de timp $x(t)$. În cele două capitole precedente am rezolvat această problemă în cazul particular al unei forțe constante. Metoda folosită era următoarea. Aflăm forța rezultantă \vec{F} care acționează asupra particulei din legea corespunzătoare a forței. Substituim apoi pe \vec{F} și masa m a particulei în legea a doua a mișcării a lui Newton. Aceasta ne dă accelerația \vec{a} a particulei:

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

Dacă forța \vec{F} și masa m sînt constante, accelerația \vec{a} trebuie să fie constantă. Să alegem axa x de-a lungul direcției acestei accelerații constante. Putem atunci să aflăm viteza particulei din ecuația (3-12),

$$v = v_0 + at$$

și poziția particulei din ecuația (3-15) (cu $x_0 = 0$):

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2;$$

observăm că pentru simplitate și conveniență am omis indicele x din aceste ecuații. Ultima ecuație ne dă direct ceea ce vrem să aflăm în mod obișnuit, anume pe $x(t)$, poziția particulei în funcție de timp.

Problema este însă mai dificilă atunci cînd forța care acționează asupra particulei *nu este constantă*. Într-un astfel de caz, obținem de ase-

menea accelerația particulei, ca și înainte, din legea a doua a mișcării a lui Newton dar pentru a obține viteza sau coordonata particulei, nu mai putem folosi formulele dezvoltate mai sus valabile pentru accelerație constantă, deoarece accelerația *nu* mai este acum constantă. Pentru a rezolva astfel de probleme, folosim procesul matematic de integrare pe care îl vom studia în acest capitol.

Ne fixăm atenția asupra forțelor care variază o dată cu coordonata particulei în mediul său înconjurător. Acest tip de forță este cel obișnuit în fizică. Unele exemple sînt date de forțele gravitaționale dintre corpuri, precum Soarele și Pămîntul, sau Pămîntul și Luna, și de forța exercitată de un resort întins sau comprimat asupra unui corp de care el este legat. Procedul folosit pentru a determina mișcarea unei particule supuse la o astfel de forță, ne conduce la conceptele de lucru mecanic și de energie cinetică și la stabilirea teoremei energiei cinetice, care constituie trăsătura centrală a acestui capitol. În capitolul 8 elaborăm o vedere mai generală asupra energiei, înglobată în legea conservării energiei, un concept care a jucat un rol important în dezvoltarea fizicii.

7-2. Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă

Să considerăm o particulă asupra căreia acționează o forță. În cazul cel mai simplu, forța \vec{F} este constantă și mișcarea are loc pe o linie dreaptă în direcția forței. Într-o astfel de situație definim *lucrul mecanic efectuat de forță asupra particulei* ca fiind egal cu produsul dintre mărimea (modulul) forței F și distanța d pe care se mișcă particula. Scriem aceasta sub forma

$$W = Fd.$$

Dar forța constantă care acționează asupra particulei poate să nu acționeze în direcția în care se mișcă particula. În acest caz definim *lucrul mecanic efectuat de forță asupra particulei* ca fiind egal cu produsul dintre componenta forței de-a lungul liniei de mișcare și distanța d cu care s-a deplasat corpul de-a lungul acestei drepte. În figura 7-1 forța constantă \vec{F} face un unghi Φ cu axa x și acționează asupra particulei a cărei deplasare de-a lungul axei x este \vec{d} . Dacă W reprezintă lucrul mecanic efectuat de \vec{F} în timpul acestei deplasări, atunci conform definiției noastre

$$W = (F \cos \Phi)d. \quad (7-1)$$

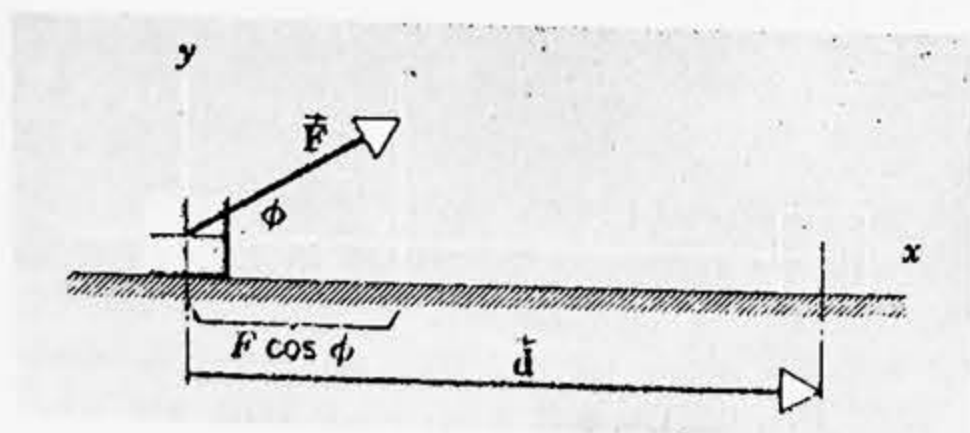


Figura 7-1. O forță \vec{F} obligă blocul să se deplaseze pe distanța d . Componenta lui \vec{F} care efectuează lucrul mecanic are mărimea $F \cos \Phi$; lucrul mecanic efectuat este $Fd \cos \Phi = (\vec{F} \cdot \vec{d})$.

Desigur trebuie să existe și alte forțe care acționează asupra particulei care se mișcă în acest mod (greutatea și forța de frecare exercitată de plan, pentru a cita două). O particulă asupra căreia acționează doar o singură forță poate avea o deplasare într-o direcție, alta decât cea a acestei forțe, ca în cazul mișcării unui proiectil. Dar ea nu se poate mișca pe o dreaptă dacă dreapta nu are aceeași direcție cu cea a unicei forțe aplicate particulei. Ecuația (7-1) se referă numai la lucrul mecanic efectuat asupra particulei de o forță particulară \vec{F} . Lucrul mecanic efectuat asupra particulei de celelalte forțe trebuie calculat separat. Lucrul mecanic total efectuat asupra particulei este suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele individuale.

Dacă Φ este zero, lucrul mecanic efectuat de \vec{F} este Fd , în concordanță cu ecuația precedentă. Astfel, dacă o forță orizontală trage orizontal un corp sau dacă o forță verticală ridică un corp vertical, lucrul mecanic efectuat de forță este produsul dintre intensitatea forței și distanța parcursă. Dacă Φ este 90° , forța nu are nici o componentă pe direcția mișcării. Astfel de forțe nu efectuează deci lucru mecanic asupra corpului. De exemplu, o forță verticală care ține corpul la o distanță fixă de pământ nu efectuează lucru mecanic asupra corpului, chiar dacă corpul se mișcă orizontal pe pământ. De asemenea, forța centripetă care acționează asupra unui corp în mișcare nu efectuează lucru mecanic asupra corpului, deoarece forța este totdeauna îndreptată sub un unghi drept față de direcția în care se mișcă corpul. Desigur, forța nu efectuează lucru mecanic asupra unui corp care nu se mișcă deoarece atunci deplasarea este zero. În figura 7-2 sînt ilustrate exemple comune în care o forță aplicată unui corp nu efectuează lucru mecanic asupra acelui corp.

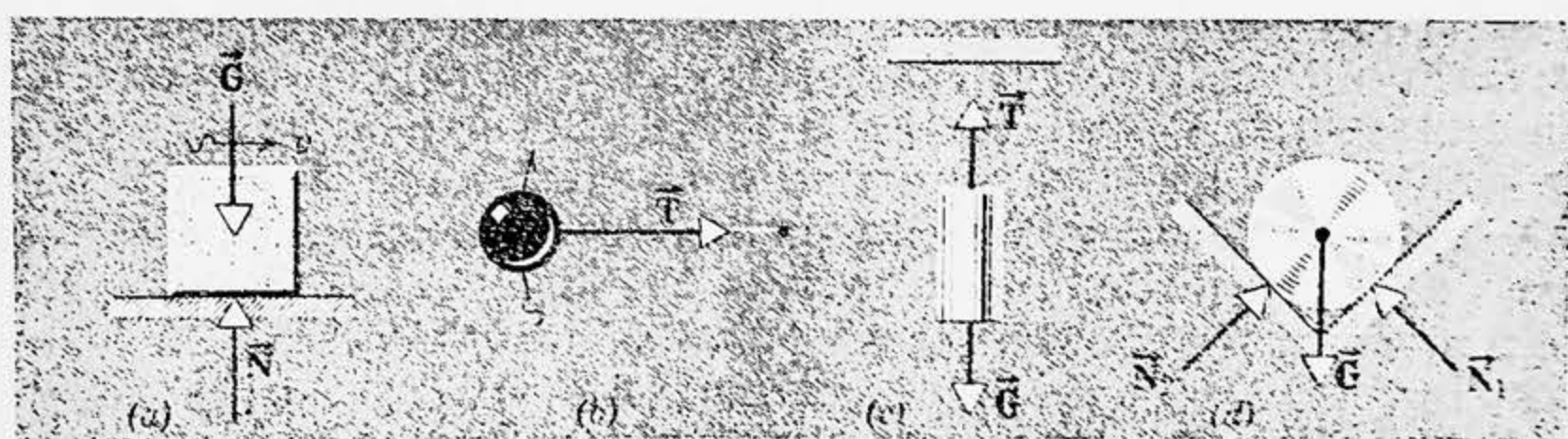


Figura 7-2. Nu totdeauna o forță aplicată unui corp efectuează un lucru mecanic. (a) Blocul se mișcă spre dreapta cu viteza constantă v pe o suprafață fără frecări. Nu este efectuat lucru mecanic nici de greutatea \vec{G} , nici de forța normală \vec{N} . (b) O bilă se mișcă pe un cerc sub influența unei forțe centripete T . Există o accelerație centripetă \vec{a} dar nu este efectuat nici un lucru mecanic de către \vec{T} . Atît în (a) cît și în (b) forțele considerate (\vec{G} , \vec{N} și \vec{T}) sînt perpendiculare pe deplasare, astfel încît $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \Phi = Fd \cos 90^\circ = 0$. (c) Un cilindru este atârnat printr-un fir. Nu este efectuat lucru mecanic nici de către \vec{T} , tensiunea din fir, nici de către \vec{G} , greutatea cilindrului. (d) Un cilindru se află în repaus într-un șanț; nu este efectuat nici un lucru mecanic de către \vec{G} , \vec{N}_1 sau \vec{N}_2 . Atît în (c) cît și în (d) lucrul mecanic efectuat de forțele individuale este nul deoarece deplasarea este zero.

Observăm că putem scrie ecuația (7-1) fie ca $(F \cos \Phi)d$ fie ca $F(d \cos \Phi)$. Aceasta ne sugerează faptul că lucrul mecanic poate fi calculat în două moduri diferite: fie înmulțim mărimea deplasării cu componenta forței pe direcția deplasării, fie înmulțim mărimea forței cu componenta deplasării pe direcția forței. Aceste două procedee dau totdeauna același rezultat.

Lucrul mecanic este o mărime *scalară*, deși cele două mărimi implicate în definiția sa, forța și deplasarea, sînt vectori. În paragraful 2-4 am definit *produsul scalar* a doi vectori ca fiind o mărime scalară ce rezultă prin înmulțirea mărimii unui vector cu componenta celui alt vector de-a lungul direcției primului vector. Am promis în acel paragraf că vom întâlni curînd mărimi fizice care se comportă ca produse scalare. Ecuația (7-1) arată că lucrul mecanic este o astfel de mărime. În terminologia algebrei vectoriale putem scrie această ecuație astfel:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}, \quad (7-2)$$

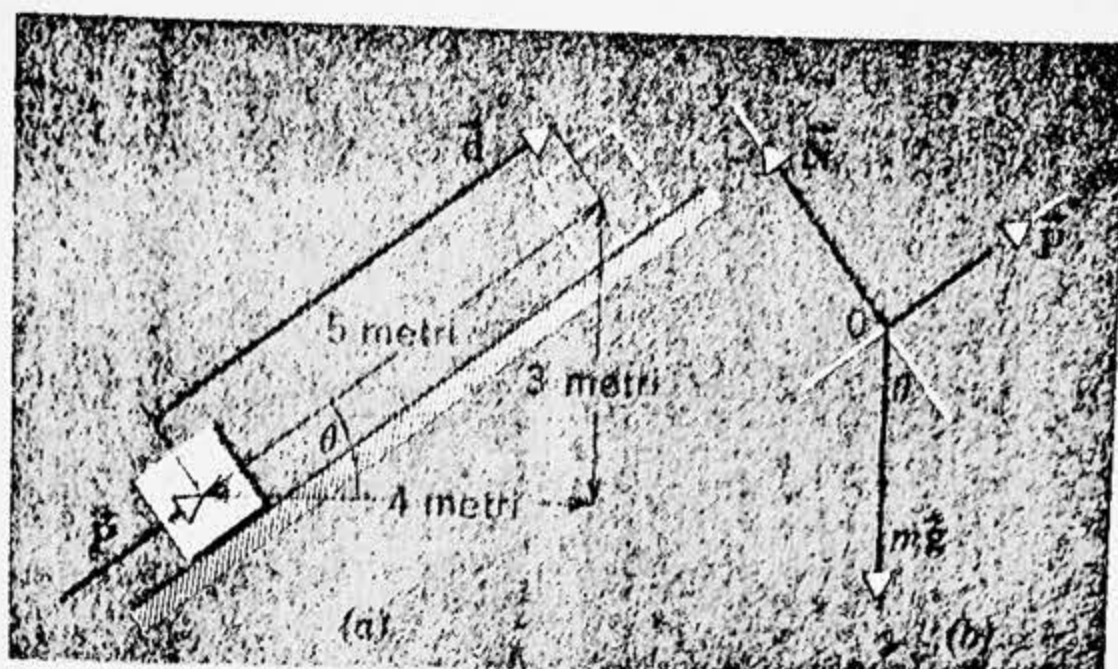
unde punctul indică produsul scalar. Ecuația (7-2) pentru \vec{F} și \vec{d} corespunde ecuației (2-11) pentru \vec{a} și \vec{b} .

Lucrul mecanic poate fi atît pozitiv cît și negativ. Dacă particula asupra căreia acționează forța are o componentă a deplasării opusă ca sens față de forță, lucrul mecanic efectuat de acea forță este negativ. Aceasta corespunde unui unghi obtuz dintre vectorul forță și vectorul deplasare. De exemplu dacă o persoană coboară un obiect spre podea, lucrul mecanic efectuat asupra obiectului de forța exercitată în sus de mîna sa, care ține obiectul, este negativ. În acest caz Φ este 180° , deoarece \vec{F} este îndreptat în sus iar \vec{d} este îndreptat în jos.

Lucrul mecanic, așa cum l-am definit prin ecuația (7-2), este un concept foarte util în fizică. Definiția specială dată de noi, *lucrul mecanic* nu corespunde folosirii curente a cuvîntului lucru. Aceasta poate produce confuzii. O persoană care ține o greutate mare în repaus în aer poate spune că ea efectuează un lucru mecanic greu — și chiar poate efectua un lucru mecanic greu în sens fiziologic — dar din punctul de vedere al fizicii noi spunem că acea persoană nu efectuează nici un lucru mecanic. Spunem aceasta, deoarece forța aplicată nu produce nici o deplasare. Cuvîntul *lucru* este folosit numai în sensul strict al ecuației (7-2). În multe domenii științifice cuvintele sînt împrumutate din limbajul nostru de toate zilele și sînt folosite pentru a denumi concepte foarte specifice. Cuvintele *bază* și *celulă*, de exemplu, înseamnă lucruri cu totul diferite în chimie, respectiv biologie, decît în limbajul de toate zilele.

Unitatea de măsură a lucrului mecanic este egală cu lucrul mecanic efectuat de o forță egală cu unitatea pentru a deplasa un corp pe o distanță egală cu unitatea în direcția forței. În sistemul MKS unitatea de lucru mecanic este 1 *newton-metru*, numită 1 *joule* (J). În sistemul tehnic unitatea de lucru mecanic este *kilogramul-forță-metru*, numită pe scurt *kilogrammetrul* (kgm). În sistemul CGS unitatea de lucru este 1 *dynă-*

Figura 7-3. Exemplul 1. (a) O forță \vec{P} deplasează un bloc pe o distanță \vec{d} în sus pe un plan înclinat care face un unghi θ cu orizontala. (b) Diagrama forțelor pentru bloc.



centimetru ($\text{dyn} \cdot \text{cm}$), numită 1 *erg*. Folosind relațiile dintre newton, dynă și kilogramforță, pe de o parte, și metrul și centimetrul, pe de altă parte, obținem: $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$; $1 \text{ kgm} = 9,80665 \text{ J}$.

Exemplul 1. Un bloc cu masa de 10,0 kg trebuie ridicat de la baza unui plan înclinat pînă în vîrfurile planului, lungimea planului fiind de 5,00 m iar înălțimea de 3,00 m. Presupunînd că suprafețele sînt fără frecări, ce lucru mecanic trebuie efectuat de o forță paralelă cu planul înclinat care împinge blocul în sus cu viteză constantă într-un loc unde $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

Situația este arătată în figura 7-3, a. Forțele care acționează asupra blocului sînt arătate în figura 7-3, b. Trebuie să găsim întîi pe P , mărimea forței care împinge blocul în sus de-a lungul planului înclinat. Deoarece mișcarea nu este accelerată, forța rezultantă paralelă cu planul trebuie să fie zero. Astfel,

$$P - mg \sin \theta = 0$$

sau

$$P - mg \sin \theta = 10,0 \text{ kg} \cdot 9,80 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot \frac{3}{5} = 58,8 \text{ N.}$$

Atunci lucrul mecanic efectuat de \vec{P} , din ecuația (7-1) cu $\Phi = 0^\circ$, este

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d} = Pd \cos 0^\circ = Pd = 58,8 \text{ N} \cdot 5,00 \text{ m} = 294 \text{ J.}$$

Dacă un om ar trebui să ridice blocul vertical fără să folosească planul înclinat, lucrul mecanic pe care ar trebui să-l facă ar fi egal cu forța verticală mg înmulțită cu deplasarea verticală sau

$$98,0 \text{ N} \cdot 3,00 \text{ m} = 294 \text{ J,}$$

la fel ca mai înainte. Singura diferență este aceea că în cazul planului înclinat el poate aplica o forță mai mică ($P = 58,8 \text{ N}$) pentru a urca blocul decît cea necesară în absența planului înclinat ($mg = 98,0 \text{ N}$); pe de altă parte, el ar trebui să împingă blocul în sus de-a lungul planului înclinat, pe o distanță mai mare (5,00 m) decît cea necesară ridicării lui direct în sus (3,00 m).

Exemplul 2. Un băiat trage o sanie cu masa de 5,0 kg pe o distanță de 10,0 m de-a lungul unei suprafețe orizontale cu o viteză constantă. Ce lucru mecanic efectuează el asupra saniei dacă coeficientul de frecare cinetică este 0,20 și forța sa de tracțiune face un unghi de 45° cu orizontala?

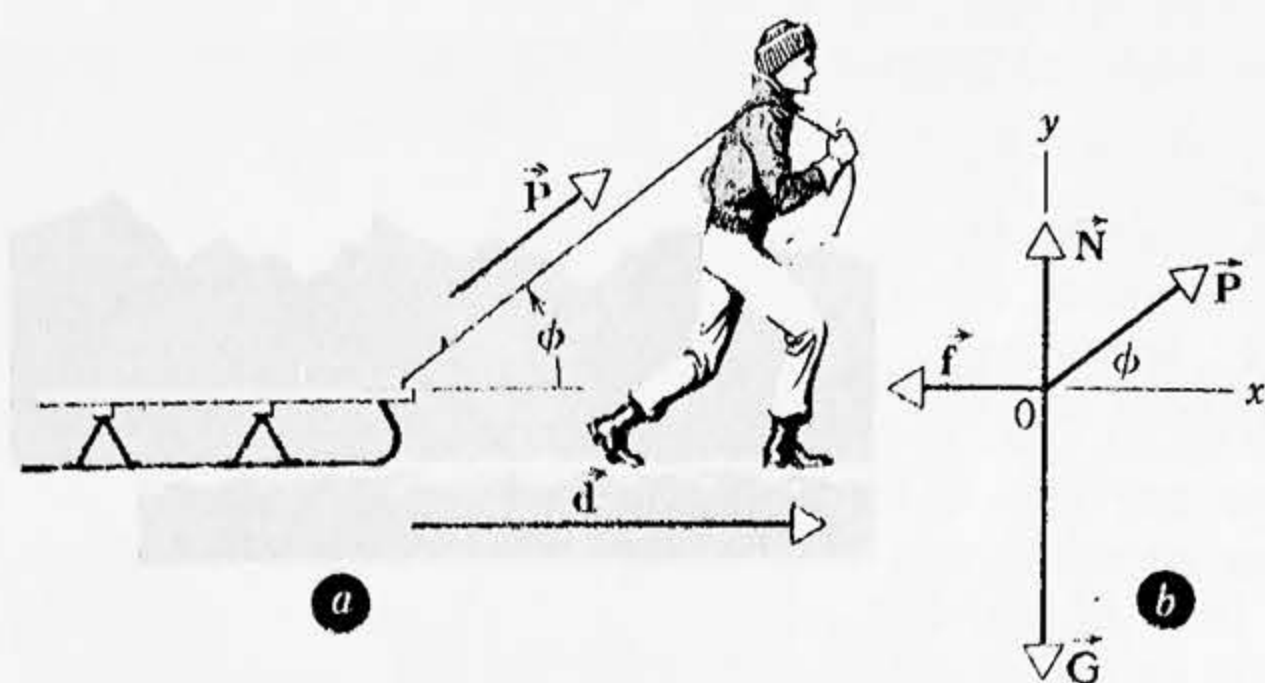


Figura 7-4. Exemplul 2. (a) Un băiat deplasează o sanie pe o distanță \vec{d} trăgând cu o forță \vec{P} de o sfoară care formează un unghi Φ cu orizontala. (b) Diagrama forțelor pentru sanie.

Situația este arătată în figura 7-4, a și forțele care acționează asupra saniei sînt arătate în figura 7-4, b. \vec{P} este forța de tracțiune dezvoltată de băiat, \vec{G} este greutatea saniei, \vec{f} este forța de frecare și \vec{N} este forța normală exercitată de suprafață asupra saniei. Lucrul mecanic efectuat de către băiat asupra saniei este

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d} = Pd \cos \Phi.$$

Pentru a calcula aceasta trebuie să determinăm întâi pe P , a cărei valoare nu a fost dată. Pentru a obține pe P ne referim la diagrama forțelor.

Sania nu este accelerată, astfel încît din legea a doua a mișcării obținem

$$P \cos \Phi - f = 0$$

și

$$P \sin \Phi + N - G = 0.$$

Știm de asemenea că f și N sînt legate prin

$$f = \mu_c N.$$

Aceste trei ecuații conțin trei mărimi necunoscute P , f și N . Pentru a găsi pe P eliminăm pe f și N din aceste ecuații și rezolvăm ecuația rămasă în raport cu P . Studentul trebuie să verifice că

$$P = \mu_c G / (\cos \Phi + \mu_c \sin \Phi).$$

Cu $\mu_c = 0,20$, $G = 49 \text{ N}$ și $\Phi = 45^\circ$ obținem

$$P = 0,20 \cdot 49 \text{ N} / (0,707 + 0,141) = 11,7 \text{ N}.$$

Atunci cu $d = 10,0 \text{ m}$, lucrul mecanic efectuat de băiat asupra saniei este

$$W = Pd \cos \Phi = 11,7 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} \cdot 0,707 = 82,6 \text{ J}.$$

Componenta verticală a forței de tracțiune \vec{P} nu efectuează lucrul mecanic asupra saniei. Observăm însă că ea reduce forța normală dintre sanie și suprafață ($N = G - P \sin \Phi$) și prin aceasta reduce mărimea forței de frecare ($f = \mu_c N$).

Va efectua băiatul mai mult lucru mecanic, mai puțin lucru mecanic sau același lucru mecanic asupra saniei dacă el ar trage orizontal în loc să tragă sub unghiul de 45° față de orizontală? Efectuează celelalte forțe ce acționează asupra saniei lucru mecanic?

7-3. Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă. Cazul unidimensional

Să considerăm acum lucrul mecanic efectuat de o forță care nu este constantă. Să considerăm mai întâi o forță care variază numai în modul. Fie forța dată ca funcție de coordonată $F(x)$, și să presupunem că forța acționează în direcția axei x . Să presupunem că un corp este mișcat de-a lungul axei x de către această forță. Care este lucrul mecanic efectuat de această forță variabilă pentru a deplasa corpul din x_1 în x_2 ?

În figura 7-5 reprezentăm pe F în funcție de x . Să împărțim deplasarea totală într-un număr mare de intervale mici egale Δx (fig. 7-5, a). Să considerăm deplasarea mică Δx de la x_1 la $x_1 + \Delta x$. În timpul acestei mici deplasări forța F are o valoare aproape constantă și lucrul efectuat de ea, ΔW , este aproximativ

$$\Delta W = F \Delta x, \quad (7-3)$$

unde F este valoarea forței în x_1 . Analog, în timpul deplasării mici de la $x_1 + \Delta x$ la $x_1 + 2\Delta x$, forța F are o valoare aproape constantă și lucrul mecanic efectuat de ea este aproximativ $\Delta W = F \Delta x$, unde F este valoarea forței în $x_1 + \Delta x$. Lucrul mecanic total efectuat de F pentru deplasarea corpului de la x_1 la x_2 , anume W_{12} , este aproximativ suma unui număr mare de termeni de tipul celorla din ecuația (7-3), în care F are o valoare diferită pentru fiecare termen. Prin urmare

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{n_2} F \Delta x, \quad (7-4)$$

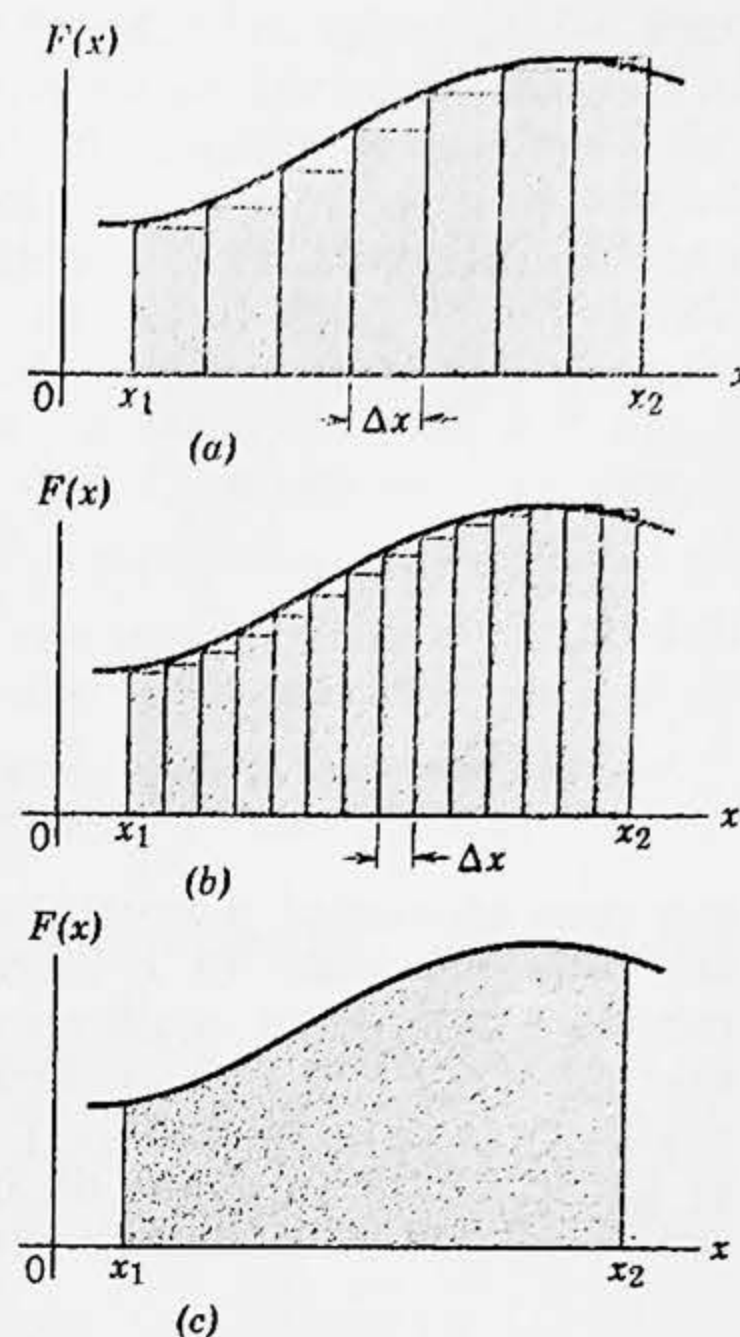


Figura 7-5. Calculul integralei

$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ înseamnă aflarea ariei de sub curba $F(x)$ între limitele x_1 și x_2 . Aceasta poate fi făcut aproximativ ca în desenul de sus (a) prin împărțirea ariei în mai multe fișii, fiecare de lățime Δx . Ariile dreptunghiurilor sînt apoi însumate pentru a da o valoare aproximativă a ariei. În desenul de la mijloc (b) fișiile sînt mai înguste și valoarea ariei devine mai exactă deoarece erorile de la vîrfurile dreptunghiurilor devin mai mici. În desenul de jos, (c), fișiile sînt infinitesimale în lățime. Măsurarea ariei devine exactă deoarece erorile de la vîrfurile dreptunghiurilor tind către zero atunci cînd lățimea fișiilor dx tinde către zero.

unde litera grecească Σ înseamnă suma asupra tuturor intervalelor de la x_1 la x_2 .

Pentru a obține o aproximație mai bună putem divide deplasarea totală de la x_1 la x_2 într-un număr mai mare de intervale egale, ca în figura 7-5, b, astfel încît Δx să fie mai mic și valoarea lui F de la începutul fiecărui interval să corespundă mai bine valorilor ei din acel interval. Este clar că putem obține aproximații din ce în ce mai bune luînd Δx din ce în ce mai mic astfel încît să avem un număr din ce în ce mai mare de intervale. Putem obține un rezultat exact pentru lucrul mecanic efectuat de F dacă facem ca Δx să tindă către zero și numărul intervalelor să tindă către infinit. Prin urmare, rezultatul exact este

$$W_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} F \Delta x. \quad (7-5)$$

Relația

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx,$$

asa cum studentul a învățat-o la cursul de calcul diferențial și integral, definește integrala lui F în raport cu x de la x_1 la x_2 . Numeric, această cantitate este exact egală cu aria dintre curba forței și axa x între limitele x_1 și x_2 (fig. 7-5, c). Prin urmare, o integrală poate fi interpretată grafic ca o arie. Simbolul \int reprezintă litera S (de la *sumă*) deformată și simbolizează procesul de integrare. Putem scrie lucrul mecanic efectuat de F pentru a deplasa corpul de la x_1 la x_2 astfel

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (7-6)$$

Ca exemplu, să considerăm un resort legat de un perete. Să alegem axa (orizontală) a resortului ca axă x și originea $x=0$ să coincidă cu capătul resortului în starea sa normală, neîntinsă. Presupunem că sensul pozitiv al axei x este sensul dinspre perete spre exterior. În cele ce urmează presupunem că întindem resortul atît de încet încît el este practic în echilibru în fiecare moment ($\vec{a}=0$).

Dacă întindem resortul astfel încît capătul său se deplasează într-o poziție x , resortul va exercita o forță asupra agentului care întinde resortul, dată cu o bună aproximație de

$$F = -kx \quad (7-7)$$

unde k este o constantă numită *constantă forței* sau *constantă elastică* a resortului. Ecuația (7-7) reprezintă legea forței pentru resorturi. Direcția forței este dirijată totdeauna în sens opus deplasării extremității de la origine. Dacă resortul este întins, $x > 0$ și F este negativ, dacă resortul este comprimat, $x < 0$ și F este pozitiv. Forța exercitată de resort este o forță de restabilire prin faptul că ea este dirijată totdeauna către origine. Resorturile reale se supun ecuației (7-7), numită *legea lui Hooke* dacă ele nu sînt întinse dincolo de un anumit domeniu limitat. Putem

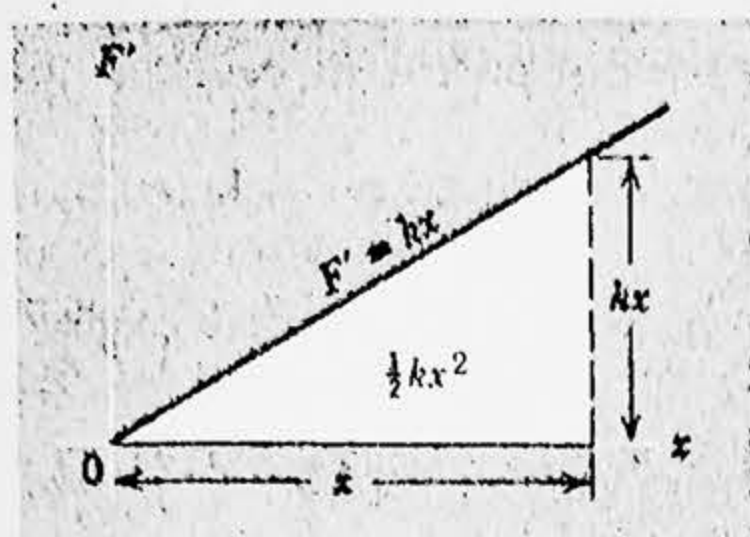


Figura 7-6. Forța exercitată pentru întinderea unui resort este $F' = kx$. Aria de sub curba forței reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru întinderea resortului pe o distanță x și poate fi aflat prin integrare sau cu ajutorul formulei pentru aria unui triunghi.

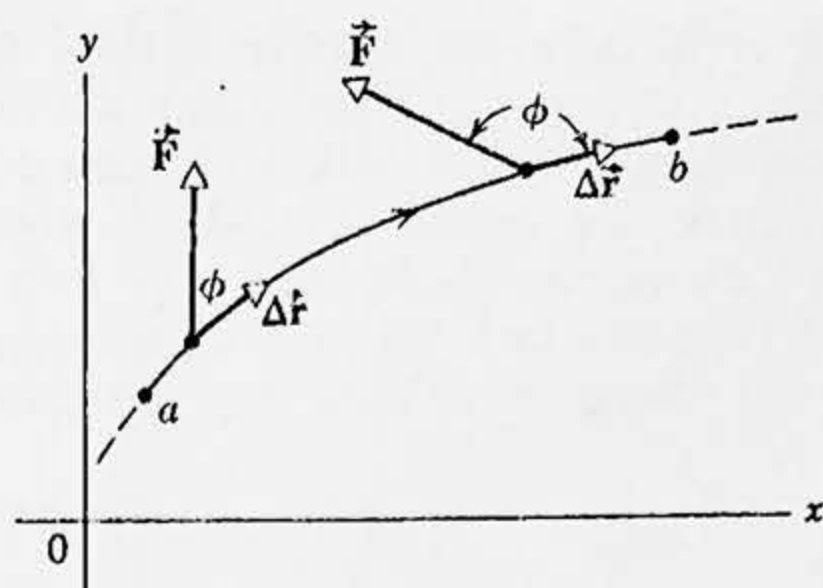


Figura 7-7. Modul în care \vec{F} și Φ pot varia de-a lungul unei traiectorii. Când $\Delta r \rightarrow 0$ îl putem înlocui cu diferențiala $d\vec{r}$ care este întotdeauna îndreptată în direcția vitezei obiectului mobil, deoarece $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ și deci este tangent la traiectorie în toate punctele.

privi pe k ca fiind mărimea forței pe unitate de alungire. Astfel, resorturile foarte rigide au valori mari ale lui k .

Pentru a întinde un resort trebuie să exercităm o forță F' egală în modul dar de sens opus cu forța F exercitată de resort asupra noastră. Forța aplicată¹ este deci $F' = kx$ și lucrul mecanic efectuat de forța aplicată pentru a întinde resortul astfel încât extremitatea sa să se deplaseze de la x_1 la x_2 este²

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2.$$

Dacă punem $x_1 = 0$ și $x_2 = x$, obținem

$$W = \int_0^x (kx) dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7-8)$$

Acesta este lucrul mecanic efectuat pentru a întinde un resort, astfel încât capătul său să se deplaseze de la poziția sa neîntinsă pînă la o distanță x . Observăm că lucrul mecanic efectuat pentru a *comprima* un re-

¹ Dacă forța aplicată ar fi diferită de $F' = kx$, am avea o forță netă neechilibrată care ar acționa asupra resortului și mișcarea sa ar fi accelerată. Pentru a calcula lucrul mecanic efectuat ar trebui să specificăm exact care este forța aplicată în fiecare punct. Oricare ar fi forța, lucrul mecanic efectuat ar fi totdeauna același pentru aceeași deplasare de la x_1 la x_2 , cu condiția ca resortul să aibă aceeași viteză inițială și finală. Este însă mult mai ușor să folosim forța simplă $F' = kx$ pentru a calcula lucrul mecanic efectuat. O astfel de forță aplicată duce la o mișcare neaccelerată. Am precizat de la bun început că este vorba de o mișcare neaccelerată cu scopul de a putea folosi această forță simplă.

² Studentul care a luat cunoștință acum de calculul integral, poate consulta lista integralelor de la anexa F.

sort pe o distanță x este același cu lucrul mecanic efectuat pentru a-l întinde (alungi) cu x deoarece deplasarea x este la pătrat în ecuația (7-8); oricare semn al lui x dă o valoare pozitivă pentru W .

Putem de asemenea calcula această integrală, calculând aria cuprinsă între curba forță-deplasare și axa x de la $x=0$ până la $x=x$. Aceasta este reprezentată de aria suprafeței albe din figura 7-6. Aria este aceea a unui triunghi de bază x și înălțime kx . Ea este deci

$$\frac{1}{2} x \cdot kx = \frac{1}{2} kx^2,$$

în concordanță cu ecuația (7-8).

7-4. Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă. Cazul bidimensional

Forța \vec{F} care acționează asupra unei particule poate varia atât ca direcție cât și ca modul, și particula se poate mișca de-a lungul unei traiectorii curbe. Pentru a calcula lucrul mecanic în acest caz general împărțim traiectoria într-un număr mare de deplasări mici $\Delta\vec{r}$, fiecare deplasare elementară fiind dirijată de-a lungul traiectoriei în direcția mișcării. Figura 7-7 arată două deplasări într-un caz particular; ea arată de asemenea valoarea lui \vec{F} și unghiul Φ dintre \vec{F} și $\Delta\vec{r}$ în fiecare poziție. Putem afla mărimea lucrului mecanic efectuat asupra particulei în timpul deplasării $\Delta\vec{r}$ din

$$dW = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cos \Phi \cdot \Delta r. \quad (7-9)$$

Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă \vec{F} asupra particulei în timpul mișcării acesteia de la a la b în figura 7-7 se obține însumând lucrurile mecanice elementare efectuate pe fiecare din segmentele din care este compusă traiectoria. Pe măsură ce segmentele $\Delta\vec{r}$ devin din ce în ce mai mici, ele pot fi înlocuite cu diferențialele $d\vec{r}$ și suma asupra segmentelor poate fi înlocuită printr-o integrală, ca în ecuația (7-7). Lucrul mecanic este atunci

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cos \Phi dr. \quad (7-10, a)$$

Nu putem calcula această integrală pînă nu știm cum variază F și Φ în ecuația (7-10, a) de la punct la punct, de-a lungul traiectoriei; amîndouă sînt funcții de coordonatele x și y ale particulei din figura 7-7.

Putem obține o altă expresie echivalentă pentru ecuația (7-10, a) exprimînd pe \vec{F} și $d\vec{r}$ prin componentele lor. Astfel, $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y$ și $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$, astfel încît $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$. În acest calcul reamintim (vezi problema 22, cap. 2) că $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$. Substituind acest rezultat în ecuația (7-10, a), obținem

$$W_{ab} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy). \quad (7-10, b)$$

Integrale de tipul celorla din ecuațiile (7-10, a) și (7-10, b) se numesc integrale curbilini.

Exemplul 3. Ca exemplu de forță variabilă să considerăm o particulă de masă m suspendată de un fir de lungime l de greutate neglijabilă. Acesta se numește pendul simplu. Să deplasăm particula pe o traiectorie circulară de rază l de la $\Phi=0$ până la $\Phi=\Phi_0$ aplicînd o forță care este totdeauna orizontală. Putem aplica o astfel de forță trăgînd orizontal de particulă cu ajutorul unui fir legat de ea, de exemplu. Particula va parcurge atunci o distanță verticală h . Figura 7-8, a arată situația, iar figura 7-8, b arată forțele care acționează asupra particulei într-o poziție arbitrară Φ . Forța aplicată este \vec{F} , \vec{T} este tensiunea din fir, iar $m\vec{g}$ este greutatea particulei.

Iarăși presupunem că nu există accelerație (rațiunea este aceeași ca mai

înainte), astfel încît practic mișcarea trebuie să fie foarte încetă. Forța \vec{F} este totdeauna orizontală, însă deplasarea $d\vec{r}$ este de-a lungul unui arc de cerc. Direcția lui $d\vec{r}$ depinde de valoarea lui Φ , și este tangentă la cerc în fiecare punct. \vec{F} va varia în modul astfel încît să echilibreze componenta orizontală a tensiunii. Observăm că unghiul dintre \vec{F} și $d\vec{r}$ este egal cu deplasarea unghiulară Φ în acest caz.

Lucrul mecanic efectuat în timpul deplasării masei m de la $\Phi=0$ pînă la $\Phi=\Phi_0$ sub acțiunea forței \vec{F} este

$$W = \int_{\Phi=0}^{\Phi=\Phi_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Phi=0}^{\Phi=\Phi_0} F \cos \Phi dr \quad (7-10, a)$$

sau

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h) \operatorname{tg} \Phi_0, y=h} (F_x dx + F_y dy). \quad (7-10, b)$$

Să calculăm integrala din (7-10, b).

Observăm că, din legea întâia a lui Newton (vezi fig. 7-8, b)

$$F_x - T \sin \Phi \text{ și } mg - T \cos \Phi.$$

Eliminîndu-l pe T între aceste relații, obținem

$$F_x = mg \operatorname{tg} \Phi.$$

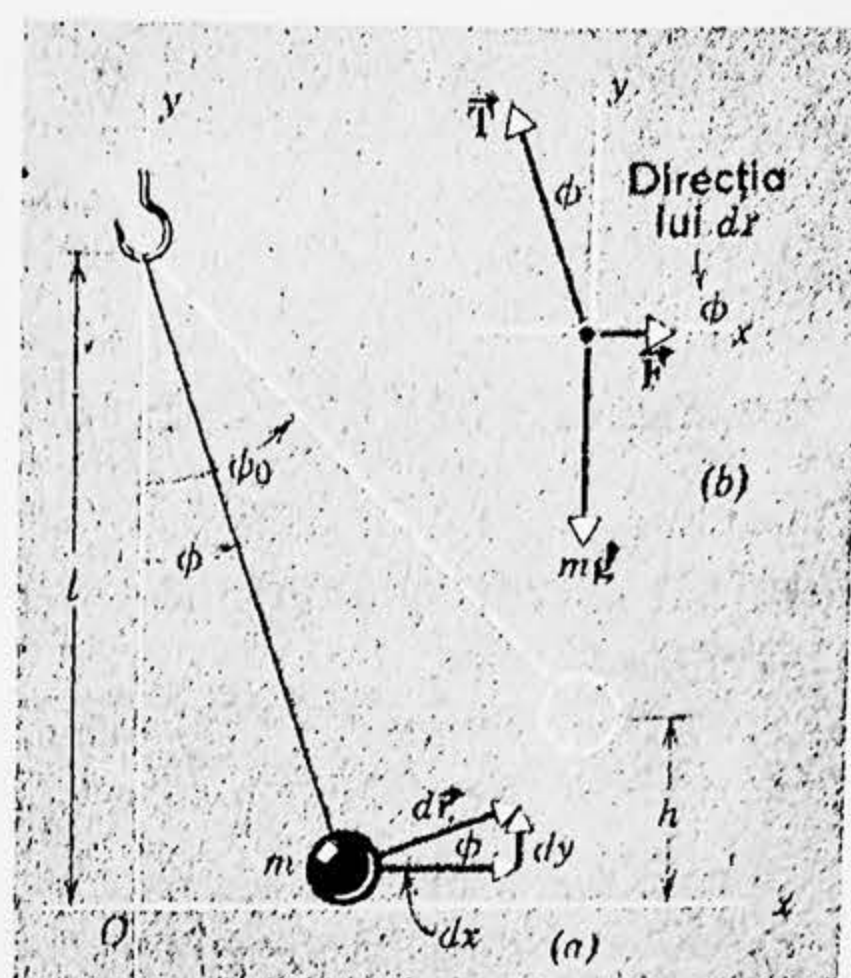


Figura 7-8. (a) Un pendul simplu. Un punct material m este suspendat de un fir de lungime l . Deviația sa maximă este Φ_0 . (b) Diagrama forțelor în cazul aplicării unei forțe orizontale.

Observăm de asemenea din figura 7-8, b că $F_y = 0$. Substituind aceste valori ale lui F_x și F_y în ecuația (7-10, b), obținem

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h) \operatorname{tg} \Phi, y=h} mg \operatorname{tg} \Phi \, dx.$$

Acum din figura 7-8, a vedem că

$$\operatorname{tg} \Phi = dy/dx \text{ sau } \operatorname{tg} \Phi \cdot dx = dy.$$

Făcînd această substituție și observînd că integrala depinde numai de variabila y , obținem în final

$$W = \int_{y=0}^{y=h} (mg) \, dy = mg \int_0^h dy = mgh.$$

Studentul trebuie să încerce acum să calculeze lucrul mecanic efectuat prin deplasarea particulei de-a lungul arcului, cu viteză constantă, prin aplicarea unei forțe care totdeauna este dirijată de-a lungul arcului. Aici va fi mai simplu de lucrat cu ecuația (7-10, a), folosind forța tangențială și luînd $dr = l \, d\Phi$. Rezultatul va fi același ca mai înainte, $W = mgh$. Observăm că ambele rezultate sînt aceleași ca și lucrul mecanic care ar fi efectuat ridicînd un corp cu masa m vertical în sus la o înălțime h .

Ce lucru mecanic a fost efectuat asupra particulei de către tensiunea T din fir?

7-5. Energia cinetică și teorema energiei cinetice

În exemplele noastre precedente privind lucrul mecanic efectuat de forțe, am avut de a face cu obiecte *neaccelerate*. În asemenea cazuri *forța rezultantă* care acționează asupra obiectului este zero. Să presupunem acum că *forța rezultantă* care acționează asupra unui obiect *nu este zero*, astfel încît obiectul este *accelerat*. Condițiile sînt aceleași în toate privințele cu acelea care au loc atunci cînd asupra obiectului acționează o singură forță neechilibrată.

Situația cea mai simplă pe care o putem considera este aceea a unei *forțe rezultante constante* \vec{F} . O astfel de forță, acționînd asupra unei particule de masă m , va produce o accelerație constantă \vec{a} . Să alegem axa x în direcția comună a lui \vec{F} și \vec{a} . Care este lucrul mecanic efectuat de această forță asupra particulei într-o deplasare x ? Avem (în cazul accelerației constante) relațiile

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

și

$$x = \frac{v + v_0}{2} \cdot t,$$

care sînt ecuațiile (3-13) și respectiv (3-14) (în care am omis indicele x , pentru conveniență, și am ales $x_0 = 0$ în ultima ecuație). Aici v_0 este

viteza particulei la momentul $t=0$ și v este viteza sa la momentul t . Atunci lucrul mecanic efectuat este

$$W = Fx = max = m \left(\frac{v-v_0}{t} \right) \left(\frac{v+v_0}{2} \right) t = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (7-11)$$

Numim energie cinetică a corpului jumătate din produsul dintre masa corpului și pătratul vitezei sale. Dacă notăm energia cinetică cu E_c , avem

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \quad (7-12)$$

Putem formula acum ecuația (7-11) în modul următor: *Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra unei particule este egal cu variația energiei cinetice a particulei.*

Deși am demonstrat acest rezultat numai pentru o forță constantă, el este valabil indiferent dacă forța rezultantă este constantă sau variabilă. Presupunem că forța rezultantă variază în modul (dar nu ca direcție), de exemplu. Să luăm deplasarea în direcția forței. Fie această direcție axa x . Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă pentru deplasarea particulei de la x_0 până la x este

$$W = \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^x F dx.$$

Dar din legea a doua a lui Newton avem $F=ma$ și accelerația a poate fi scrisă astfel

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = v \frac{dv}{dx}.$$

Prin urmare

$$W = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x mv \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_0}^v mv dv = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (7-13)$$

Un caz mai general este acela în care forța variază atât ca direcție cât și ca modul și mișcarea are loc de-a lungul unei traiectorii curbe ca în figura 7-7 (vezi problema 7). Iarăși găsim că lucrul mecanic efectuat asupra unei particule de forța rezultantă este egal cu variația energiei cinetice a particulei.

Lucrul mecanic efectuat asupra unei particule de către forța rezultantă este totdeauna egal cu variația energiei cinetice a particulei:

$$W \text{ (al forței rezultante)} = E_c - E_{c_0} = \Delta E_c. \quad (7-14)$$

Ecuația (7-14) reprezintă *teorema energiei cinetice* pentru o particulă.

Observăm că atunci când viteza particulei este constantă, nu avem nici o variație a energiei cinetice și lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă este zero. În cazul mișcării circulare uniforme, de exemplu, modulul vitezei particulei este constant și forța centripetă nu efectuează lucru asupra particulei. O forță dirijată sub un unghi drept față de direcția mișcării schimbă doar direcția vitezei nu și mărimea (modulul) ei.

Numai dacă forța rezultantă are o componentă de-a lungul direcției de mișcare, ea va schimba viteza particulei sau energia ei cinetică. Lucrul mecanic asupra particulei este efectuat numai de această componentă a forței rezultante de-a lungul liniei de mișcare. Aceasta concordă cu definiția dată de noi lucrului mecanic sub forma unui produs scalar, deoarece în $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ numai componenta lui \vec{F} de-a lungul lui $d\vec{r}$ contribuie la produs.

Dacă energia cinetică a particulei descrește, lucrul mecanic efectuat asupra ei de forța rezultantă este negativ. Deplasarea și componenta forței rezultante de-a lungul traiectoriei sînt opuse ca sens. Lucrul mecanic efectuat asupra particulei de către forță este egal cu lucrul mecanic, cu semn schimbat, efectuat de către particulă asupra agentului care produce forța. Aceasta este o consecință a legii a treia a mișcării a lui Newton. Prin urmare ecuația (7-14) poate fi interpretată astfel încît energia cinetică a unei particule descrește cu o cantitate exact egală cu cantitatea de lucru mecanic pe care particula îl efectuează. Se spune că un corp are energie înmagazinată în el datorită mișcării sale; pe măsură ce el efectuează lucru mecanic, el încetinește și pierde ceva din această energie. De aceea, *energia cinetică a unui corp în mișcare este egală cu lucrul mecanic pe care el îl poate efectua atunci cînd este adus în repaus*. Acest rezultat este valabil indiferent dacă forțele aplicate sînt constante sau variabile.

Unitățile de măsură ale energiei cinetice și lucrului mecanic sînt aceleași. Energia cinetică, la fel ca și lucrul mecanic, este o mărime scalară. Energia cinetică a unui grup de particule este pur și simplu suma (scalară) a energiilor cinetice ale particulelor individuale din grup.

Exemplul 4. Un neutron, unul din constituenții nucleului, parcurge distanța de 6,0 m dintre două puncte într-un interval de timp de $1,8 \cdot 10^{-4}$ s. Presupunînd că viteza neutronului este constantă, să se afle energia sa cinetică. Masa neutronului este de $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.

Viteza se obține din

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6,0 \text{ m}}{1,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

Energia cinetică este

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} (3,3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = 9,3 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Pentru scopurile fizicii nucleare jouleul este o unitate de energie foarte mare. O unitate folosită mai frecvent este electron-voltul (eV), care este egal cu $1,60 \cdot 10^{-19}$ J. Energia cinetică a neutronului din exemplul nostru poate fi atunci exprimată astfel

$$E_c = (9,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \right) = 5,8 \text{ eV.}$$

Exemplul 5. Să presupunem că forța de gravitație este constantă pentru distanțe mici deasupra suprafeței terestre. Un corp este lăsat să cadă din repaus de la o înălțime h deasupra suprafeței pămîntului. Care va fi energia sa cinetică imediat înainte de a atinge solul?

Cîștigul de energie cinetică este egal cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă, care este aici forța de gravitație. Această forță este constantă și dirijată de-a lungul liniei de mișcare, astfel încît lucrul mecanic efectuat de gravitație este

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = mgh.$$

Inițial corpul a avut o viteză $v_0 = 0$ și final o viteză v . Cîștigul de energie cinetică al corpului este

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 - 0.$$

Egalînd acești doi termeni echivalenți, obținem

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = mgh$$

pentru energia cinetică a corpului imediat înainte de a atinge pămîntul.

Viteza corpului este atunci

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Studentul trebuie să arate că prin căderea de la o înălțime h_1 pînă la o înălțime h_2 corpul își va mări energia cinetică de la $\frac{1}{2} mv_1^2$ la $\frac{1}{2} mv_2^2$, unde

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = mg(h_1 - h_2).$$

În acest exemplu avem de a face cu o forță constantă și cu o accelerație constantă. Metodele dezvoltate în capitolele precedente vor fi utile și aici. Puteți arăta cum rezultatele obținute prin considerații energetice pot fi obținute direct din legile mișcării pentru corpurile uniform accelerate?

Exemplul 6. Un bloc cîntărind 4,9 kgf alunecă pe o masă orizontală fără frecări cu o viteză de 1,0 m/s. El este oprit, comprimînd un resort în drumul său. Cu cît este comprimat resortul dacă constanta forței (constanta elastică a resortului) este de 2,0 kgf/m?

Energia cinetică a blocului este

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (G/g)v^2.$$

Această energie cinetică este egală cu lucrul mecanic W pe care blocul îl poate efectua atunci cînd este oprit. Lucrul mecanic efectuat pentru comprimarea resortului pe o distanță x peste lungimea sa de repaus este

$$W = \frac{1}{2} kx^2,$$

astfel încît

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (G/g)v^2$$

sau

$$x = \sqrt{\frac{G}{gk}} \cdot v = \sqrt{\frac{4,9}{9,8 \cdot 2,0}} \cdot 1,0 \text{ m} = 0,50 \text{ m}.$$

7-6. Semnificația teoremei energiei cinetice

Teorema energiei cinetice *nu* reprezintă o lege nouă, independentă, a mecanicii clasice. Noi pur și simplu *am definit* lucrul mecanic și energia cinetică și *am dedus* relația dintre ele direct din legea a doua a lui Newton. Teorema energiei cinetice este însă utilă pentru rezolvarea problemelor în care lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă este ușor de calculat și în care sîntem interesați să aflăm viteza particulei în diferite poziții. De mai mare importanță este însă faptul că teorema energiei cinetice este punctul de plecare pentru o generalizare cuprinzătoare în fizică. S-a subliniat că teorema energiei cinetice este valabilă dacă W este interpretat ca lucru mecanic efectuat de către forța *rezultantă* care acționează asupra particulei. Este însă util în multe probleme să calculăm separat lucrul mecanic efectuat de anumite tipuri de forțe și să dăm nume speciale lucrului mecanic efectuat de fiecare tip. Aceasta ne duce la concepte ale diferitelor tipuri de energie și la principiul de conservare a energiei, care constituie subiectul capitolului următor.

7-7. Puterea

Să considerăm acum timpul implicat în efectuarea lucrului mecanic. Aceeași cantitate de lucru mecanic este efectuată pentru a ridica un corp dat pe o anumită înălțime dată indiferent dacă pentru aceasta este necesară o secundă sau un an. Dar, *viteza cu care este efectuat lucrul mecanic* este adesea mai interesantă pentru noi decît lucrul mecanic total efectuat.

Definim *puterea* ca fiind viteza cu care este efectuat lucrul mecanic. Puterea medie dezvoltată de un agent este egală cu lucrul mecanic total efectuat de agent împărțit la intervalul de timp total adică

$$\overline{P} = W/t.$$

Puterea instantanee dezvoltată de un agent este

$$P = dW/dt. \quad (7-15)$$

Dacă puterea este constantă în timp, atunci $P = \overline{P}$ și

$$W = Pt.$$

În sistemul MKS unitatea de putere este 1 J/s, care se numește 1 *watt* (W). Această unitate de putere este numită așa în cinstea lui James Watt, a cărui mașină cu abur este predecesorul mașinilor de astăzi mult mai puternice. În sistemul tehnic unitatea de putere este 1 kgm/s. Deoarece această unitate este cam mică pentru scopurile practice, a fost adoptată o unitate mai mare numită cal-putere. În realitate Watt el însuși a sugerat ca unitate de putere, puterea dezvoltată de un cal ca mașină. Un cal putere a fost ales egal cu 75 kgm/s. Un cal putere este egal cu aproximativ 746 W sau aproximativ trei pătrimi dintr-un kilowat. Un cal n-ar putea dezvolta prea mult timp o astfel de putere.

Lucrul mecanic poate fi de asemenea exprimat în unități de putere ori timp. Aceasta este originea termenului *kilowat-oră* de exemplu. Un kilowat-oră este lucrul mecanic efectuat în timp de o oră de un agent care lucrează cu o putere constantă de 1 kW.

Exemplul 7. Un automobil are puterea de 100 CP și se mișcă cu o viteză uniformă de 72 km/h (20 m/s). Care este forța de tracțiune exercitată de motor asupra automobilului?

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Forța de tracțiune dezvoltată \vec{F} este înainte, în direcția mișcării dată de \vec{v} , astfel încît

$$P = Fv$$

și

$$F = \frac{P}{v} = \left(\frac{100 \text{ CP}}{20 \text{ m/s}} \right) \left(\frac{746 \text{ W}}{1 \text{ CP}} \right) = 3730 \text{ N}.$$

De ce automobilul nu se mișcă accelerat?

Întrebări

1. Puteți cita alte cuvinte, asemănător „lucrului” (mecanic), al căror sens în vorbirea curentă este diferit de sensul lor științific?

2. În jocul „trasul funiei” o echipă cedează treptat celeilalte. Ce lucru mecanic este efectuat și de către care echipă?

3. Planul înclinat (vezi exemplul 1) este o mașină simplă care ne permite să facem lucru mecanic aplicînd o forță mai mică decît ar fi necesar altfel. Aceeași afirmație este valabilă pentru o pană, o pîrghie, un șurub, un volan și un scripete. Aceste mașini economisesc lucrul mecanic?

4. Resorturile A și B sînt identice cu excepția faptului că A este mai rigid decît B, adică $k_A > k_B$. Asupra cărui resort se efectuează mai mult lucru mecanic, dacă: (a) ele sînt întinse cu aceeași cantitate, (b) ele sînt întinse cu aceeași forță?

5. Un om care vislește o oarcă împotriva curentului este în repaus față de țarm. (a) Efectuează el vreun lucru mecanic? (b) Dacă el încetează să vislească și se mișcă în jos împreună cu curentul, se efectuează vreun lucru mecanic asupra lui?

6. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă este totdeauna egal cu variația energiei cinetice. Se poate întâmpla ca lucrul mecanic efectuat de una din forțele componente, singură, să fie mai mare decît variația energiei cinetice? Dacă este așa, să se dea exemple.

7. Dacă doi copii se joacă cu mingea într-un tren, depinde energia cinetică a mingii de viteza trenului? Afectează sistemul de referință ales răspunsul dat? Dacă este așa, se poate numi energia cinetică o mărime scalară? (Vezi problema 19).

8. Depinde lucrul mecanic efectuat pentru a urca o ladă pe o platformă de viteza cu care ea este ridicată?

Probleme

1. Un bloc de 100 N, din gheață, alunecă în jos pe un plan înclinat lung de 5,0 m și înalt de 3,0 m. Un om împinge gheața paralel cu planul înclinat astfel încât blocul alunecă în jos cu viteză constantă. Coeficientul de frecare dintre gheață și planul înclinat este de 0,10. Să se afle: (a) forța exercitată de om, (b) lucrul mecanic efectuat de om asupra blocului, (c) lucrul mecanic efectuat de gravitație asupra blocului, (d) lucrul mecanic efectuat de suprafața planului înclinat asupra blocului, (e) lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă asupra blocului și (f) variația energiei cinetice a blocului.

2. Un om împinge cu viteză constantă un bloc cu greutatea de 20 kgf pe o distanță de 10 m, pe o podea orizontală, cu o forță dirijată la 45° sub orizontală. Dacă coeficientul de frecare cinetică este 0,20, cât lucru mecanic efectuează omul asupra blocului?

3. O ladă cîntărind 500 N este suspendată de capătul unei funii de 40 m lungime. Lada este apoi împinsă lateral cu 4,0 m de la verticală și ținută acolo. (a) Care este forța necesară pentru a ține lada în această poziție? (b) Se efectuează lucru meca-

nic în timpul menținerii lăzii acolo? (c) S-a efectuat lucru mecanic pentru a deplasa lateral lada? Dacă este așa, atunci cât? (d) Efectuează tensiunea din funie vreun lucru mecanic asupra lăzii?

4. Un fir este folosit pentru a coborî vertical un bloc de masă M pe o distanță d cu o accelerație constantă în jos de $g/4$. Să se afle lucrul mecanic efectuat de fir asupra blocului.

5. Un bloc de masă $m=3,57$ kg este tras cu viteză constantă pe o distanță $d=4,06$ m, de-a lungul unei podele orizontale, cu ajutorul unei sfori care exercită o forță constantă de mărime $F=7,68$ N care face un unghi $\theta=15,0^\circ$ cu orizontala. Să se calculeze: (a) lucrul mecanic total efectuat asupra blocului; (b) lucrul mecanic efectuat de sfoară asupra blocului; (c) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare asupra blocului; (d) coeficientul de frecare cinetică dintre bloc și podea.

6. (a) Estimați lucrul mecanic efectuat de către forța arătată în graficul din figura 7-9 pentru a deplasa o particulă de la $x=1$ m la $x=3$ m. Îmbunătățiți metoda pentru a vedea cât de mult vă puteți apropia de răspunsul exact de 6 J. (b) Curba este

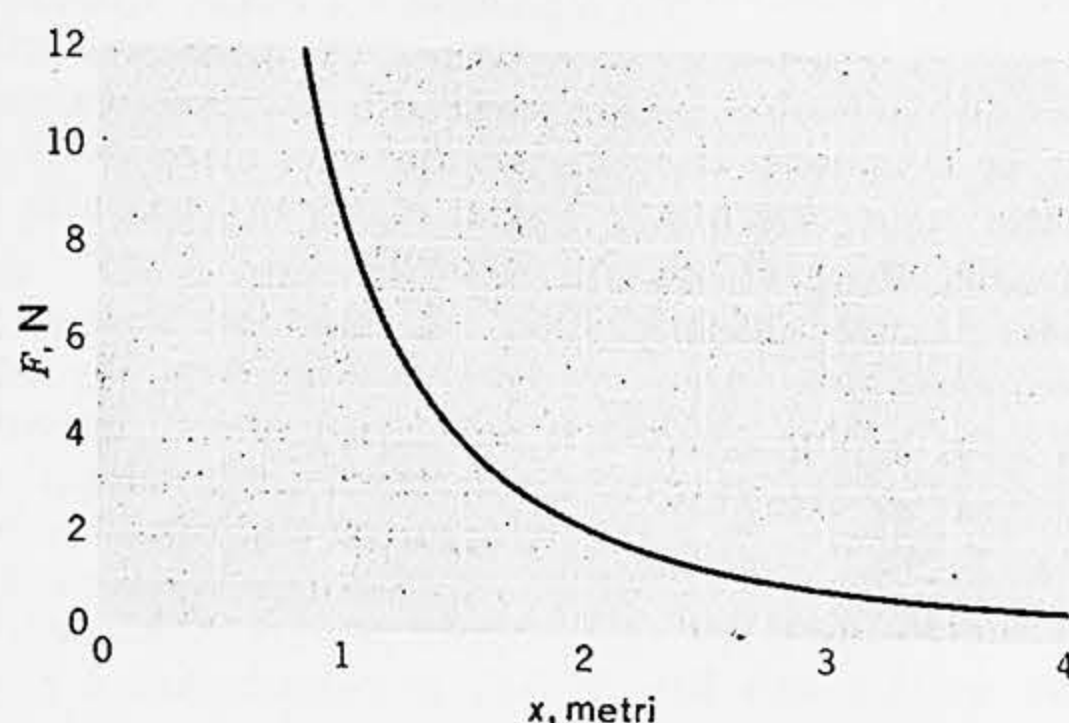


Figura 7-9.

dată analitic de formula $F = a/x^2$ unde $a = 9 \text{ N}\cdot\text{m}^2$. Să se arate cum se obține lucrul mecanic efectuat, cu ajutorul regulilor integrării.

7. Atunci când forța \vec{F} variază atât ca direcție cât și ca modul iar mișcarea are loc de-a lungul unei traiectorii curbe lucrul mecanic efectuat de \vec{F} se obține din $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, integrarea efectuându-se de-a lungul traiectoriei curbe. Observăm că atât F cât și Φ , unghiul dintre \vec{F} și $d\vec{r}$ pot varia de la punct la punct (vezi fig. 7-7). Folosind drept ghid exemplul 3, să se arate că în cazul mișcării bidimensionale

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2,$$

unde v este viteza finală, iar v_0 viteza inițială.

8. Să se generalizeze rezultatele de la problema precedentă la cazul a trei dimensiuni.

9. Un alergător are jumătate din energia cinetică pe care o are un băiat cu jumătate din masa sa. Omul accelerează, mărindu-și viteza cu $1,0 \text{ m/s}$, și atunci are aceeași energie cinetică ca și băiatul. Care au fost vitezele inițiale ale omului și băiatului?

10. De la ce înălțime ar trebui să cadă un automobil pentru a câștiga o energie cinetică echivalentă cu cea pe care ar avea-o dacă ar merge cu 60 km/h ?

11. Un proton (nucleul atomului de hidrogen) este accelerat într-un accelerator liniar. În fiecare treaptă a unui astfel de accelerator, protonul este accelerat de-a lungul unei linii drepte cu $3,6 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$. Dacă un proton intră într-o astfel de treaptă mișcându-se inițial cu o viteză de $2,4 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ și treapta are o lungime de $3,5 \text{ cm}$, să se calculeze: (a) viteza sa la capătul treptei și (b) câștigul de energie cinetică care rezultă din accelerare. Se va lua masa protonului

de $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ și se va exprima energia în electron-volți.

12. Un glonte cu masa de 30 g , mișcându-se inițial cu 500 m/s pătrunde 12 cm într-un bloc de lemn. Ce forță medie exercită el?

13. Să se arate pe bază de considerații de lucru mecanic și energie cinetică că distanța minimă de oprire a unui vehicul de masă m care se mișcă cu viteza v pe o șosea orizontală este $v^2/2\mu_s g$, unde μ_s este coeficientul de frecare statică dintre anvelope și șosea. (Vezi exemplul 2, capitolul 6.)

14. Asupra unui corp aflat în mișcare rectilinie acționează o singură forță. Un grafic al vitezei în funcție de timp pentru acest corp este arătat în figura 7-10. Să se afle semnul (pozitiv sau negativ) al lucrului mecanic efectuat de către forță asupra corpului în fiecare din intervalele AB , BC , CD și BE .

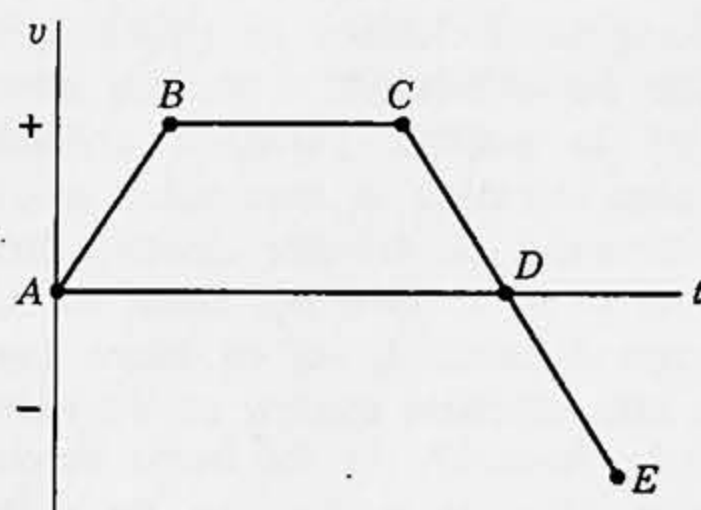


Figura 7-10.

15. (a) Un corp cu masa de $0,675 \text{ kg}$ aflat pe o masă fără frecări este legat de un fir care trece printr-un orificiu al mesei situat în centrul unui cerc orizontal pe care corpul se mișcă cu viteza absolută constantă. Dacă raza cercului este de $0,500 \text{ m}$ și viteza este de $10,0 \text{ m/s}$, să se calculeze tensiunea din fir. (b) S-a constatat că trăgând cu încă $0,200 \text{ m}$ de fir în jos prin orificiu, reducând prin aceasta raza cercului cu $0,300 \text{ m}$, se obține ca efect o înmulțire a tensiunii inițiale

din fir cu 4,63. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de fir asupra corpului care se rotește în timpul reducerii razei cercului.

16. Un proton plecând din repaus este accelerat într-un ciclotron până la o viteză finală de $3,0 \cdot 10^7$ m/s (aproximativ o zecime din viteza luminii). Cât lucru mecanic, în electronvolți, este efectuat asupra protonului de către forța electrică a ciclotronului care îl accelerează?

17. Un jucător aruncă o minge de baseball cu o viteză inițială de 18,3 m/s. Un alt jucător aflat la același nivel prinde mingea atunci când viteza sa se reduce la 12,2 m/s. Ce lucru mecanic a fost efectuat pentru a învinge rezistența aerului? Greutatea mingii este de 255 g.

18. Blocul de masă M arătat în figura 7-11 are inițial o viteză v_0 spre dreapta și poziția sa este astfel încât resortul nu exercită nici o forță asupra lui, adică resortul nu este întins sau comprimat. Blocul se mișcă spre dreapta pe o distanță l înainte de a se opri în poziția punctată arătată. Constanta elastică a resortului este k și coeficientul de frecare cinetică dintre bloc și masă este μ_c . Dacă blocul parcurge distanța l , (a) ce lucru mecanic este efectuat asupra sa de către forța de frecare? (b) Ce lucru mecanic este efectuat asupra sa de către forța resortului? (c) Există alte forțe care acționează asupra blocului, și dacă există, ce lucru mecanic efectuează ele? (d) Care este lucrul mecanic total efectuat asupra blocului? (e) Să se folosească teorema energiei

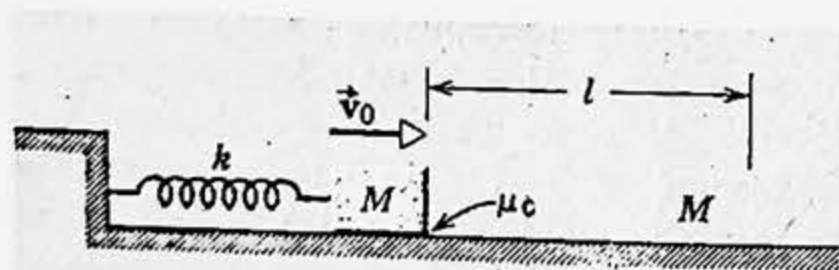


Figura 7-11.

cinetice pentru a afla valoarea lui l exprimată prin M , v_0 , μ_c , g și k .

19. *Lucrul mecanic și energia cinetică în sisteme de referință mobile.* Să considerăm doi observatori, unul al cărui reper este legat de pământ, și altul al cărui reper este legat, de exemplu, de un tren care se mișcă cu viteza uniformă \vec{u} față de pământ. Fiecare observă că o particulă, inițial în repaus față de tren, este accelerată de o forță constantă aplicată ei în timpul t în direcția înainte.

(a) Să se arate că pentru fiecare observator lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu câștigul de energie cinetică a particulei, însă un observator măsoară aceste cantități găsind $\frac{1}{2}ma^2t^2$, în timp ce celălalt observator le măsoară găsind $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. Aici a este accelerația comună a particulei de masă m .

(b) Să se explice diferențele între lucrurile mecanice efectuate de aceeași forță pe distanțe diferite pe care observatorii le măsoară în timpul t cît acționează forța. Să se explice energiile cinetice finale diferite măsurate de fiecare observator în funcție de lucrul mecanic pe care particula l-ar efectua dacă ar fi oprită relativ la reperul fiecărui observator.

20. O forță netă de 5,0 N acționează asupra unui corp cu masa de 15 kg aflat inițial în repaus. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forță în prima, a doua și a treia secundă și puterea instantanee dezvoltată de forță la sfârșitul celei de a treia secunde.

21. O rachetă a unui satelit, cântărind 45 200 kg câștigă o viteză de 6 440 km/h la 1,0 min. după lansare. (a) Care este energia sa cinetică la sfârșitul primului minut? (b) Care este puterea medie cheltuită în acest timp, dacă se neglijează forțele de frecare și de gravitație?

22. Un autocamion se poate mișca în sus pe un drum cu o pantă de 1,0 m urcare la fiecare 50 m, cu o viteză de 30 km/h. Forța de rezistență este egală cu 1/25 din greutatea autocamionului. Cât de iute se va mișca același autocamion în jos pe pantă dezvoltând aceeași putere?

23. Un cal trage un vagon cu o forță de 18,1 kgf sub un unghi de 30° față de orizontala și se mișcă cu o viteză de 9,66 km/h. (a) Cât lucru mecanic efectuează calul în 10 minute? (b) Care este puterea dezvoltată de cal?

24. Forța necesară pentru a remorca o barcă cu viteză constantă este proporțională cu viteza. Dacă este necesară o putere de 10 CP pentru a remorca o anumită barcă cu o viteză de 4,0 km/h, ce putere va fi necesară pentru a o remorca cu o viteză de 12 km/h?

25. Ce putere este dezvoltată de o mașină de ascuțit a cărei roată are o rază de 20,3 cm și se rotește cu 2,5 rot/s dacă unealta de ascuțit este ținută împotriva roții cu o forță de

18,1 kgf? Coeficientul de frecare dintre unealtă și roată este de 0,32.

26. Un băiat a cărui masă este de 51,0 kg se cațără, cu viteză constantă, pe o sfoară verticală de 6,00 m lungime în 10,0 s. (a) Ce lucru mecanic efectuează băiatul? (b) Care este puterea dezvoltată de băiat în timpul cățărării?

27. Un corp de masă m se mișcă uniform accelerat din repaus pînă la o viteză v_f în timpul t_f . (a) Să se arate că lucrul mecanic efectuat asupra corpului ca funcție de timpul t , exprimat prin v_f și t_f , este

$$\frac{1}{2} m = \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2.$$

(b) Care este puterea instantanee dezvoltată asupra corpului în funcție de timpul t ?

(c) Care este puterea instantanee la sfîrșitul a 10 s dezvoltată asupra unui corp de 1450 kgf care accelerează pînă la o viteză de 96,6 km/h în 10 s?

Conservarea energiei

8-1. Introducere

În capitolul 7 am dedus *teorema energiei cinetice* din legea a doua a mișcării a lui Newton. Această teoremă afirmă că lucrul mecanic W efectuat de forța rezultantă \vec{F} care acționează asupra particulei în timpul mișcării acesteia de la un punct la altul este egal cu variația ΔE_c a energiei cinetice a particulei:

$$W = \Delta E_c. \quad (8-1)$$

De obicei asupra particulei acționează mai multe forțe, forța rezultantă \vec{F} fiind suma lor vectorială, adică $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ în care presupunem că acționează n forțe. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă \vec{F} este suma algebrică a lucrurilor mecanice efectuate de aceste forțe individuale, adică $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$. În modul acesta, putem scrie teorema energiei cinetice (ecuația 8-1) astfel

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta E_c. \quad (8-2)$$

În acest capitol vom considera sisteme în care o singură particulă este acționată de mai multe tipuri de forțe și vom calcula pe W_1 , W_2 etc. pentru aceste forțe; aceasta ne va conduce la definirea diferitelor tipuri de energie precum energia potențială și energia termică (calorică). Procesul va culmina în formularea unuia dintre marile principii ale științei: *principiul conservării energiei*.

8-2. Forțe conservative

Să facem mai întâi distincție între două tipuri de forțe: *conservative* și *neconservative*. Vom considera un exemplu din fiecare tip și vom discuta fiecare exemplu din mai multe puncte de vedere diferite, dar legate între ele.

Să ne imaginăm un resort fixat la un capăt de un perete rigid ca în figura 8-1. Să facem să alunece un bloc de masă m cu viteza \vec{v} dirijată direct spre resort; presupunem că planul orizontal nu are frecări și că resortul este ideal, adică verifică legea lui Hooke (ecuația 7-7)

$$F = -kx \quad (8-3)$$

unde F este forța exercitată de resort atunci când capătul său liber este deplasat cu o distanță x ; presupunem mai departe că masa resortului este atât de mică în comparație cu cea a blocului încât putem neglija energia cinetică a resortului. În modul acesta, în sistemul (bloc + resort) întreaga energie cinetică este concentrată în bloc.

După ce blocul atinge resortul, viteza și deci energia cinetică a blocului descresc pînă când în final blocul ajunge în repaus datorită acțiunii forței resortului, ca în figura 8-1, b. Blocul își inversează acum mișcarea, când resortul comprimat se destinde. El cîștigă viteză și energie cinetică și când ajunge din nou în poziția inițială de contact cu resortul, găsim că el are aceeași viteză și aceeași energie cinetică pe care a avut-o inițial. Numai direcția mișcării s-a schimbat. Blocul pierde energie cinetică în timpul unei jumătăți a mișcării sale dar o recîștigă integral în timpul celeilalte jumătăți a mișcării sale atunci când revine la punctul său de plecare (fig. 8-1, c).

Am interpretat energia cinetică a unui corp ca fiind capacitatea sa de a efectua lucru mecanic în virtutea mișcării sale. Este clar că după încheierea mișcării dus-întors, capacitatea blocului din figura 8-1 de a efectua lucrul mecanic rămîne aceeași, ea s-a conservat. Forța elastică exercitată de un resort ideal precum și alte forțe care acționează în același mod se numesc *conservative*. Forța de gravitație este de asemenea conservativă; dacă aruncăm vertical în sus o minge ea va reveni (dacă presupunem că rezistența aerului este neglijabilă) în mîna noastră cu aceeași energie cinetică pe care a avut-o când a părăsit mîna noastră.

Dacă însă o particulă asupra căreia acționează una sau mai multe forțe revine la poziția sa inițială cu o energie cinetică mai mare sau mai mică decît a avut inițial, atunci pe un drum dus-întors capacitatea sa de a efectua lucrul mecanic s-a schimbat. În acest caz, capacitatea de a efectua lucrul mecanic nu a fost conservată și cel puțin una din forțele care au acționat se numește *neconservativă*.

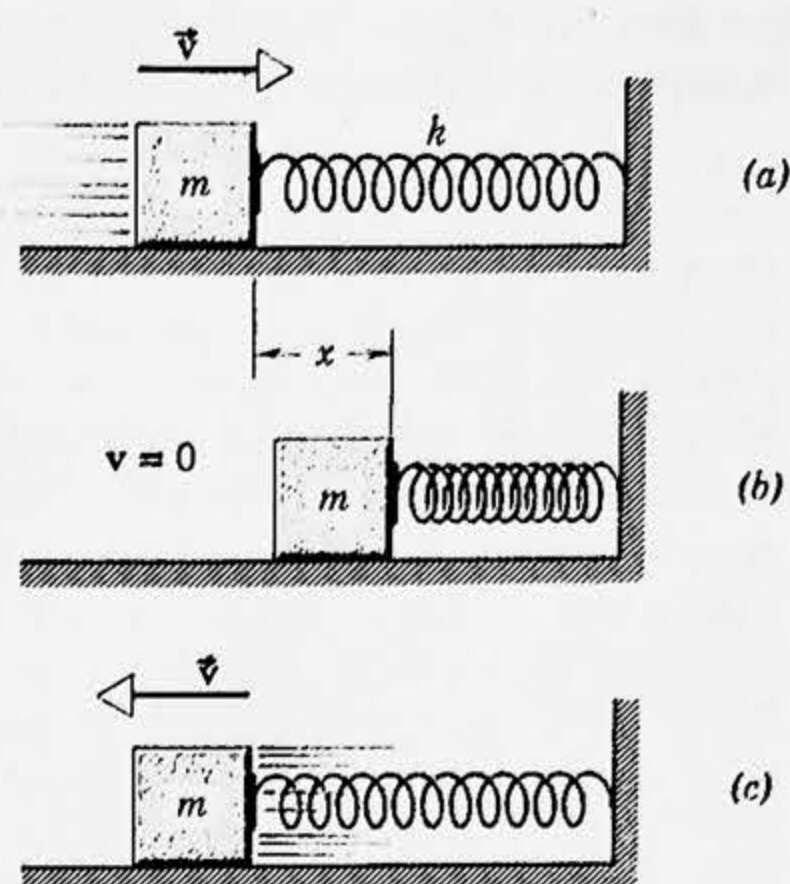


Figura 8-1. (a) Un bloc de masă m este lansat cu viteză v împotriva unui resort. (b) Blocul este oprit prin acțiunea forței resortului. (c) Blocul și-a recîștigat viteză inițială v când revine la poziția de plecare.

Pentru a ilustra o forță neconservativă să presupunem că suprafețele blocului și planului din figura 8-1 nu mai sînt fără frecări și deci se exercită o forță de frecare \vec{f} de către plan asupra blocului. Forța de frecare se opune mișcării indiferent de sensul în care blocul se mișcă și vom găsi că blocul revine la punctul său de plecare cu *mai puțină* energie cinetică decît cea pe care a avut-o inițial. Deoarece am arătat în prima noastră experiență că forța resortului era conservativă, trebuie să atribuim acest nou rezultat acțiunii forței de frecare¹. Spunem că această forță precum și alte forțe care acționează în același mod sînt *neconservative*. Forța de inducție într-un betatron (paragraful 35-6) este de asemenea o forță neconservativă. În loc de a disipa însă energia cinetică, ea generează energie cinetică, astfel încît un electron care se rotește pe o orbită circulară în betatron va reveni în poziția sa inițială cu *mai multă* energie cinetică decît cea pe care a avut-o inițial. Pe un drum închis electronul cîștigă energie cinetică, așa cum și trebuie dacă betatronul este eficace.

Putem defini forța conservativă dintr-un alt punct de vedere, acela al lucrului mecanic efectuat de forță asupra particulei. În primul exemplu de mai sus, lucrul mecanic efectuat de forța elastică a resortului, asupra blocului în timpul comprimării resortului era negativ, deoarece forța exercitată asupra blocului de către resort (spre stînga în fig. 8-1, a) era dirijată în sens opus deplasării blocului (spre dreapta în fig. 8-1, a). Cînd resortul se destindea, lucrul mecanic efectuat de forța resortului asupra blocului era pozitiv (forța și deplasarea în același sens). În primul exemplu lucrul mecanic net efectuat asupra blocului de către forța resortului în timpul unui ciclu complet sau pe un drum închis este zero.

În cel de al doilea exemplu am considerat efectul forței de frecare. Lucrul mecanic efectuat asupra blocului de către această forță era negativ pe fiecare porțiune a ciclului deoarece forțele de frecare se opun totdeauna mișcării. Prin urmare lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe un drum închis nu poate fi zero. În general rezultă: *O forță este conservativă dacă lucrul mecanic efectuat de forță asupra unei particule care se mișcă pe orice drum închis este zero. O forță este neconservativă dacă lucrul mecanic efectuat de forță asupra unei particule care se mișcă pe un drum închis nu este zero.*

Teorema energiei cinetice arată că acest al doilea mod de a defini forțele conservative și neconservative este complet echivalent cu prima noastră definiție. Dacă nu există nici o variație a energiei cinetice a unei particule care se mișcă pe orice drum închis, atunci $\Delta E_c = 0$ și din ecuația (8-1), $W = 0$ și forța rezultantă care acționează trebuie să fie conservativă. Analog, dacă $\Delta E_c \neq 0$ atunci din ecuația (8-1) rezultă $W \neq 0$ și cel puțin una din forțele care acționează trebuie să fie neconservativă.

¹ În realitate mai acționează asupra blocului din figura 8-1 încă alte două forțe: greutatea sa \vec{G} și forța normală \vec{N} exercitată de plan. Deoarece acestea acționează sub un unghi drept față de direcția mișcării, ele nu pot schimba energia cinetică a blocului, și deci nu intervin în acenstă discuție.

Putem intra în această problemă ceva mai detaliat. Atunci când există frecări în sistemul din figura 8-1, asupra blocului acționează patru forțe, forța rezultantă fiind

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{G} + \vec{N} + \vec{f}$$

în care forțele sînt: forța resortului \vec{F}_s , greutatea blocului \vec{G} , forța normală exercitată asupra blocului de către plan \vec{N} și forța de frecare \vec{f} . Putem scrie, ecuația (8-2), teorema energiei cinetice, astfel

$$W_s + W_G + W_N + W_f = \Delta E_c,$$

unde termenii din stînga sînt lucrurile mecanice efectuate asupra blocului de cele patru forțe de mai sus. Am văzut că pentru un drum închis $W_s = 0$. Analog, $W_G = W_N = 0$ deoarece forțele corespunzătoare sînt dirijate sub un unghi drept față de deplasarea blocului. Astfel, variația energiei cinetice se datorește în întregime lui W_f , lucrului mecanic efectuat de forța de frecare.

Putem considera diferența dintre forțele conservative și cele neconservative și dintr-un al treilea punct de vedere. Să presupunem că o particulă se mișcă de la a la b de-a lungul traiectoriei 1 și înapoi de la b la a de-a lungul traiectoriei 2 ca în figura 8-2, a . Asupra particulei pot acționa mai multe forțe pe acest drum închis; vom considera fiecare forță separat. Dacă forța considerată este conservativă, lucrul mecanic efectuat asupra particulei de acea forță particulară pe un drum închis este zero sau

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

ceea ce se poate scrie astfel

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}.$$

Aceasta înseamnă că lucrul mecanic efectuat de la a la b de-a lungul traiectoriei 1 este egal cu lucrul mecanic, cu semn schimbat, efectuat de la b la a de-a lungul traiectoriei 2. Dar dacă obligăm particula să meargă de la a la b de-a lungul traiectoriei 2, așa cum se arată în figura 8-2, b , noi pur și simplu inversăm sensul mișcării precedente de-a lungul lui 2, astfel încît

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}.$$

Prin urmare

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}.$$

ceea ce ne spune că lucrul mecanic efectuat asupra particulei de o forță conservativă pentru a o deplasa de la a la b este același pentru oricare traiectorie.

Trajectoriile 1 și 2 pot fi orice fel de traiectorii care pleacă de la a la b ; la fel a și b pot fi alese oricare două puncte. Vom găsi totdeauna același rezultat dacă forța este conservativă. Prin urmare avem o altă definiție echivalentă a forțelor

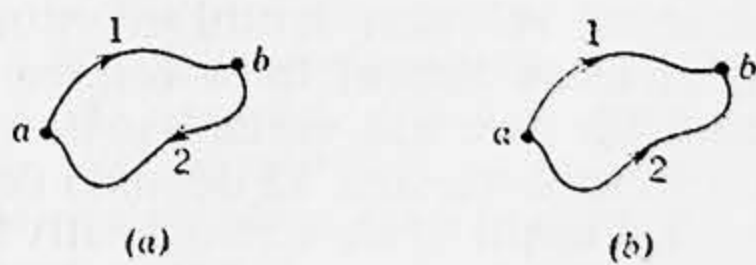


Figura 8-2.

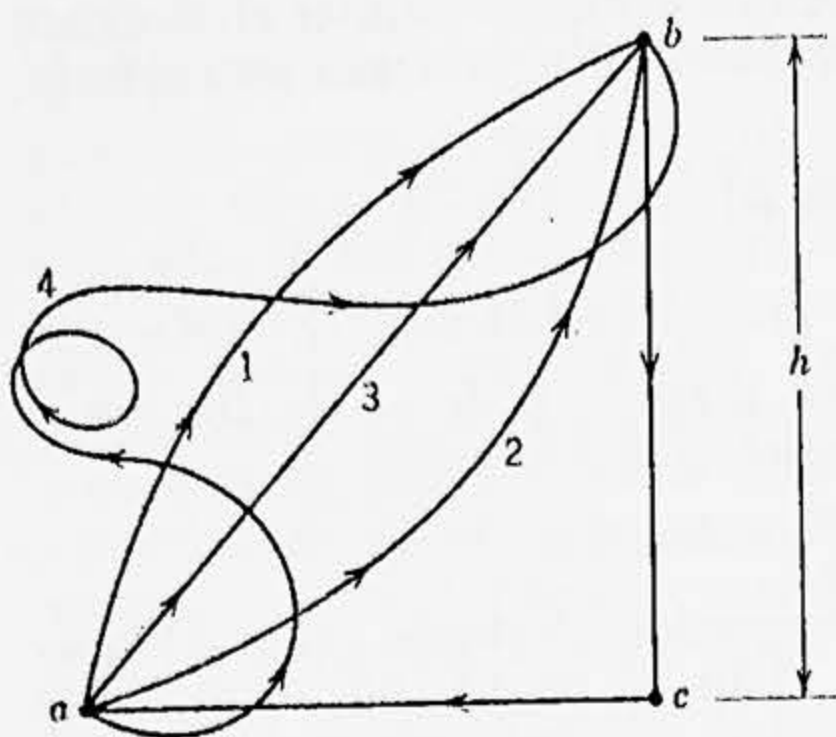


Figura 8-3. O piatră este ridicată de la a la b pe mai multe traiectorii 1, 2, 3 și 4.

conservative și neconservative: O forță este conservativă dacă lucrul mecanic efectuat de ea asupra unei particule care se mișcă între două puncte depinde numai de aceste puncte și nu de drumul urmat. O forță este neconservativă dacă lucrul mecanic efectuat de această forță asupra unei particule care se mișcă între două puncte depinde de drumul urmat de particulă între aceste două puncte.

Pentru a ilustra această a treia definiție (echivalentă) a forțelor conservative, să considerăm un al doilea tip de forțe conservative, cele datorite gravitației. Să presupunem că luăm în mîna noastră o piatră de masă m și o ridicăm la o înăl-

țime h deasupra pămîntului, mergînd de la a la b pe mai multe drumuri diferite, ca în figura 8-3. Știm deja că pe un drum închis lucrul mecanic total efectuat de o forță conservativă este zero și că forța gravitațională este conservativă. Lucrul mecanic efectuat asupra pietrei de către gravitație de-a lungul drumului de întoarcere bca este pur și simplu mgh . Prin urmare, deoarece gravitația este o forță conservativă, lucrul mecanic efectuat de gravitație asupra pietrei de-a lungul oricărui drum de la a la b trebuie să fie $-mgh$, deoarece numai dacă este valabilă această relație, lucrul mecanic total efectuat de gravitației pe un drum închis poate fi zero. Aceasta înseamnă că gravitația efectuează lucru mecanic negativ asupra pietrei atunci cînd aceasta se mișcă de la a la b sau altfel spus, trebuie efectuat lucrul mecanic împotriva gravitației de-a lungul oricărui drum ab . Studentul poate calcula direct rezultatul că lucrul mecanic efectuat de gravitație de-a lungul oricărui drum ab este egal cu $-mgh$. În adevăr, oricare din aceste drumuri poate fi descompus în deplasări infinitezimale care sînt alternativ orizontale și verticale; nu se efectuează nici un fel de lucru mecanic de către gravitație în deplasările orizontale și deplasarea verticală netă este aceeași în toate cazurile. Prin urmare, lucrul mecanic efectuat de gravitație asupra pietrei care se mișcă de la a la b depinde numai de pozițiile lui a și b și nu depinde deloc de drumul urmat.

Pentru o forță neconservativă, cum este forța de frecare, lucrul mecanic efectuat depinde de drumul urmat între două puncte fixe. Trebuie doar să relevăm faptul că atunci cînd împingem un bloc de-a lungul unei mese (aspre) între oricare două puncte a și b pe diferite drumuri, distanța parcursă variază și de asemenea lucrul mecanic efectuat de forța de frecare variază. El depinde de drum.

Definițiile forței conservative pe care le-am dat sînt echivalente între ele. Pe care o vom folosi depinde numai de conveniență. Tratarea în care figurează drumul închis arată clar că energia cinetică se conservă.

atunci cînd acționează forțe conservative. Pentru a dezvolta ideea de energie potențială este însă preferabilă formularea care se bazează pe independența de drum.

8-3. Energia potențială

În acest paragraf ne vom concentra atenția nu asupra blocului în mișcare din figura 8-1, ci asupra sistemului (izolat) bloc+resort. În loc să spunem că blocul se mișcă preferăm, din acest punct de vedere, să spunem că se schimbă configurația sistemului. Măsurăm atît poziția blocului cît și configurația sistemului în fiecare moment prin același parametru x și anume deplasarea capătului liber al resortului de la poziția sa normală, corespunzătoare resortului neîntîns. Energia cinetică a sistemului este aceeași ca cea a blocului, deoarece am presupus că resortul are masă neglijabilă.

Am văzut că energia cinetică a sistemului din figura 8-1 descrește în timpul primei jumătăți a mișcării, devine zero și apoi crește în timpul celei de a doua jumătăți a mișcării. Dacă nu există frecări, energia cinetică a sistemului, atunci cînd el a revenit la configurația sa inițială, își revine valoarea sa inițială.

În aceste circumstanțe (acționează forțe conservative) are sens să introducem conceptul de *energie de configurație* sau *energie potențială* E_p și să zicem că dacă E_c a sistemului variază cu ΔE_c , atunci cînd se schimbă configurația sistemului (adică cînd blocul se mișcă în sistemul din fig. 8-1), atunci E_p a sistemului trebuie să varieze cu o cantitate egală în modul dar opusă ca semn, astfel încît suma celor două variații să fie zero:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0. \quad (8-4, a)$$

Putem spune altfel că orice variație a energiei cinetice E_c a sistemului este compensată de o variație egală în modul dar opusă ca semn a energiei potențiale E_p a sistemului astfel încît suma lor rămîne constantă în timpul mișcării:

$$E_c + E_p = \text{const.} \quad (8-4, b)$$

Energia potențială a unui sistem reprezintă o formă de energie înmagazinată care poate fi în întregime recuperată și convertită în energie cinetică. Nu putem asocia o energie potențială cu o forță neconservativă cum este forța de frecare deoarece energia cinetică a unui sistem în care acționează astfel de forțe *nu* revine la valoarea sa inițială atunci cînd sistemul revine la configurația sa inițială.

Ecuatiile (8-4) se aplică unui sistem închis de obiecte în interacție, cum este sistemul bloc+resort din figura 8-1. În acest exemplu, deoarece am considerat resortul de masă neglijabilă, energia cinetică poate fi asociată numai cu blocul care se mișcă. Blocul încetinește (sau accelerează) deoarece asupra lui se exercită o forță de către resort; atunci, este adecvat să asociem energia potențială a sistemului cu această forță, adică cu resortul. Astfel, în acest caz simplu spunem că energia cinetică, loca-

lizată în bloc, descrește în timpul primei jumătăți a mișcării în timp ce energia potențială, localizată în resort, crește în acest timp¹.

Ecuațiile (8-4) reprezintă în esență un bilanț al energiei. Ele, ca și conceptul de energie potențială, n-au însă nici un sens real pînă cînd nu arătăm modul cum trebuie calculată E_p în funcție de configurația sistemului în cadrul căruia acționează forțele conservative; în exemplul din figura 8-1 aceasta înseamnă că trebuie să fim în stare să calculăm pe $E_p(x)$, unde x este deplasarea resortului.

Pentru a îmbunătăți conceptul nostru de energie potențială E_p să considerăm teorema energiei cinetice, $W = \Delta E_c$, în care W este lucrul mecanic efectuat de către forța rezultantă asupra unei particule în timpul mișcării sale de la a la b . Pentru simplitate să presupunem că asupra particulei acționează o singură forță \vec{F} ; aceasta este în adevăr valabil în cazul sistemului din figura 8-1. Dacă \vec{F} este conservativă putem combina teorema energiei cinetice (ec. 8-1) cu ecuația (8-4, a), obținînd

$$W = \Delta E_c = -\Delta E_p. \quad (8-5, a)$$

Lucrul mecanic W efectuat de o forță conservativă depinde numai de punctele în care începe și se sfîrșește mișcarea și nu depinde de drumul urmat între ele. O astfel de forță poate depinde numai de poziția particulei; ea nu depinde de viteza particulei sau de timp, de exemplu.

Pentru mișcarea unidimensională, ecuația (8-5, a) devine

$$\Delta E_p = -W = -\int_{x_0}^x F(x) dx, \quad (8-5, b)$$

particula mișcîndu-se de la x_0 la x . Ecuația (8-5, b) arată cum trebuie calculată variația energiei potențiale ΔE_p atunci cînd o particulă, asupra căreia acționează forța conservativă $F(x)$ se mișcă de la punctul a , descris prin x_0 , la punctul b descris prin x . Ecuația arată că putem calcula pe ΔE_p numai dacă forța \vec{F} depinde numai de poziția particulei (adică de configurația sistemului), ceea ce este echivalent cu a spune că energia potențială are sens numai pentru forțele conservative.

Acum după ce știm că energia potențială E_p depinde numai de poziția particulei, putem scrie ecuația (8-4, b) astfel

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(x) = E_t \quad (\text{cazul unidimensional}) \quad (8-6, a)$$

în care E_t , care rămîne constant în timpul mișcării particulei, se numește *energie mecanică totală*. Să presupunem că particula se mișcă de la punctul a (unde coordonata sa este x_0 și viteza sa este v_0) pînă la punctul b (unde coordonata sa este x și viteza sa este v). Energia mecanică

¹ Exact așa cum am presupus că resortul are masă neglijabilă, tot astfel presupunem că blocul este rigid, adică are elasticitate neglijabilă. Într-un sistem mai general, energia cinetică și cea potențială pot fi flecare prezente în diferite porțiuni ale sistemului, variînd în anumite proporții atunci cînd configurația sistemului variază.

totală E_t trebuie să fie aceeași pentru fiecare configurație a sistemului dacă forța este conservativă, sau din ecuația (8-6, a)

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(x_0). \quad (8-6, b)$$

Cantitatea din membrul drept al ecuației depinde numai de poziția inițială x_0 și viteza inițială v_0 , care au valori definite; ea este deci constantă în timpul mișcării. Aceasta este energia mecanică totală constantă E_t . Observăm că forța și accelerația nu apar în această ecuație, ci numai poziția și viteza. Ecuațiile (8-6) se numesc adesea *legea conservării energiei mecanice* pentru forțe conservative.

În multe probleme găsim că, deși unele forțe individuale nu sînt conservative, ele sînt atît de mici încît le putem neglija. În astfel de cazuri putem folosi ecuațiile (8-6) cu o bună aproximație. De exemplu, rezistența aerului poate fi prezentă dar poate avea un efect atît de mic asupra mișcării încît o putem ignora.

Observăm că, în loc de a porni de la legile lui Newton, putem simplifica rezolvarea problemei în cazul cînd sînt implicate numai forțe conservative plecînd de la ecuațiile (8-6). Această relație este desigur dedusă din legile lui Newton, dar ea reprezintă un pas mai apropiat de soluție (așa-numita primă integrală a mișcării). De multe ori rezolvăm probleme fără a analiza forțele sau fără a scrie legile lui Newton, cău-tînd, în schimb, mărimi care să fie constante în timpul mișcării; în cazul nostru energia mecanică este constantă și putem scrie ecuațiile (8-6) ca un prim pas.

Pentru cazul mișcării unidimensionale putem scrie de asemenea relația dintre forță și energia potențială (ecuația 8-5, b) astfel

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx}. \quad (8-7)$$

Pentru a arăta aceasta, să substituim această expresie a lui $F(x)$ în ecuația (8-5, b) și să observăm că obținem o identitate. Ecuația (8-7) ne dă un alt mod de a privi energia potențială. *Energia potențială este o funcție de poziție a cărei derivată cu semn schimbat ne dă forța.*

Studentul poate observa ca am scris mărimea $E_p(x)$ în ecuațiile (8-6) deși sîntem în stare să calculăm doar variațiile lui E_p (din ecuația (8-5, b) și nu pe E_p însăși. Să ne imaginăm că o particulă se mișcă de la a la b de-a lungul axei x și că asupra ei acționează o singură forță conservativă $F(x)$. Pentru a prescrie o valoare lui E_{pb} , energiei potențiale din punctul b , să scriem

$$\Delta E_p = E_{pb} - E_{pa}$$

sau (vezi ecuația 8-5, b)

$$E_{pb} = \Delta E_p + E_{pa} = - \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx + E_{pa}. \quad (8-8)$$

Nu putem atribui o valoare lui E_{pb} pînă nu atribuim o valoare lui E_{pa} . Dacă punctul b este o poziție arbitrară x , astfel încît $E_{pb} = E_p(x)$, dăm

sens lui $E_p(x)$, alegînd punctul a drept o poziție de referință convenabilă, descrisă de $x_a = x_0$ și atribuind arbitrar o valoare energiei potențiale $E_{pa} = E_p(x_0)$ cînd corpul se află în acel punct. În modul acesta, ecuația (8-8) devine

$$E_p(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx + E_p(x_0). \quad (8-9)$$

Energia potențială pentru corpul aflat în punctul de referință, adică $E_p(x_0)$, se ia de obicei în mod arbitrar egală cu zero.

Este adesea convenabil să alegem ca punct de referință x_0 pe acela în care forța care acționează asupra particulei este nulă. În modul acesta, forța exercitată de un resort este zero atunci cînd resortul are lungimea sa normală neîntinsă; spunem de obicei că energia potențială este de asemenea nulă în această situație. De asemenea, atracția exercitată de Pămînt asupra unui corp descrește atunci cînd corpul se depărtează de Pămînt devenind zero la o distanță infinită. De obicei luăm punctul de la infinit drept punctul nostru de referință și atribuim valoarea zero energiei potențiale asociate cu forța gravitațională în acel punct (vezi capitolul 16). Pînă acum însă ne-am ocupat mai mult de atracția gravitațională exercitată asupra unor corpuri cum sînt mingile de baseball etc., care, în comparație cu raza Pămîntului, niciodată nu se depărtează prea mult de suprafața Pămîntului. În acest caz forța gravitațională ($=mg$) este practic constantă și este convenabil să luăm valoarea zero a energiei potențiale, nu la infinit, ci la suprafața Pămîntului.

Efectul schimbării coordonatei punctului de referință standard x_0 , sau a valorii arbitrare atribuite lui $E_p(x_0)$, constă doar în schimbarea valorii lui $E_p(x)$ printr-o constantă aditivă. Prezența unei constante arbitrare aditive în expresia energiei potențiale (ec. 8-9) nu schimbă cu nimic ecuațiile pe care le-am scris pînă acum. Aceasta pur și simplu adaugă un același termen constant la fiecare membru al ecuației (8-6, b), de exemplu, lăsînd această ecuație neschimbată. Mai mult, schimbarea lui $E_p(x)$ cu o constantă aditivă nu schimbă forța calculată din ecuația (8-7), deoarece derivata unei constante este zero. Toate acestea înseamnă pur și simplu că alegerea punctului de referință pentru energia potențială este neesențială, deoarece avem de a face întotdeauna cu diferențe de energie potențială și nu cu valoarea absolută a energiei potențiale într-un punct dat.

Există un anumit grad de arbitrar și în specificarea energiei cinetice. Pentru a determina viteza și deci energia cinetică, trebuie să specificăm sistemul de referință. Viteza unui om care șade într-un tren este zero dacă luăm trenul ca sistem de referință, dar nu este zero pentru un observator de pe pămînt care vede omul mișcîndu-se cu viteză uniformă. Valoarea energiei cinetice depinde de sistemul de referință folosit de către observator. Prin urmare, important pentru energia mecanică E_p , care este suma dintre energia cinetică și energia potențială, nu este valoarea sa reală în timpul unei mișcări date (aceasta depinde de observator) ci faptul că această valoare nu variază în timpul mișcării, pentru oricare observator particular, dacă forțele sînt conservative.

8-4. Sisteme conservative unidimensionale

Să calculăm acum energia potențială în cazul mișcării unidimensionale pentru două exemple de forțe conservative, forța gravitației pentru mișcările în vecinătatea suprafeței terestre și forța elastică atractivă a unui resort întins (ideal).

Pentru forța de gravitație alegem mișcarea unidimensională pe verticală, de-a lungul axei y . Alegem sensul pozitiv al axei y în sus; forța de gravitație va fi atunci în sensul negativ al axei y , adică în jos. Avem $F(y) = -mg$, o constantă. Energia potențială în punctul y se găsește din ecuația (8-9):

$$E_p(y) = - \int_0^y F(y) dy + E_p(0) = - \int_0^y (-mg) dy + E_p(0) = mgy + E_p(0).$$

Energia potențială poate fi luată zero pentru $y=0$, astfel încît $E_p(0)=0$ și

$$E_p(y) = mgy. \quad (8-10)$$

Energia potențială gravitațională este atunci mgy . Relația $F(y) = -dE_p/dy$ (ecuația 8-7) este satisfăcută, deoarece $-d(mgy)/dy = -mg$. Alegem $y=0$ la suprafața pămîntului pentru conveniență, astfel încît energia potențială gravitațională este zero la suprafața pămîntului și crește liniar cu altitudinea y .

Dacă comparăm punctele y și $y=0$, conservarea energiei cinetice plus energiei potențiale, ecuația (8-6, b), ne dă relația

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgy = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Aceasta este echivalentă din punct de vedere matematic cu rezultatul bine cunoscut (vezi ecuația 3-17),

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Dacă particula noastră se mișcă de la o înălțime h_1 pînă la o înălțime h_2 , putem folosi ecuația (8-6, b) și obținem

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 + mgh_2.$$

Acest rezultat este echivalent cu cel de la exemplul 5, capitolul 7. Energia mecanică totală E_t este constantă și se conservă în timpul mișcării, deși energia cinetică și energia potențială variază odată cu variația configurației sistemului (particulă + pămînt).

Un al doilea exemplu de forță conservativă este forța exercitată de un resort elastic asupra unui corp de masă m legat de el, care se mișcă pe o suprafață orizontală fără frecări. Dacă luăm $x_0=0$ în poziția în care capătul resortului nu este întins, forța exercitată asupra corpului atunci cînd resortul este întins pe o distanță x față de lungimea sa inițială, este $F = -kx$. Energia potențială se obține din ecuația (8-9)

$$E_p(x) = - \int_0^x F(x) dx + E_p(0) = - \int_0^x (-kx) dx + E_p(0).$$

Dacă alegem $E_p(0)=0$, energia potențială, la fel ca și forța, este nulă atunci când resortul nu este întins și

$$E_p(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Rezultatul este același indiferent dacă întindem sau comprimăm resortul, adică dacă x este pozitiv sau negativ.

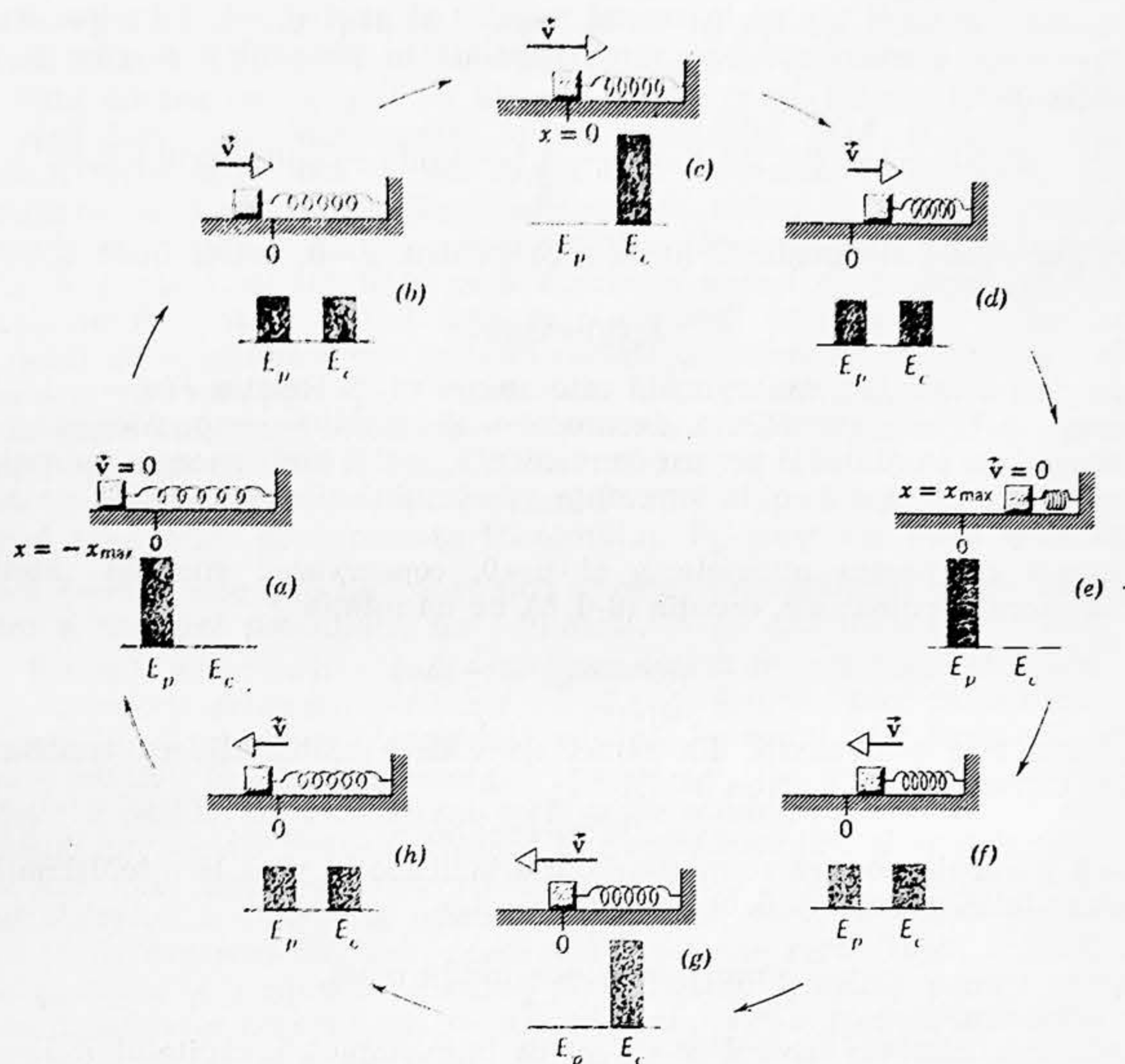


Figura 8-4. Un corp fixat de un resort alunecă înainte și înapoi pe o suprafață fără frecări. Sistemul se numește oscilator armonic. Este ilustrată mișcarea corpului în timpul unui ciclu. Plecând de la stînga (ora 9), corpul se află în poziția sa extremă din stînga și momentan este în repaus: $E_c=0$. Resortul este întins pînă la lungimea sa maximă: $E_c=E_{p,max}$ (E_c și E_p sînt ilustrate prin grafice dreptunghiulare sub fiecare desen). După o optime de ciclu mai tîrziu (desenul următor), corpul a cîștigat energie cinetică, însă resortul nu mai este atît de alungit: E_c și E_p au aici aceeași valoare: $E_c=E_p=E_{p,max}/2$. În desenul de sus resortul nu este nici alungit, nici comprimat și viteza este maximă: $E_p=0$, $E_c=E_{c,max}=E_{p,max}$. Ciclul continuă cu energia totală $E=E_c+E_p$ mereu aceeași: $E=E_{c,max}=E_{p,max}$. Oscilatorul armonic va fi analizat mai amănunțit în capitolul 15.

Relația $F(x) = -dE_p/dx$ (ecuația 8-7) este satisfăcută, deoarece $-d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)/dx = -kx$. Energia potențială elastică a resortului este atunci

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (8-11)$$

Corpul de masă m va efectua o mișcare în care energia totală E_t este conservată (fig. 8-4). Din ecuația (8-6, b) avem

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Aici v_0 este viteza particulei în punctul $x=0$. Din punct de vedere fizic obținem un astfel de rezultat întinzînd resortul cu o forță aplicată, pînă la o distanță x_m și apoi lăsînd resortul liber. Observăm că pentru $x=0$ energia sistemului (particulă+resort) este numai cinetică. Pentru $x=x_m$ (valoarea maximă a lui x), v trebuie să fie nul, astfel încît aici energia sistemului este numai potențială. Pentru $x=x_m$, avem

$$\frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

sau

$$x_m = \sqrt{m/k} \cdot v_0.$$

Pentru pozițiile intermediare între x_1 și x_2 , ecuația (8-6, b) dă

$$\frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} mv_2^2.$$

Am văzut că *energia cinetică a unui corp este lucrul mecanic pe care corpul îl poate efectua în virtutea mișcării sale*. Exprimăm energia cinetică cu ajutorul formulei $E_c = \frac{1}{2} mv^2$. Nu putem da o formulă similară, universală prin care să se poată exprima energia potențială. *Energia potențială a unui sistem de corpuri este lucrul mecanic pe care sistemul de corpuri îl poate efectua în virtutea poziției relative a părților sale, adică în virtutea configurației sale*. În fiecare caz trebuie să determinăm cît lucru mecanic poate efectua sistemul atunci cînd trece de la o configurație la alta și să luăm acest lucru mecanic drept diferență a energiei potențiale a sistemului între aceste două configurații.

Energia potențială a resortului depinde de poziția relativă a părților resortului. Se poate obține lucru mecanic lăsînd resortul să revină de la lungimea sa întinsă la lungimea sa neîntinsă, în care timp el exercită o forță pe această distanță. Dacă de resort este legat un corp cu o anumită masă, ca în exemplul nostru, corpul va fi accelerat de această forță și energia potențială va fi convertită în energie cinetică. În cazul gravitațional un obiect ocupă o anumită poziție în raport cu Pămîntul. Energia potențială este o proprietate a obiectului și a Pămîntului, considerate ca un sistem de corpuri. Poziția relativă a părților acestui sistem este aceea care determină energia lor potențială. Energia potențială este mai mare atunci cînd părțile sînt mai depărtate una de alta decît atunci cînd ele

sînt mai apropiate. Pierderea de energie potențială este egală cu lucrul mecanic efectuat în acest proces. Acest lucru mecanic este convertit în energia cinetică a corpurilor. În exemplul nostru am ignorat energia cinetică cîștigată de Pămînt atunci cînd un obiect cade spre el. În principiu, acest obiect exercită o forță asupra Pămîntului și îi imprimă o accelerație, față de un anumit reper inerțial. Variația rezultantă a vitezei însă este extrem de mică și în ciuda masei enorme a Pămîntului, energia sa cinetică adițională este neglijabilă în comparație cu cea cîștigată de obiectul în cădere. Aceasta va fi dovedit într-un capitol ulterior. În alte cazuri, cum este mișcarea planetelor în care masele obiectelor din sistem pot fi comparabile, nu putem ignora nici o parte a sistemului. În general, *energia potențială* nu este atribuită fiecărui corp separat, ci *este considerată drept o proprietate comună a sistemului*.

Exemplul 1. Care este variația energiei potențiale gravitaționale atunci cînd un lift de 1,00 t se mișcă de la parter pînă la vîrfurile lui Empire State Building, care are o înălțime de 380 m?

Energia potențială gravitațională a sistemului (lift+Pămînt) este $E_p = mgy$. Atunci

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = mg(y_2 - y_1).$$

Dar

$$mg = G = 9,8 \text{ kN} \quad \text{și} \quad y_2 - y_1 = 380 \text{ m},$$

astfel încît

$$\Delta E_p = 9,8 \cdot 10^3 \cdot 380 \text{ N} \cdot \text{m} = 3,72 \text{ MJ}.$$

Exemplul 2. Ca exemplu de simplitate și utilitate a metodei energetice de rezolvare a problemelor dinamicii, să considerăm problema ilustrată în figura 8-5. Un bloc de masă m alunecă în jos pe o suprafață curbă fără frecări. Forța exercitată de suprafață asupra blocului este totdeauna perpendiculară pe suprafață și pe direcția de mișcare a blocului, astfel încît această forță nu efectuează lucru mecanic. Numai forța gravitațională efectuează lucru mecanic asupra blocului și această forță este conservativă. Energia mecanică E_t se conservă și deci putem scrie dintr-odată

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 + mgy_2.$$

Aceasta dă

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2).$$

Viteza la baza suprafeței curbe depinde numai de viteza inițială și de variația înălțimii verticale, dar nu depinde deloc de forma suprafeței. În adevăr, dacă blocul este inițial în repaus la înălțimea $y_1 = h$ și dacă punem $y_2 = 0$, obținem

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

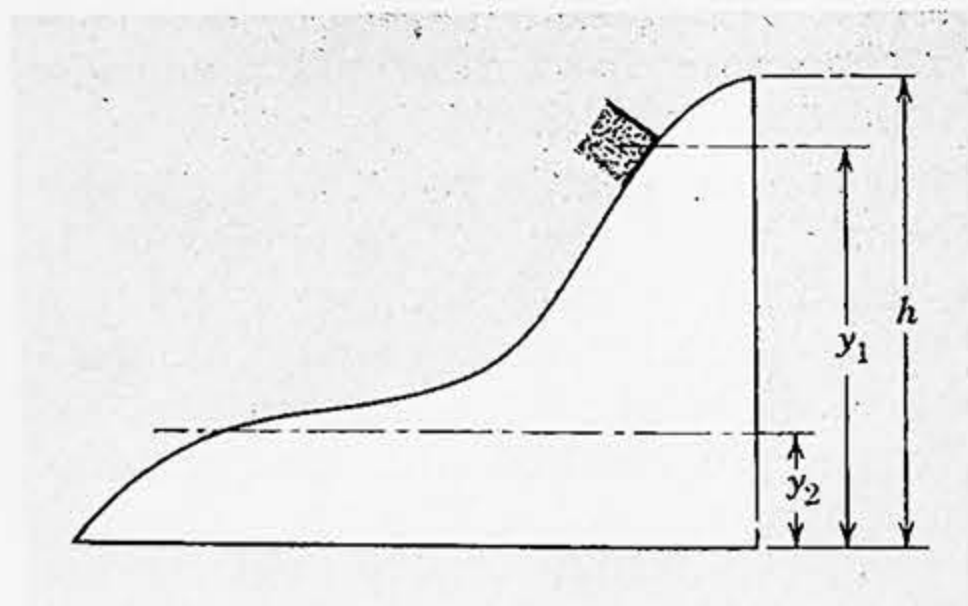


Figura 8-5. Un bloc care alunecă în jos pe o suprafață curbă fără frecări.

În acest punct studentul trebuie să-și reamintească independența de drum a lucrului mecanic efectuat de forțe conservative și trebuie să fie capabil să justifice aplicarea ideilor dezvoltate pentru mișcarea unidimensională la acest exemplu bidimensional.

În această problemă valoarea forței depinde de panta suprafeței în fiecare punct. Prin urmare, accelerația nu este constantă ci este o funcție de poziție. Pentru a obține viteza plecând de la legile lui Newton, ar trebui să determinăm mai întâi accelerația în fiecare punct și apoi să integrăm accelerația de-a lungul traiectoriei. Noi am ocolit această muncă laborioasă plecând dintr-o dată de la faptul că energia mecanică este constantă în timpul mișcării.

Exemplul 3. Resortul dintr-un pistol cu resort are constanta elastică de 100 N/m. El este comprimat cu 5,0 cm față de lungimea sa naturală și o bilă cântărind 10 g este împinsă prin țeavă împotriva resortului. Presupunând că nu există frecări și că țeava pistolului este orizontală, cu ce viteză va părăsi bila pistolul atunci când resortul este eliberat?

Forța este conservativă, astfel încât energia mecanică se conservă în acest proces. Energia mecanică inițială este energia potențială elastică a resortului, $\frac{1}{2} kx^2$, și energia mecanică finală este energia cinetică a bilei, $\frac{1}{2} mv^2$. Prin urmare,

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

sau

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot x} = \sqrt{\frac{100 \cdot \text{N/m}}{10^{-2} \text{ kg}} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 5,5 \text{ m/s.}$$

8-5. Soluția completă a problemei forțelor unidimensionale care depind numai de poziție

Ecuația (8-6, a) ne dă relația dintre coordonată și viteză într-o mișcare unidimensională, atunci când forța depinde numai de poziție. Forța și accelerația au fost eliminate atunci când s-a ajuns la această ecuație. Pentru a completa soluția problemei dinamice trebuie să eliminăm viteza și să determinăm poziția în funcție de timp.

Putem face aceasta într-un mod formal, precum urmează. Din ecuația (8-6, a) avem

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(x) = E_t.$$

Rezolvînd în raport cu v , obținem

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E_t - E_p(x)]} \quad (8-12)$$

sau

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_t - E_p(x)]}} = dt$$

Atunci funcția $x(t)$ poate fi găsită rezolvind în raport cu x ecuația

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_t - E_p(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (8-13)$$

Am considerat aici că particula este în punctul x_0 în momentul t_0 și că E_t este energia totală constantă. În aplicarea acestei ecuații, semnul radicalului corespunde sensului vitezei \vec{v} , și anume dacă viteza \vec{v} este îndreptată în sensul pozitiv sau cel negativ al axei x . Dacă \vec{v} schimbă sensul în timpul mișcării, poate fi necesar să facem integrarea separat pentru fiecare porțiune a mișcării.

Chiar dacă această integrală nu poate fi calculată sau ecuația rezultantă nu poate fi rezolvată pentru a ne da o soluție explicită pentru $x(t)$, ecuația conservării energiei ne dă informații utile asupra soluției. De exemplu, pentru o energie totală dată E_t , ecuația (8-12) ne spune că particula este restrinsă la acele regiuni ale axei x în care $E_t > E_p(x)$. Nu putem avea din punct de vedere fizic, o viteză imaginară sau o energie cinetică negativă, astfel încât $E_t - E_p(x)$ trebuie să fie zero sau mai mare decât zero. Mai mult, putem obține o bună descriere calitativă a tipurilor de mișcare posibile reprezentând pe $E_p(x)$ în funcție de x . Această descriere depinde de faptul că viteza este proporțională cu rădăcina pătrată din diferența $E_t - E_p$.

De exemplu, să considerăm funcția energiei potențiale arătată în figura 8-6. Aceasta poate fi privită ca un profil real al unei piste fără frecări pentru patine sau cărucioare cu role, dar în general ea poate reprezenta energia potențială a unui sistem negravitațional. Deoarece trebuie să avem $E_t > E_p(x)$ pentru mișcarea reală, energia totală minimă posibilă este E_0 . Pentru această valoare a energiei totale, $E_0 - E_p$ și energia cinetică trebuie să fie zero. Particula trebuie să fie în repaus în punctul x_0 . Pentru o energie ceva mai mare, E_1 , particula se poate mișca numai între x_1 și x_2 . Când ea se mișcă din x_0 viteza sa descrește atunci când se apropie fie de x_1 fie de x_2 . În punctele x_1 sau x_2 particula se oprește și își schimbă sensul mișcării. Aceste puncte x_1 și x_2 se numesc de aceea *punctele de întoarcere* ale mișcării. Pentru o energie totală E_2 există patru puncte de întoarcere și particula poate oscila într-una din cele două văi (gropi) de potențial. Pentru energia totală E_3 există numai un singur punct de întoarcere a mișcării, x_3 . Dacă particula se mișcă inițial în spre sensul negativ al axei x , ea se va opri în punctul x_3 și apoi se va mișca în sensul pozitiv al axei x . Ea își va mări viteza pe măsură ce E_p descrește și își va micșora viteza pe măsură ce E_p crește. Pentru energii mai mari decât E_4 nu există puncte de întoarcere și particula nu-și

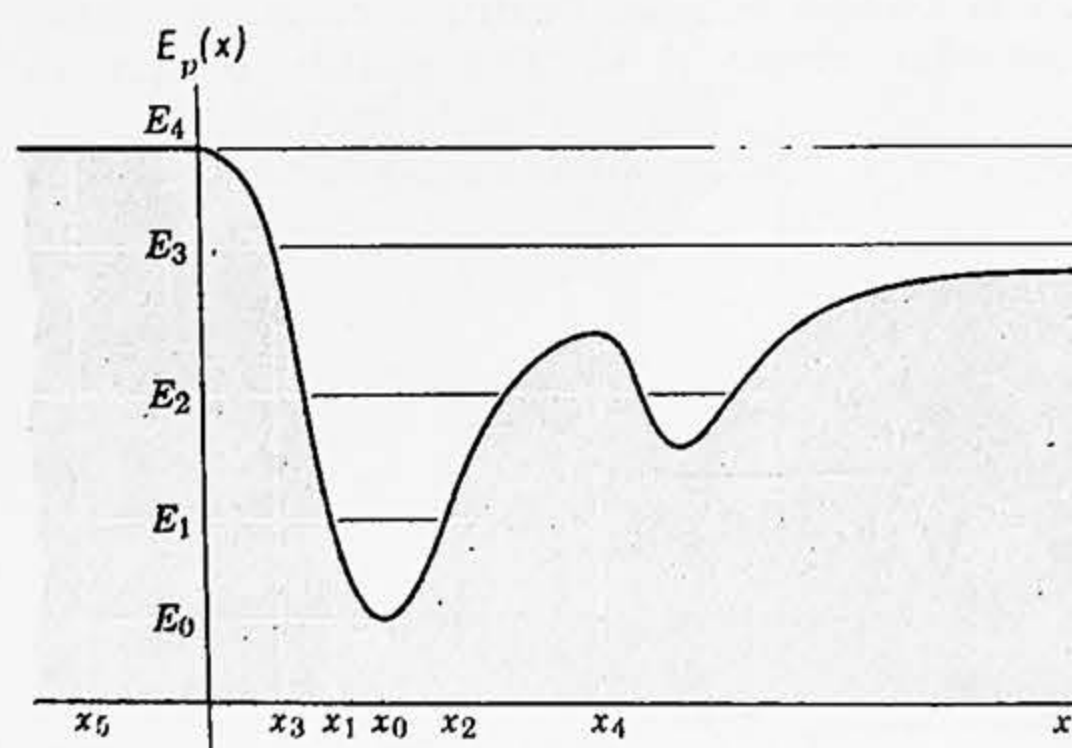


Figura 8-6. Curba energiei potențiale.

va schimba sensul mișcării. Viteza sa va varia conform valorii potențialului din fiecare punct.

Într-un punct unde $E_p(x)$ are o valoare minimă, cum este punctul $x=x_0$, panta curbei este nulă astfel încît forța este nulă, adică $F(x_0) = -(dE_p/dx)_{x=x_0} = 0$. O particulă în repaus în acest punct va rămîne în repaus. Mai mult, dacă particula este deplasată puțin într-un sens sau altul, forța $F(x) = -dE_p/dx$ va tinde s-o readucă și particula va oscila în jurul punctului de echilibru. Acest punct de echilibru este de aceea numit punct de echilibru stabil.

Într-un punct unde $E_p(x)$ are o valoare maximă, cum este punctul $x=x_4$, panta curbei este nulă astfel încît forța este iarăși nulă, adică $F(x_4) = -(dE_p/dx)_{x=x_4} = 0$. O particulă în repaus în acest punct va rămîne în repaus. Dacă însă particula este deplasată chiar cu o distanță foarte mică din acest punct, forța $F(x) = -dE_p/dx$ va tinde s-o împingă și mai departe de la poziția de echilibru. Un astfel de punct de echilibru se numește de aceea punct de echilibru instabil.

Într-un interval în care $E_p(x)$ este constant, cum este în jurul lui $x=x_5$, panta curbei este nulă astfel încît forța este nulă, adică $F(x_5) = -(dE_p/dx)_{x=x_5} = 0$. Un astfel de interval se cheamă interval de echilibru indiferent, deoarece o particulă poate fi deplasată ușor fără a suferi nici forță de respingere nici forță de atracție.

Din toate acestea rezultă clar că dacă cunoaștem funcția energiei potențiale în regiunea lui x în care se mișcă corpul, cunoaștem o mulțime de lucruri despre mișcarea corpului.

Exemplul 4. Funcția energiei potențiale pentru forța care se exercită între doi atomi, într-o moleculă biatomică, poate fi exprimată aproximativ astfel:

$$E_p(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

unde a și b sînt constante pozitive, iar x este distanța dintre atomi.

(a) Pentru ce valori ale lui x , $E_p(x)$ este egal cu zero? Pentru ce valoare a lui x , $E_p(x)$ are un minim?

În figura 8-7, a este arătat graficul funcției $E_p(x)$. Valorile lui x pentru care $E_p(x)$ este egală cu zero, se găsesc din

$$\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0.$$

Prin urmare

$$x^6 = a/b, \quad x = \sqrt[6]{a/b}.$$

$E_p(x)$ devine zero de asemenea cînd $x \rightarrow \infty$ [vezi figura sau puneți $x = \infty$ în ecuația lui $E_p(x)$], astfel încît $x = \infty$ este de asemenea o soluție.

Valoarea lui x pentru care $E_p(x)$ este minimă se obține din

$$\frac{d}{dx} E_p(x) = 0.$$

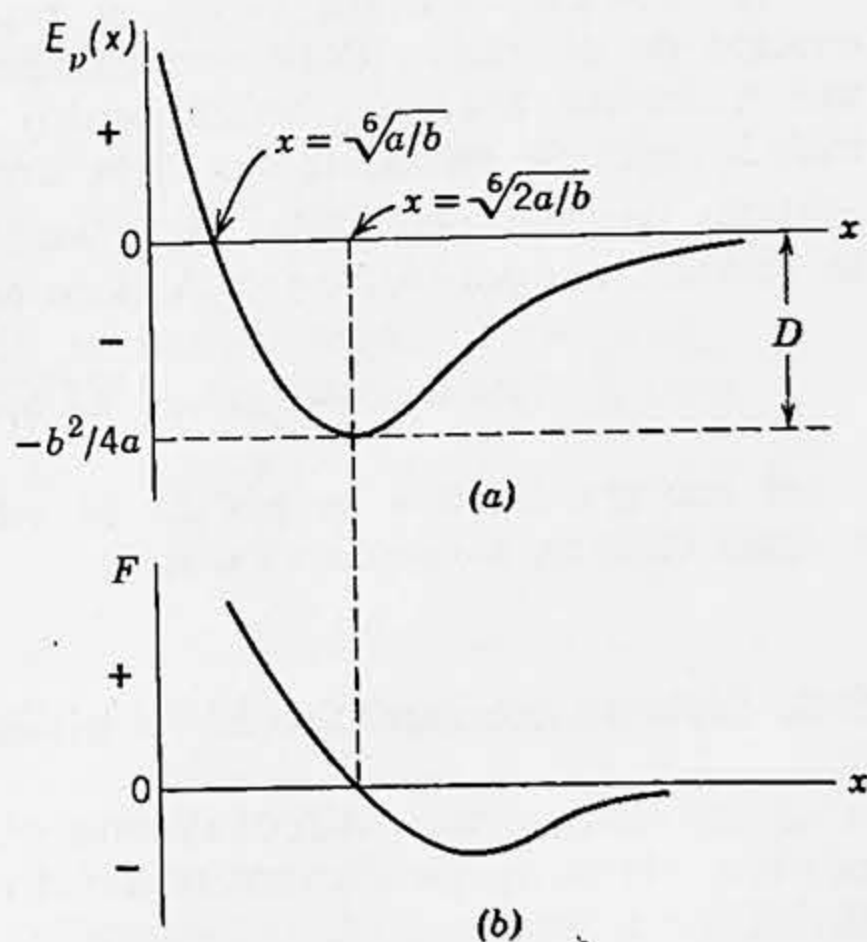


Figura 8-7. Exemplul 4. (a) Energia potențială și (b) forța dintre doi atomi într-o moleculă biatomică în funcție de distanța x dintre atomi.

Adică

$$\frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0$$

sau

$$x^6 = 2a/b, \quad x = \sqrt[6]{2a/b}.$$

(b) Să se determine forța dintre atomi.

Din ecuația (8-7),

$$F(x) = -\frac{d}{dx} E_p(x),$$

$$F = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^{13}} - \frac{b}{x^7} \right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Am reprezentat forța în funcție de distanța de separație dintre atomi în figura 8-7, b. Când forța este pozitivă (de la $x=0$ până la $x = \sqrt[6]{2a/b}$) atomii se resping între ei (forța este dirijată în sensul creșterii lui x). Când forța este negativă (de la $x = \sqrt[6]{2a/b}$ până la $x=\infty$), atomii se atrag între ei (forța este dirijată în sensul descreșterii lui x). Pentru $x = \sqrt[6]{2a/b}$ forța este nulă; acesta este un punct de echilibru și anume un punct de echilibru stabil.

(c) Să presupunem că unul din atomi rămâne în repaus și că celălalt se mișcă de-a lungul axei x . Să se descrie mișcările posibile.

Din analiza efectuată în această secțiune rezultă clar că atomul va oscila în jurul poziției de echilibru $x = \sqrt[6]{2a/b}$, exact ca o particulă care alunecă în sus și în jos pe pantele fără frecare ale văii (gropii) de potențial.

(d) Energia necesară pentru a rupe molecula în atomi separați, se numește energie de disociație. Care este energia de disociație a moleculei? Dacă un atom are suficientă energie cinetică pentru a escalada bariera de potențial, el nu va mai fi legat de celălalt atom. Prin urmare, energia de disociație D este egală cu variația energiei potențiale de la valoarea minimă din punctul $x = \sqrt[6]{2a/b}$ până la valoarea din punctul $x=\infty$. Aceasta este:

$$E_p(x=\infty) - E_p(x = \sqrt[6]{2a/b}) = 0 - \left(\frac{a}{4a^2/b^2} - \frac{b}{2a/b} \right) = \frac{b^2}{4a}.$$

Dacă energia cinetică în poziția de echilibru este egală cu sau mai mare decât această valoare, molecula va disocia.

8-6. Sisteme conservative bi- și tridimensionale

Până acum am discutat energia potențială și conservarea energiei pentru sisteme unidimensionale în care forța era dirijată de-a lungul liniei de mișcare. Putem generaliza ușor discuția la cazul mișcării tridimensionale.

Dacă lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} depinde numai de punctele extreme ale mișcării și este independent de traiectoria urmată între aceste puncte, forța este conservativă. Definim energia potențială E_p prin analogie cu definiția dată în cazul sistemului unidimensional și găsim că

ea este o funcție de trei coordonate spațiale, adică $E_p = E_p(x, y, z)$. Iarăși obținem o expresie pentru conservarea energiei mecanice.

Generalizarea ecuației (8-5, b) la mișcarea tridimensională ne dă

$$\Delta E_p = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \quad (8-5, c)$$

sau, mai compact în notație vectorială.

$$\Delta E_p = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (8-5, d)$$

în care ΔE_p este variația energiei potențiale a sistemului atunci cînd particula se mișcă din punctul (x_0, y_0, z_0) , descris de vectorul de poziție \vec{r}_0 , pînă în punctul (x, y, z) , descris de vectorul de poziție \vec{r} . F_x , F_y și F_z sînt componentele forței conservative $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$.

Generalizarea ecuației (8-6, b) la mișcarea tridimensională este

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(x, y, z) = \frac{1}{2} mv_0^2 + E_p(x_0, y_0, z_0) \quad (8-6, c)$$

care poate fi scrisă cu notațiile vectoriale astfel:

$$\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} + E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + E_p(\vec{r}_0) \quad (8-6, d)$$

în care $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ și $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$.

Analog ecuația (8-6, a) devine

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(x, y, z) = E_t$$

pentru trei dimensiuni, E_t fiind energia mecanică totală constantă.

În sfîrșit, generalizarea ecuației (8-7) la cazul tridimensional este

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{i} \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

Dacă substituim această expresie a lui \vec{F} în ecuația (8-5, d), obținem iarăși o identitate. În limbajul vectorial se spune că forța conservativă \vec{F} este egală cu minus *gradientul* energiei potențiale $E_p(x, y, z)$.

Studentul poate arăta că toate aceste expresii se reduc la ecuațiile unidimensionale corecte pentru mișcarea de-a lungul axei x .

Exemplul 5. Să considerăm pendulul simplu, paragraful 7-4, figura 7-8, a. Mișcarea sistemului are loc în planul $x-y$, adică este o mișcare bidimensională. Tensiunea din fir este totdeauna sub un unghi drept față de mișcarea particulei suspendate, astfel încît această forță nu efectuează lucru mecanic asupra particulei. Dacă pendulul este deplasat cu un anumit unghi și apoi lăsat liber, numai forța gravitațională de atracție, exercitată asupra particulei de către Pămînt, efec-

tuează lucru mecanic asupra lui. Deoarece această forță este conservativă, putem folosi ecuația conservării energiei în cazul bidimensional,

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(x, y) = E_t.$$

Dar $E_p(x, y)$ este egal cu mgy , unde y este luat egal cu zero în punctul cel mai coborât al arcului de cerc ($\Phi = 0^\circ$). Atunci

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgy = E_t.$$

Particula este deviată cu un unghi Φ_0 înainte de a fi lăsată liber. În acest caz, energia potențială este mgh , corespunzătoare înălțimii $y = h$ deasupra punctului de referință. În punctul în care particula este lăsată liberă ($\Phi = \Phi_0$) viteza și energia cinetică sînt nule, astfel încît energia potențială este egală cu energia mecanică totală din acel punct.

Prin urmare

$$E_t = mgh$$

și

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgy = mgh$$

sau

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(h - y).$$

Viteza maximă are loc pentru $y = 0$, unde $v = \sqrt{2gh}$.

Viteza minimă are loc pentru $y = h$ unde $v = 0$.

Pentru $y = 0$ energia este în întregime cinetică, energia potențială fiind nulă.

Pentru $y = h$ energia este în întregime potențială, energia cinetică fiind nulă.

În pozițiile intermediare energia este în parte cinetică și în parte potențială.

Observăm că $E_p \leq E_t$ în toate punctele mișcării; pendulul nu poate urca mai mult decît $y = h$, punctul inițial de unde a fost lăsat liber.

8-7. Forțe neconservative

Pînă acum am considerat numai acțiunea unei singure forțe conservative asupra particulei. Plecînd de la teorema energiei cinetice sau

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta E_c \quad (8-2)$$

am văzut că, dacă a acționat numai o singură forță \vec{F}_1 , și dacă ea era conservativă, atunci am putut reprezenta lucrul mecanic W_1 pe care forța l-a efectuat asupra particulei, ca fiind egal cu o descreștere a energiei potențiale ΔE_{p1} a sistemului (vezi ecuația 8-5, a), adică

$$W_1 = -\Delta E_{p1}.$$

Combinînd aceasta cu ecuația (8-2), obținem

$$\Delta E_c + \Delta E_{p1} = 0$$

Dacă acționează mai multe forțe conservative cum sînt gravitația, forța elastică a unui resort, forța electrostatică etc., putem extinde ușor aceste două ecuații la

$$\Sigma W_c = -\Sigma \Delta E_p \quad (8-14, a)$$

și

$$\Delta E_c + \Sigma \Delta E_p = 0 \quad (8-14, b)$$

în care ΣW_c este suma lucrurilor mecanice efectuate de diferite forțe (conservative) și ΔE_p sînt variațiile energiei potențiale a sistemului asociate cu aceste forțe. Cantitatea din membrul stîng al ecuației (8-14, b) este pur și simplu ΔE_t — variația energiei mecanice totale pentru cazul cînd asupra particulei acționează mai multe forțe conservative. Atunci, putem scrie această ecuație astfel:

$$\Delta E_t = 0 \quad (\text{forțe conservative}), \quad (8-15)$$

care ne spune că atunci cînd configurația sistemului variază, energia mecanică totală E_t a sistemului rămîne constantă.

Să presupunem acum că, în afara mai multor forțe conservative, mai acționează asupra particulei o singură forță neconservativă datorită frecării. Putem scrie atunci ecuația (8-2) astfel

$$W_f + \Sigma W_c = \Delta E_c,$$

unde ΣW_c este iarăși suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele conservative, iar W_f este lucrul mecanic efectuat de forța de frecare. Putem transcrie aceasta (vezi ecuația 8-14, b) astfel

$$\Delta E_c + \Sigma \Delta E_p = W_f. \quad (8-16)$$

Ecuația (8-16) arată că, dacă acționează o forță de frecare, energia mecanică totală *nu* este constantă, ci variază cu cantitatea de lucru mecanic efectuat de forța de frecare. Putem scrie ecuația (8-16) astfel

$$\Delta E_t = E - E_0 = W_f. \quad (8-17)$$

Deoarece W_f , lucrul mecanic efectuat de forța de frecare *asupra* particulei, este totdeauna negativ, rezultă din ecuația (8-17) că energia mecanică finală $E (= E_c + \Sigma E_p)$ este mai mică decît energia mecanică inițială $E_0 (= E_{c0} + \Sigma E_{p0})$.

Frecarea este un exemplu de forță disipativă, una care efectuează lucrul mecanic negativ asupra corpului și tinde să micșoreze energia mecanică totală a sistemului. Dacă am folosi o altă forță neconservativă, atunci W_f din ecuațiile (8-16) și (8-17) ar fi fost înlocuit de un termen W_{nc} , care ar arăta iarăși că energia mecanică totală E_t a sistemului *nu* este constantă, ci variază cu cantitatea de lucru mecanic efectuat de forța neconservativă. Prin urmare, *numai dacă nu există forțe neconservative sau dacă putem neglija lucrul mecanic efectuat de ele, putem admite conservarea energiei mecanice.*

Ce s-a întîmplat cu energia mecanică „pierdută” în cazul frecării? Ea este transformată în energia internă U_{int} , care duce la o creștere de temperatură. Energia internă dezvoltată este exact egală cu energia mecanică disipată. Vom spune mult mai multe lucruri despre energia internă în capitolele următoare.

Aşa cum lucrul mecanic efectuat de o forţă conservativă *asupra* unui obiect este egal cu minus câştigul de energie potenţială, tot astfel lucrul mecanic efectuat de o forţă de frecare *asupra* unui obiect este egal cu minus energia internă câştigată. Cu alte cuvinte, energia internă produsă este egală cu lucrul mecanic efectuat *de către* obiect. Atunci putem înlocui pe W_f din ecuaţia (8-17) cu $-U_{int}$, în care U_{int} este energia termică produsă sau

$$\Delta E_t + U_{int} = 0. \quad (8-18)$$

Aceasta afirmă că nu există nici o variaţie a sumei dintre energia mecanică şi energia internă a sistemului dacă asupra sistemului acţionează numai forţe conservative şi forţe de frecare. Scriind această ecuaţie sub forma $U_{int} = -\Delta E_t$, vedem că pierderea de energie mecanică este egală cu câştigul de energie internă.

Exemplul 6. Un bloc cu masa de 4,0 kg este lansat în sus, de-a lungul unui plan înclinat sub un unghi 30° , cu o viteză iniţială de 5,0 m/s. El a parcurs 2,0 m de-a lungul planului, s-a oprit şi a lunecat înapoi la baza planului. Să se calculeze forţa de frecare \vec{f} (presupusă ca avînd o mărime constantă) care a acţionat asupra blocului şi să se afle viteza v a blocului atunci cînd acesta revine la baza planului înclinat.

Să considerăm mai întîi mişcarea în sus. În vîrfurile planului unde se termină mişcarea,

$$E = E_c + E_p = 0 + 4,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 39,2 \text{ J}.$$

La baza planului, unde începe mişcarea,

$$E_0 = E_{c0} + E_{p0} = \frac{1}{2} 4,0 \text{ kg} (5,0 \text{ m/s})^2 + 0 = 50 \text{ J}.$$

Dar

$$W_f = -f \cdot s = -f \cdot (2,0 \text{ m})$$

şi

$$E - E_0 = W_f,$$

astfel încît

$$39,2 \text{ J} - 50 \text{ J} = -f \cdot (2,0 \text{ m})$$

şi

$$f = 5,4 \text{ N}.$$

Să considerăm acum mişcarea în jos. Blocul revine la baza planului înclinat cu o viteză v . Atunci, la baza planului, unde această mişcare se termină,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} 4,0 \text{ kg} \cdot v^2 + 0 = (2,0 \text{ kg}) v^2.$$

În vîrfurile planului unde această mişcare începe,

$$E_0 = E_{c0} + E_{p0} = 0 + 4,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 39,2 \text{ J}.$$

Dar

$$W_f = -5,4 \text{ N} \cdot 2,0 \text{ m} = -10,8 \text{ J}$$

şi

$$E - E_0 = W_f,$$

astfel încît

$$(2,0 \text{ kg})v^2 - 39,2 \text{ J} = -10,8 \text{ J}$$

și

$$v = 3,77 \text{ m/s.}$$

8-8. Conservarea energiei

Putem extinde discuția din paragraful precedent, considerînd nu numai forțele conservative și forța de frecare, ci și alte forțe neconservative, diferite de forțele de frecare. Putem regrupa teorema energiei cinetice (ecuația 8-2)

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta E_c$$

astfel

$$\Sigma W_c + W_f + \Sigma W_{nc} = \Delta E_c, \quad (8-19)$$

în care ΣW_c este lucrul mecanic total efectuat asupra particulei de către forțele conservative, W_f este lucrul mecanic efectuat de frecare și ΣW_{nc} este lucrul mecanic total efectuat de forțele neconservative, altele decît frecarea. Am văzut că fiecare forță conservativă poate fi asociată cu o energie potențială și că frecarea este asociată cu energia internă, sau

$$\Sigma W_c = -\Sigma \Delta E_p$$

și

$$W_f = -U_{int},$$

astfel încît ecuația (8-19) devine

$$\Sigma W_{nc} = \Delta E_c + \Sigma \Delta E_p + U_{int}.$$

Oricare ar fi W_{nc} , a fost totdeauna posibil să găsim noi forme de energie care să corespundă acestui lucru mecanic. Putem atunci reprezenta pe ΣW_{nc} printr-o altă variație a energiei din membrul drept al ecuației, cu rezultatul că putem totdeauna scrie teorema conservării energiei, astfel:

$$0 = \Delta E_c + \Sigma \Delta E_p + U_{int} + (\text{variația altor forme de energie}).$$

Cu alte cuvinte, energia totală — cinetică plus potențială plus internă plus toate celelalte forme — nu variază. *Energia poate fi transformată dintr-o formă în alta, dar ea nu poate fi creată sau distrusă; energia totală este constantă.*

Această afirmație este o generalizare a experienței noastre, pînă acum necontrazisă de nici o observație efectuată asupra naturii. Ea se numește *principiul conservării energiei*. De mai multe ori în istoria fizicii acest principiu părea să fie violat. Dar eșecul său aparent a stimulat cercetarea cauzelor respective. Experimentatorii au căutat fenomenele fizice de la baza mișcării care însoțește forțele de interacție dintre corpuri. Astfel de fenomene au fost totdeauna găsite. Prin lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de frecare se produce energie internă; în alte interacțiuni se poate produce energie sub forma de sunet, lumină, electricitate etc. Prin urmare conceptul de energie a fost generalizat pentru a include forme de energie altele decît energia cinetică și potențială a

corpurilor direct observabile. Acest procedeu, care leagă mecanica corpurilor în mișcare cu fenomenele care nu sînt mecanice sau în care mișcarea nu este direct detectabilă, a legat mecanica de toate celelalte domenii ale fizicii. Conceptul de energie străbate astăzi întreaga știință a fizicii și a devenit una din ideile unificatoare ale fizicii¹.

În capitolele următoare vom studia diferite transformări ale energiei — din energie mecanică în energie internă, din energia mecanică în electrică, din nucleară în cea internă etc. În astfel de transformări măsurăm variațiile de energie prin intermediul lucrului mecanic, deoarece în astfel de transformări apar forțe ce efectuează lucrul mecanic.

Deși principiul conservării energiei cinetice plus potențiale este adesea util, vedem că el este un caz particular al principiului mai general de conservare a energiei. Energia cinetică și potențială se conservă numai atunci cînd acționează forțe conservative. Energia totală se conservă totdeauna.

8-9. Masa și energia

Una din legile mari de conservare ale științei a fost legea conservării materiei. Din punct de vedere filozofic o formulare mai veche a acestui principiu general a fost dată de poetul roman Lucrețius, contemporan cu Iulius Cesar, în lucrarea sa celebră „De Rerum Natura” (Despre natura lucrurilor). Lucrețius a scris: „Lucrurile nu pot fi create din nimic, nu pot fi — odată născute — transformate în nimic”. A trecut mult timp pînă cînd acest concept a fost stabilit ca un principiu științific ferm. Contribuția experimentală principală a fost făcută de către Antoine Lavoisier (1743—1794), considerat de mulți ca părintele chimiei moderne. El a scris în 1789: „Trebuie să considerăm ca axiomă incontestabilă faptul că în toate operațiile omului și naturii nimic nu este creat; o cantitate egală de materie există atît înainte cît și după experiență... și nimic nu are loc în afara schimbărilor și modificărilor în combinațiile acestor elemente”.

Acest principiu, numit ulterior conservarea masei, s-a dovedit a fi extrem de fructuos în chimie și fizică. Îndoilei serioase în ceea ce privește valabilitatea generală a acestui principiu au fost ridicate de Albert Einstein în lucrările sale în care a creat teoria relativității. Experiențele ulterioare efectuate cu electroni rapizi și cu materia nucleară au confirmat concluziile sale.

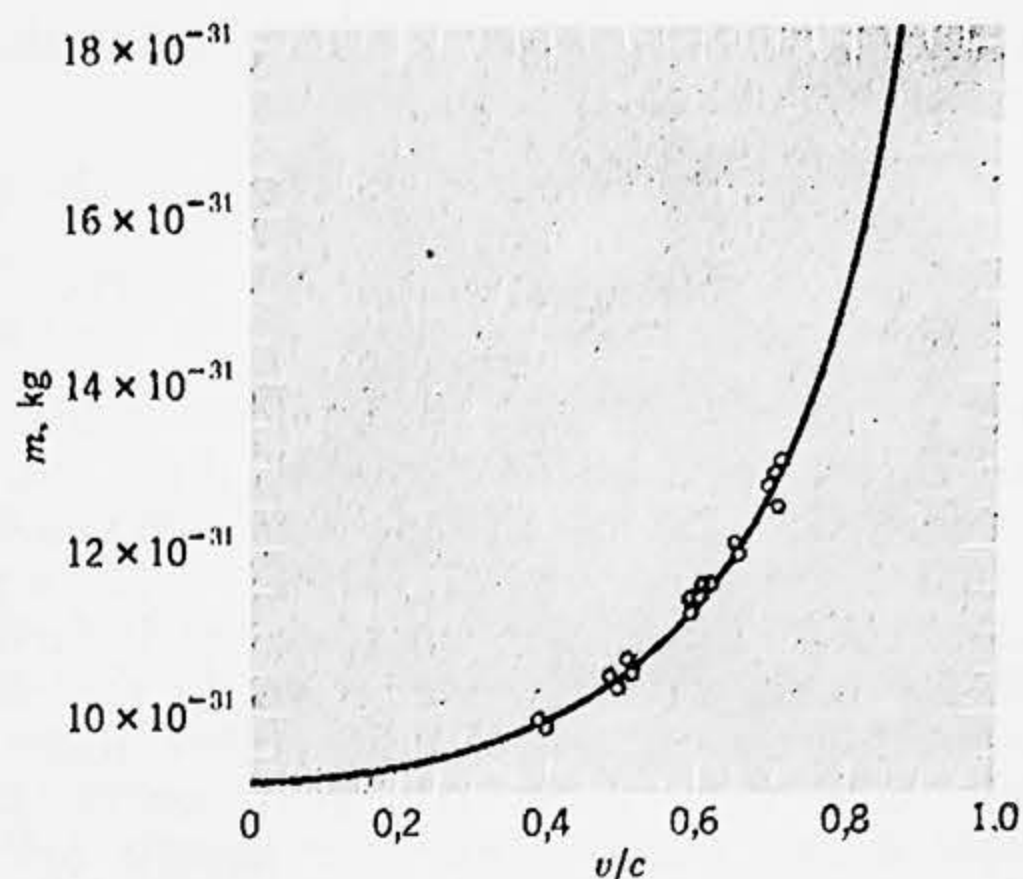
Descoperirile lui Einstein au sugerat faptul că, dacă vrem să reținem anumite legi fizice, masa unei particule trebuie redefinită astfel:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8-20)$$

Aici m_0 este masa particulei atunci cînd este în repaus față de observator, numită *masă de repaus*; m este masa particulei măsurată atunci cînd ea se mișcă cu viteza v față de observator și c este viteza luminii,

¹ Vezi de exemplu „Conceptul de energie în mecanică”, de R. B. Lindsay în *The Scientific Monthly*, octombrie 1957.

Figura 8-8. Modul cum crește masa unui electron pe măsură ce viteza față de un observator crește. Curba plină reprezintă graficul lui $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, iar cerulețele sînt adaptate după valorile experimentale obținute de Bucherer și Neumann în 1914. Curba tinde către infinit cînd $v \rightarrow c$.



care, are o valoare constantă de aproximativ $3 \cdot 10^8$ m/s. Pot fi făcute, de exemplu, verificări experimentale ale acestei ecuații, studiind deflecția electronilor rapizi în cîmpuri magnetice și măsurînd razele de curbură ale traiectoriilor lor. Traietoriile sînt circulare iar forța magnetică este centripetă ($F = mv^2/r$, F și v fiind cunoscute). La viteze ordinare diferența dintre m și m_0 este prea mică pentru a fi detectată. Dar electronii pot fi emiși de nuclee radioactive cu viteze mai mari decît nouă zecimi din viteza luminii. În astfel de cazuri rezultatele (fig. 8-8) confirmă ecuația (8-20).

Este convenabil să notăm raportul v/c cu litera β . Atunci ecuația (8-20) devine

$$m = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

Pentru a găsi energia cinetică a unui corp, calculăm lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care pune corpul în mișcare. În paragraful 7-5 am obținut

$$E_c = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

pentru energia cinetică, atunci cînd am presupus o masă constantă m_0 . Să presupunem acum că ținem seama de variația masei cu viteza și folosim relația $m = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}$ în ecuația precedentă. Găsim (problema 29, capitolul 9) că energia cinetică nu mai este dată de $\frac{1}{2} m_0 v^2$, ci este

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 = \Delta m c^2. \quad (8-21)$$

Energia cinetică a unei particule este deci produsul dintre c^2 și creșterea de masă Δm care rezultă din mișcare.

Acum, la viteze mici ne așteptăm ca rezultatul relativist să concorde cu rezultatul clasic. Cu ajutorul teoremei binomului putem dezvolta pe $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ astfel

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \dots$$

La viteze mici $\beta = v/c \ll 1$ astfel încât toți termenii dincolo de β^2 sînt neglijabili. Atunci

$$\begin{aligned} E_c &= (m - m_0)c^2 = m_0c^2[(1 - \beta^2)^{-1/2} - 1] = \\ &= m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1) \cong \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 = \frac{1}{2}m_0v^2, \end{aligned}$$

ceea ce reprezintă rezultatul clasic. Observăm de asemenea că atunci cînd E_c este egal cu zero, $m = m_0$ după cum era de așteptat.

Ideea de bază că energia este echivalentă cu masa poate fi extinsă pentru a include energii altele decît energia cinetică. De exemplu, atunci cînd comprimăm un resort și îi furnizăm energie potențială elastică E_p , masa sa crește de la m_0 la $m_0 + E_p/c^2$. Atunci cînd transmitem o cantitate de căldură Q unui obiect, masa sa crește cu o cantitate Δm , unde Δm este Q/c^2 . Ajungem astfel la un principiu al echivalenței dintre masă și energie: pentru orice cantitate de energie E de orice tip transmisă unui obiect material, masa obiectului crește cu o cantitate

$$\Delta m = E/c^2.$$

Aceasta este faimoasa formulă a lui Einstein

$$E = \Delta mc^2. \quad (8-22)$$

Deoarece masa însăși este o formă a energiei, putem afirma acum că un corp în repaus are o energie m_0c^2 în virtutea masei sale de repaus. Aceasta se numește energia sa de repaus. Dacă considerăm acum un sistem închis, principiul conservării energiei, generalizat de Einstein, devine

$$\Sigma(m_0c^2 + \mathcal{E}) = \text{const}$$

sau

$$\Delta(\Sigma m_0c^2 + \Sigma \mathcal{E}) = 0,$$

unde Σm_0c^2 este energia de repaus totală, iar $\Sigma \mathcal{E}$ este energia totală de toate celelalte tipuri. După cum a scris Einstein: „Fizica prerelativistă conține două legi de conservare de importanță fundamentală, și anume legea conservării energiei și legea conservării masei; aceste două legi apar acolo ca fiind complet independente una de cealaltă. În baza teoriei relativității aceste legi se contopesc într-un singur principiu“.

Deoarece factorul c^2 este atît de mare, nu ne așteptăm să fim în stare să detectăm variații ale masei în experiențele mecanice ordinare. O variație a masei de 1 g ar necesita o energie de $9 \cdot 10^{13}$ J. Dar dacă masa unei particule este foarte mică și îi putem comunica energii înalte, variația relativă a masei poate fi deja observabilă. Aceasta este adevărat în fenomenele nucleare, și acest domeniu este cel în care mecanica clasică dă faliment iar mecanica relativistă capătă cea mai izbitoare verificare.

Un exemplu frumos de schimb de energie între masă și alte forme este dat de fenomenul de anihilare a perechii și de generare de perechi. În acest fenomen un electron și un pozitron particule elementare de materie, care diferă doar prin semnul sarcinii lor electrice, se pot

combina și dispar literalmente. În locul lor găsim o radiație de energie înaltă, numită radiația γ , a cărei energie radiantă este exact egală cu masa de repaus plus energiile cinetice ale particulelor dispărute. Procesul este reversibil, astfel încât o materializare a masei din energia radiantă se poate produce atunci când o rază γ de energie suficient de înaltă, în condiții potrivite, dispăre; în locul ei apare o pereche electron-positron a cărei energie totală (energie de repaus + cinetică) este egală cu energia radiantă pierdută.

Exemplul 7. Să considerăm un exemplu cantitativ. În scara atomică a maseilor unitatea de masă este aproximativ de $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. În această scară masa protonului (nucleul unui atom de hidrogen) este 1,00731 și masa neutronului (o particulă neutră, unul din constituenții tuturor nucleelor cu excepția hidrogenului) este 1,00867. După cum se știe un deuterion (nucleul hidrogenului greu) constă dintr-un neutron și un proton; s-a găsit că masa deuterionului este 2,01360. Masa deuterionului este mai mică decât suma maselor neutronului și protonului cu 0,00238 unități atomice de masă. Discrepanța este echivalentă cu energia

$$E = \Delta mc^2 = 0,00238 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = \\ = 3,57 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,22 \cdot 10^6 \text{ eV}.$$

Atunci când un neutron și un proton se combină pentru a forma un deuterion, exact această cantitate de energie este eliberată sub forma radiației γ . Analog, se găsește că aceeași cantitate de energie trebuie transmisă deuterionului pentru a-l rupe într-un proton și un neutron. Această energie se numește de aceea *energie de legătură* a deuterionului.

Întrebări

1. Șoselele de munte foarte rar merg drept pe pantă ci șerpulesc treptat. Să se explice de ce?

2. Se efectuează vreun lucru mecanic asupra unui vehicul care se mișcă cu viteză absolută constantă de-a lungul unui drum orizontal drept?

3. Ce se întâmplă cu energia potențială pe care o pierde un lift atunci când coboară de la vârful clădirii până la parter?

4. În exemplul 2 (vezi fig. 8-5) am afirmat că viteza de la baza unei suprafețe nu depinde deloc de forma suprafeței. Mai este aceasta adevărat dacă există frecări?

5. Să se dea exemple fizice de echilibru instabil. De echilibru neutru (indiferent). De echilibru stabil.

6. Să se explice, folosind conceptele de lucru mecanic și de energie,

cum un copil poate mări amplitudinea oscilațiilor sale plecând din poziția de echilibru.

7. Două discuri sînt legate între ele printr-un resort elastic. Se poate apăsa discul superior în jos suficient astfel încît lăsat liber el să sară înapoi și să ridice și discul inferior de pe masă (vezi fig. 8-9)? Se conservă energia mecanică într-un astfel de caz?



Figura 8-9.

8. În cazul lucrului mecanic efectuat împotriva forței de frecare, cantitatea de căldură generată este independentă de viteză (sau de reperul inerțial al) observatorului. Adică, diferiți observatori vor constata o aceeași cantitate de energie mecanică transformată în căldură datorită frecării. Cum poate fi explicată această constatare, știind că astfel de observatori măsoară în general cantități diferite de lucru mecanic total efectuat și variații diferite ale energiei cinetice (vezi problema 19, capitolul 7)?

9. Un obiect este lăsat să cadă și se observă că el revine la o înălțime

egală cu o dată și jumătate din înălțimea inițială. Ce concluzii se pot trage din această observație?

10. Conducătorul unui automobil care se mișcă cu viteză v vede brusc un zid la o distanță d direct în fața sa. Pentru a evita ciocnirea, este mai bine pentru el să apese pe frâne sau să vireze brusc la o parte din fața zidului?

(Indicație: se va considera forța necesară în fiecare caz.)

11. Un resort este ținut comprimat, legând strâns capetele sale împreună. El este apoi cufundat într-un acid unde se dizolvă. Ce se întâmplă cu energia sa potențială înmagazinată?

Probleme

1. Să se arate că pentru o anumită viteză inițială v_0 , viteza v a unui proiectil va fi aceeași în toate punctele aflate la aceeași înălțime, indiferent de unghiul de lansare.

2. Firul din figura 8-10 are o lungime $l=1,5$ m. Când bila este lăsată

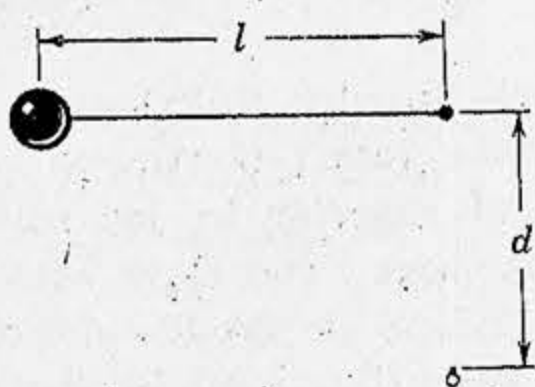


Figura 8-10.

liberă ea va descrie arcul punctat. Ce viteză va avea atunci când în mișcarea sa trece prin punctul inferior?

3. Cuiul din figura 8-10 este înfipt la o distanță d sub punctul de

suspensie. Să se arate că d trebuie să fie cel puțin $0,6 l$ pentru ca bila să poată descrie complet un cerc în jurul cuiului cu centrul în cui.

4. Să presupunem că firul din figura 8-10 este foarte elastic, de exemplu făcut din cauciuc, și că firul are lungimea neîntinsă l atunci când bila este lăsată liberă. (a) Să se explice de ce ne așteptăm ca bila să atingă un punct inferior situat la o distanță mai mare decât l sub punctul de suspensie. (b) Să se arate, folosind considerațiile dinamice și energetice, că dacă Δl este mic în comparație cu l , firul se va lungi cu o cantitate $\Delta l = 3 mg/k$, unde k este constanta elastică a firului. Observăm că cu cât k este mai mare, cu atât Δl este mai mic și cu atât aproximația $\Delta l \ll l$ este mai bună. (c) Să se arate, în aceste circumstanțe, că viteza bilei în punctul inferior este $v = \sqrt{2g(l - 3mg/2k)}$, mai mică decât ar fi pentru un fir neelastic ($k = \infty$). Să se dea o explicație fizică acestui rezultat folosind considerațiile energetice.

5. (a) O tijă rigidă ușoară de lungime l are un corp de masă m prins de capătul său, formînd un pendul simplu. Ea este așezată invers și apoi lăsată liber. Care va fi viteza v în punctul cel mai coborît și care va fi tensiunea T în tijă în acel moment? (b) Același pendul este acum împins într-o poziție orizontală și lăsat liber din repaus. Sub ce unghi față de verticală, tensiunea din tije va fi egală cu greutatea (în modul)?

6. Un pendul simplu de lungime l , bila avînd masa m , are o viteză v_0 atunci cînd firul face un unghi θ_0 cu verticala ($0 < \theta_0 < \pi/2$), ca în figura 8-11. Cu ajutorul lui g și a cantităților date

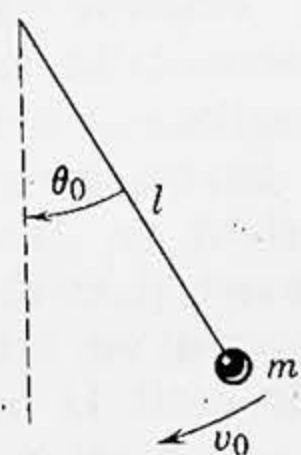


Figura 8-11.

mai sus să se determine: (a) energia mecanică totală a sistemului; (b) viteza v_1 a bilei atunci cînd ea se află în poziția sa cea mai coborîtă; (c) va-

loarea cea mai mică v_2 pe care v_0 o poate avea dacă firul urmează să atingă poziția orizontală în timpul mișcării; (d) viteza v_3 astfel încît dacă $v_0 > v_3$ pendulul nu va oscila ci va continua să se rotească pe un cerc vertical.

7. Un obiect este legat de un resort vertical și coborît încet către poziția sa de echilibru. Acesta alungește resortul cu o cantitate d . Dacă același obiect este legat de același resort vertical dar i se permite să cadă, cu ce distanță va alungi resortul?

8. Un bloc cu masa de 2,0 kg este lăsat să cadă de la o înălțime de 0,40 m pe un resort cu constanta elastică $k=1960$ N/m. Să se afle distanța maximă cu care va fi comprimat resortul (se neglijează frecările).

9. O rolă fără frecări de masă m pleacă din punctul A cu viteza v_0 , ca în figura 8-12. Se presupune că rola poate fi considerată drept punct material și că ea rămîne totdeauna pe traiectorie. (a) Care va fi viteza rolei în punctele B și C? (b) Ce decelerație constantă este necesară pentru a opri rola în punctul E dacă frînele se aplică în punctul D? (c) Presupunînd $v_0=0$; cît timp îi trebuie rolei să ajungă în punctul B?

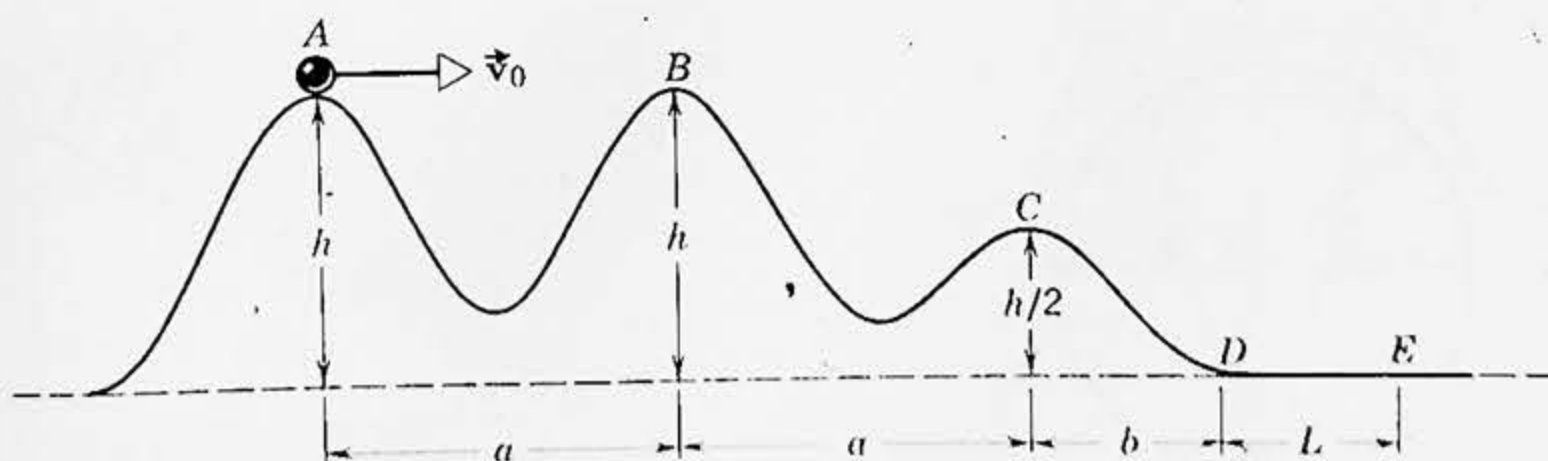


Figura 8-12.

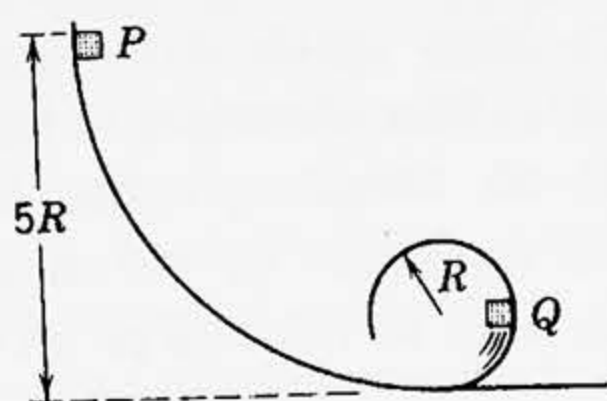


Figura 8-13.

10. Un mic bloc de masă m alunecă fără frecări de-a lungul unei traiectorii curbe ca în figura 8-13. (a) Dacă el pleacă din repaus din punctul P , care este forța rezultantă care acționează asupra lui în punctul Q ? (b) De la ce înălțime, deasupra bazei curbei, trebuie lăsat blocul pentru ca forța exercitată asupra lui de către curbă în vârful buclei să fie egală cu greutatea sa?

11. Particula m din figura 8-14 se mișcă pe un cerc vertical de rază R în interiorul curbei. Nu există frecări. Când m este în poziția sa cea mai coborâtă, viteza sa este v_0 . (a) Care este valoarea minimă v_m a lui v_0 pentru care m va parcurge complet cercul fără a pierde contactul cu curba? (b) Să presupunem că v_0 este egal cu $0,775 v_m$. Particula se va mișca în sus pe curbă pînă la un anumit punct P în care ea va pierde contactul cu curba și se va mișca pe o traiectorie arătată aproximativ printr-o linie punctată. Să se afle poziția unghiulară θ a punctului P .

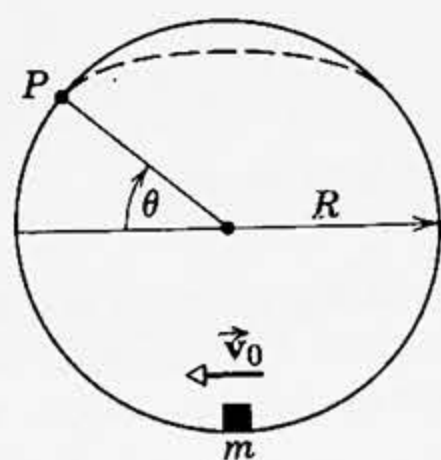


Figura 8-14.

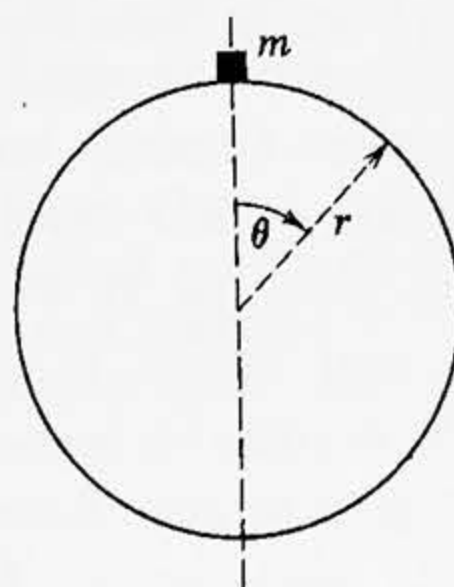


Figura 8-15.

12. O masă punctiformă m pornește din repaus și alunecă fără frecare în jos pe suprafața unei sfere solide de rază r ca în figura 8-15. Unghiurile sînt măsurate de la verticală, iar energia potențială de la punctul superior. Să se afle: (a) variația energiei potențiale a masei cu unghiul; (b) energia cinetică în funcție de unghi; (c) accelerația radială și accelerația tangențială în funcție de unghi; (d) unghiul pentru care masa se desprinde de sferă. (e) Dacă există frecare între masă și sferă, corpul se va desprinde pentru un unghi mai mare sau mai mic decît la punctul (d)?

13. Un resort ideal fără masă S poate fi comprimat cu $1,0$ m de o forță de 100 N. Acest resort este așezat la baza unui plan înclinat fără frecări care face un unghi $\theta = 30^\circ$ cu orizontala (vezi fig. 8-16). Un corp cu masa M de 10 kg este lăsat liber, din repaus, din vârful planului înclinat și

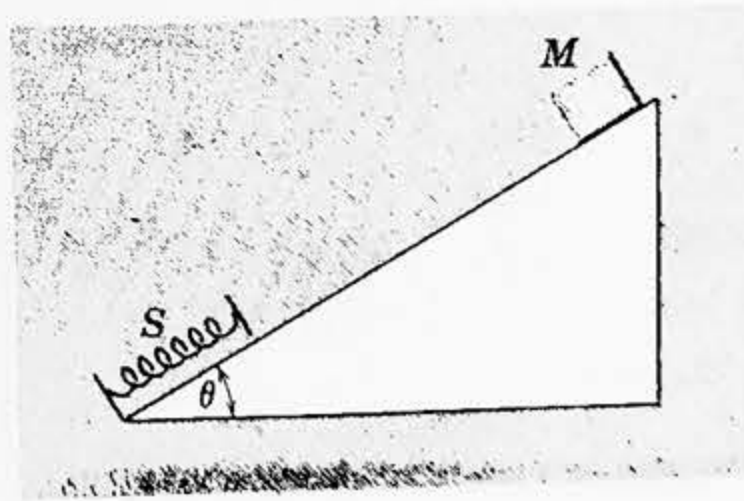


Figura 8-16.

ajunge în repaus imediat după comprimarea resortului cu 2,0 m. (a) Pe ce distanță va aluneca corpul înainte de a ajunge în repaus? (b) Care este viteza corpului imediat înainte de a atinge resortul?

14. Un corp care se mișcă de-a lungul axei x este supus unei forțe care îl respinge din origină, dată prin formula $F = -kx$. (a) Să se afle energia potențială $E_p(x)$ pentru această mișcare și să se scrie condiția de conservare a energiei. (b) Să se descrie mișcarea sistemului și să se arate că aceasta este un tip de mișcare la care ne-am aștepta în vecinătatea unui punct de echilibru instabil.

15. Dacă mărimea forței de atracție între o particulă de masă m_1 și o particulă de masă m_2 este dată de

$$F = k \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

unde k este o constantă și x distanța dintre particule, să se afle: (a) funcția energiei potențiale și (b) lucrul mecanic necesar pentru a mări distanța dintre particule de la $x = x_1$ până la $x = x_1 + d$.

16. Mărimea forței de atracție dintre nucleul încărcat pozitiv și electronul încărcat negativ din atomul de hidrogen este dată de

$$F = k \frac{e^2}{r^2}$$

unde e este sarcina electronului, k este o constantă și r este distanța dintre electron și nucleu. Se presupune că nucleul este fix. Electronul, care se mișcă inițial pe un cerc de rază R_1 în jurul nucleului, sare brusc pe o orbită circulară de rază mai mică R_2 . (a) Să se calculeze variația energiei cinetice a electronului folosind legea a doua a lui Newton. (b) Folosind relația dintre forță și energia potențială, să se calculeze variația energiei potențiale a atomului. (c) Să se afle cu cât a variat energia

totală a atomului în acest proces. (Energia totală descrește; această energie este eliberată sub formă de radiație.)

17. Energia potențială corespunzătoare unui anumit câmp bidimensional de forțe este dată de $E_p(x, y) = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2)$. (a) Să se deducă F_x și F_y și să se descrie vectorul forță în fiecare punct prin coordonatele sale cartezienne x și y . (b) Să se deducă F_r și F_θ și să se descrie vectorul forță în fiecare punct prin coordonatele polare r și θ ale punctului. (c) Puteți imagina un model fizic cu o astfel de forță?

18. Așa-numitul potențial Yukawa

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

dă o descriere destul de precisă a interacției dintre nucleoni (adică dintre neutroni și protoni — constituenții nucleului). Constanta r_0 este de aproximativ $1,5 \cdot 10^{-15}$ m, și constanta U_0 este de aproximativ 50 MeV. (a) Să se afle expresia corespunzătoare a forței de atracție. (b) Pentru a arăta raza de acțiune scurtă a acestei forțe, să se calculeze raportul dintre forța la $r = 2r_0$, $4r_0$ și $10r_0$ și forța la $r = r_0$.

19. O particulă α (nucleul atomului de heliu) într-un nucleu mare este legată printr-un potențial ca cel arătat în figura 8-17. (a) Să se construiască o funcție de x , care să aibă

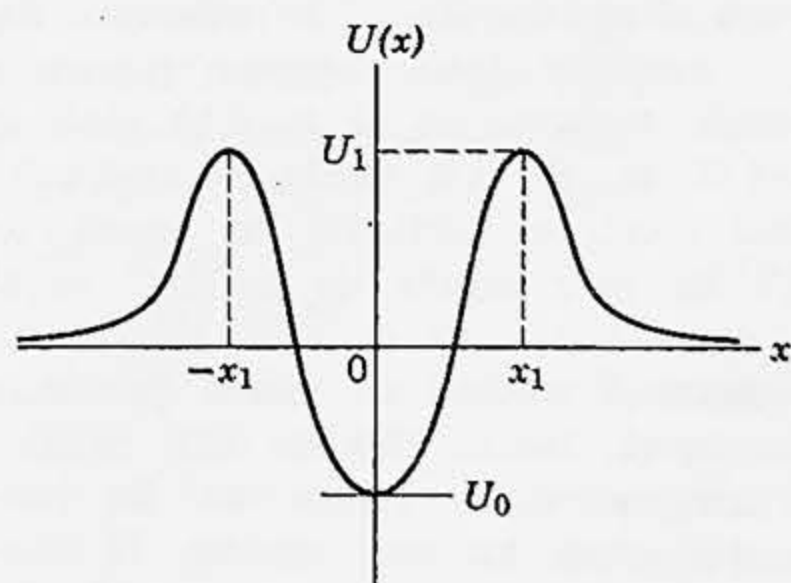


Figura 8-17.

această formă generală, cu o valoare minimă U_0 pentru $x=0$ și o valoare maximă U_1 pentru $x=x_1$ și $x=-x_1$.
 (b) Să se determine forța dintre particula α și nucleu în funcție de x .
 (c) Să se descrie mișcările posibile.

20. O particulă se mișcă pe o dreaptă într-o regiune în care energia sa potențială variază ca în figura 8-18.
 (a) Să se reprezinte, la aceeași scară pe abscisă, forța $F(x)$ care acționează asupra particulei. Să se indice pe grafic scara numerică aproximativă pentru $F(x)$. (b) Dacă particula are o energie totală constantă de 4,0 J, să se reprezinte graficul energiei sale cinetice. Să se indice scara numerică pe axa $E_c(x)$.

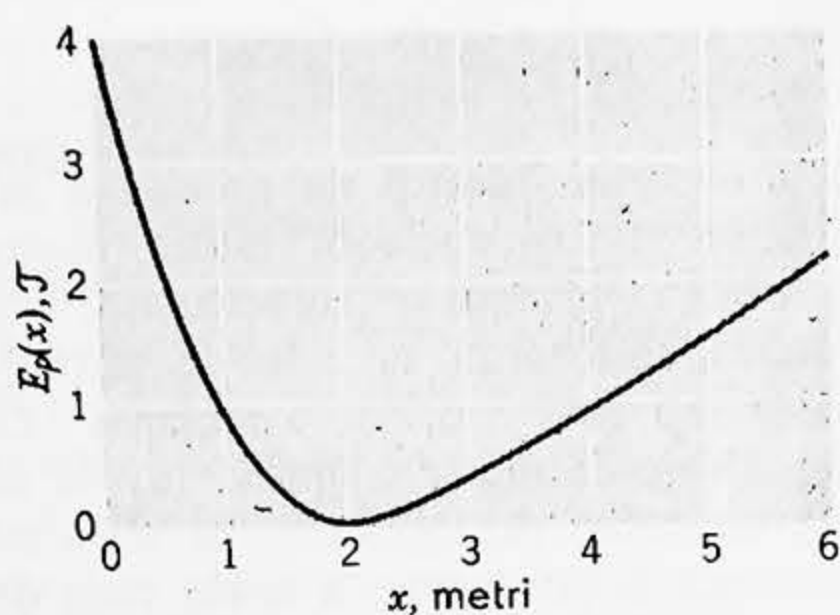


Figura 8-18.

21. Un anumit resort nu confirmă legea lui Hooke. Forța (în newtoni) pe care el o exercită atunci când este alungit cu o distanță x (în metri) are mărimea $52,8 x + 38,4 x^2$ în direcția opusă alungirii. (a) Să se calculeze lucrul mecanic total necesar pentru a întinde resortul de la $x=0,50$ până la $x=1,00$ m. (b) Un capăt al resortului fiind fixat, o particulă cu masa de 2,17 kg este legată de celălalt capăt al resortului când el este alungit cu o distanță $x=1,00$ m. Dacă particula este apoi lăsată liberă din repaus, să se calculeze viteza sa în momentul când resortul revine la configurația în care alungirea este $x=-0,50$ m. (c) Este forța exercitată de

resort conservativă sau neconservativă? Să se explice.

22. Să se arate că dacă există frecări într-un sistem mecanic, în alte privințe conservativ, viteza cu care este disipată energia mecanică este egală cu forța de frecare înmulțită cu viteza din acel moment, sau

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = -fv.$$

23. Un corp de masă m pornește din repaus în jos pe un plan de lungime l înclinat sub un unghi θ față de orizontală. (a) Să se ia coeficientul de frecare egal cu μ și să se afle viteza corpului la baza planului. (b) Pe ce distanță d va aluneca el orizontal pe o suprafață asemănătoare după atingerea bazei planului înclinat. Să se rezolve folosind metodele energetice și să se rezolve din nou folosind direct legile lui Newton.

24. O particulă alunecă de-a lungul unui drum cu capetele ridicate și o porțiune centrală plată, așa cum se arată în figura 8-19. Partea plată (orizontală) are o lungime $l=2,0$ m. Porțiunile curbate ale drumului sînt fără frecări. Pentru partea plată coeficientul de frecare cinetică este $\mu_c=0,20$. Particula este lăsată liberă în punctul A aflat la o înălțime $h=1,0$ m deasupra părții plate a traiectoriei. Unde va ajunge particula în repaus pînă la urmă?

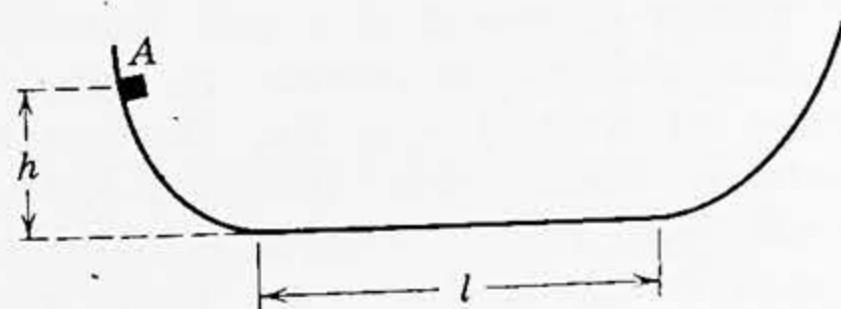


Figura 8-19.

25. Un bloc cu masa de 1,0 kg se ciocnește cu un resort orizontal fără greutate cu constanta elastică 2,0 N/m (fig. 8-20). Blocul comprimă resortul

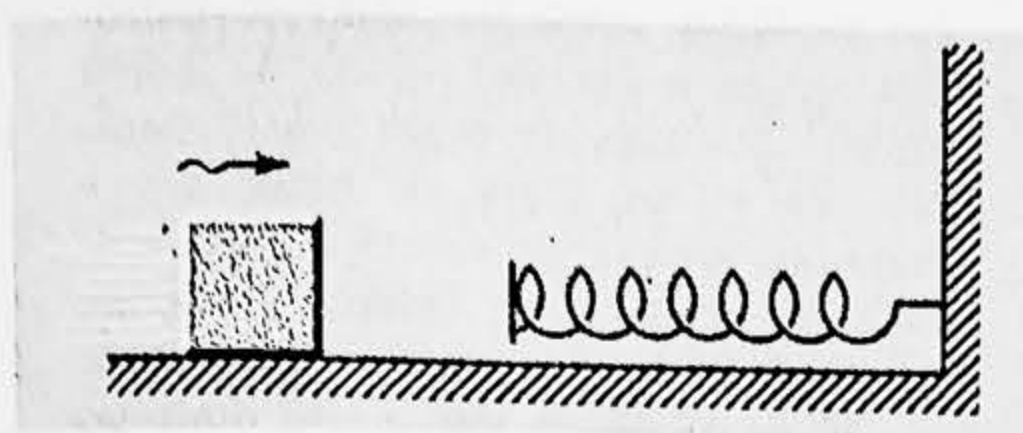


Figura 8-20.

cu 4,0 m de la poziția de repaus. Presupunând că coeficientul de frecare cinetică dintre bloc și suprafața orizontală este 0,25, care a fost viteza blocului în momentul ciocnirii?

26. Cablul unui lift de 2,00 t din figura 8-21 se rupe, când liftul este în repaus la primul etaj astfel încât podeaua liftului este la o distanță $d = 3,0$ m deasupra unui resort de amortizare a cărui constantă elastică este $k = 150$ kN/m. Un dispozitiv de siguranță strânge șinele de ghidare astfel încât o forță de frecare constantă de 5,00 kN se opune mișcării liftului. (a) Să se afle viteza liftului imediat înainte de a lovi resortul. (b) Să se afle distanța s cu care este comprimat resortul. (c) Să se afle distanța cu care liftul va „ricoși” înapoi de-a lungul șinelor. (d) Folosind principiul conservării energiei, să se afle aproximativ distanța totală pe care se va mișca liftul înainte de a ajunge în repaus.

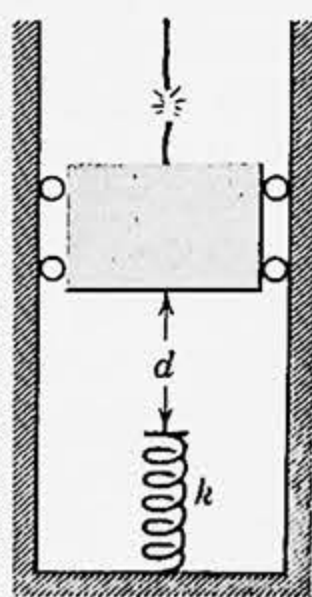


Figura 8-21.

27. Un corp cu masa de 18,1 kg este împins în sus de-a lungul unui plan înclinat, fără frecări, la 30° și de 3,05 m lungime, de o forță orizontală \vec{F} . (a) Dacă viteza la baza planului este de 0,61 m/s și în vârful planului este de 3,05 m/s, care este lucrul mecanic efectuat de \vec{F} . (b) Să presupunem că planul are frecări și că $\mu_0 = 0,15$ m. Ce lucru mecanic va efectua aceeași forță? Cât de departe pe plan va urca corpul?

28. Un lanț este ținut pe o masă fără frecări cu o cîlcime din lungimea sa atîrnată peste margine. Dacă lanțul are o lungime l și o masă m , ce lucru mecanic este necesar pentru a trage partea atîrnată a lanțului înapoi pe masă?

29. O scară rulantă circulă între două nivele pe o distanță de 7,6 m. Scara rulantă este de 12,2 m lungime și se mișcă pe această lungime cu 0,61 m/s. (a) Ce putere trebuie să dezvolte motorul său dacă trebuie să transporte pe minut maximum 100 persoane cu masa medie 73 kg? (b) Un om cu masa de 72,4 kg urcă pe scara rulantă în 10 s. Ce lucru mecanic efectuează motorul asupra lui? (c) Dacă acest om se întoarce înapoi în mijlocul scări și coboară pe scară astfel încât rămîne la același nivel în spațiu, efectuează motorul lucru mecanic asupra lui? Dacă este așa, ce putere dezvoltă el pentru aceasta? (d) Există vreun (alt?) mod în care omul poate merge de-a lungul scării rulante fără a consuma putere de la motor?

30. Să se arate că mc^2 are dimensiunile unei energii.

31. Un electron (masa de repaus $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) se mișcă cu o viteză 0,99 c. (a) Care este energia sa totală? (b) Să se afle raportul dintre energia cinetică newtoniană și energia cinetică relativistă în acest caz.

32. Care este viteza unui electron care are o energie cinetică de: (a) 100 keV, (b) 1,00 MeV?

33. (a) Masa de repaus a unui corp este de 0,010 kg. Care este masa sa când se mișcă cu o viteză de $3,0 \cdot 10^7$ m/s față de un observator? Cu $2,7 \cdot 10^8$ m/s? (b) Să se compare energia cinetică clasică și cea relativistă în aceste cazuri. (c) Care este masa dacă observatorul sau aparatul de măsură se află pe corp?

34. Statele Unite au consumat aproximativ 10^{15} Wh energie electrică în 1960. Câte kilograme de substanță ar trebui distruse complet pentru a obține această energie?

35. Se crede că Soarele obține energia sa printr-un proces de fuziune în care patru atomi de hidrogen se transformă într-un atom de heliu cu emisia de energie în diferite forme

ale radiației. Dacă un atom de hidrogen are o masă de repaus de 1,0081 unități atomice de masă (vezi exemplul 7) și un atom de heliu are o masă de repaus de 4,0039 unități atomice de masă, să se calculeze energia eliberată în fiecare proces de fuziune.

36. O diodă cu vid constă dintr-un anod cilindric care cuprinde un catod cilindric. Un electron cu o energie potențială relativă la anod de $4,8 \cdot 10^{-10}$ J părăsește suprafața catodului cu viteză inițială nulă. Se presupune că electronul nu se ciocnește cu nici o moleculă de aer și că forța gravitațională este neglijabilă. (a) Ce energie cinetică va avea electronul în momentul când lovește anodul? (b) Luând $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg pentru masa electronului, să se afle viteza sa finală. (c) Este justificată folosirea relațiilor clasice pentru energia cinetică și masă în locul celor relativiste?

Capitolul 9

Conservarea impulsului

9-1. Centrul de masă

Până acum am tratat obiectele ca și cum ar fi puncte materiale, care au masă dar n-au dimensiuni. În mișcarea de translație fiecare punct al corpului suferă aceeași deplasare ca oricare alt punct, astfel încât mișcarea unei particule reprezintă mișcarea întregului corp. Dar chiar dacă un corp se rotește sau vibrează în timpul mișcării, există un punct al corpului, numit *centru de masă*, care se mișcă în același mod în care s-ar mișca o singură particulă supusă la aceleași forțe externe. Figura 9-1 arată mișcarea parabolică simplă a centrului de masă al unei palete aruncate de un executant (actor jonglor) către altul; nici un alt punct al paletei nu se mișcă într-un mod atât de simplu. Observăm că dacă paleta s-ar mișca prin translație pură (vezi fig. 3-1) atunci *fiecare* punct al său ar suferi aceleași deplasări ca și centrul de masă din figura 9-1. Din aceste motive mișcarea centrului de masă al unui corp se numește mișcarea de translație a corpului.

Dacă sistemul cu care avem de-a face nu este corp rigid, poate fi găsit un centru de masă a cărui mișcare să poată fi de asemenea descrisă într-un mod relativ simplu, chiar dacă particulele care compun sistemul își pot schimba pozițiile lor una față de alta într-un mod relativ complicat în timpul desfășurării mișcării. În acest paragraf definim centrul de masă și arătăm cum se determină poziția sa. În paragraful următor discutăm proprietățile care îl fac util pentru descrierea mișcării obiectelor extinse sau a sistemelor de particule.

Să considerăm mai întâi cazul simplu al unui sistem format din două particule de mase m_1 și m_2 aflate la distanțele x_1 respectiv x_2 de originea O . Definim un punct C , centrul de masă al sistemului, situat la o distanță x_{cm} de la originea O , unde x_{cm} este definit de

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (9-1)$$

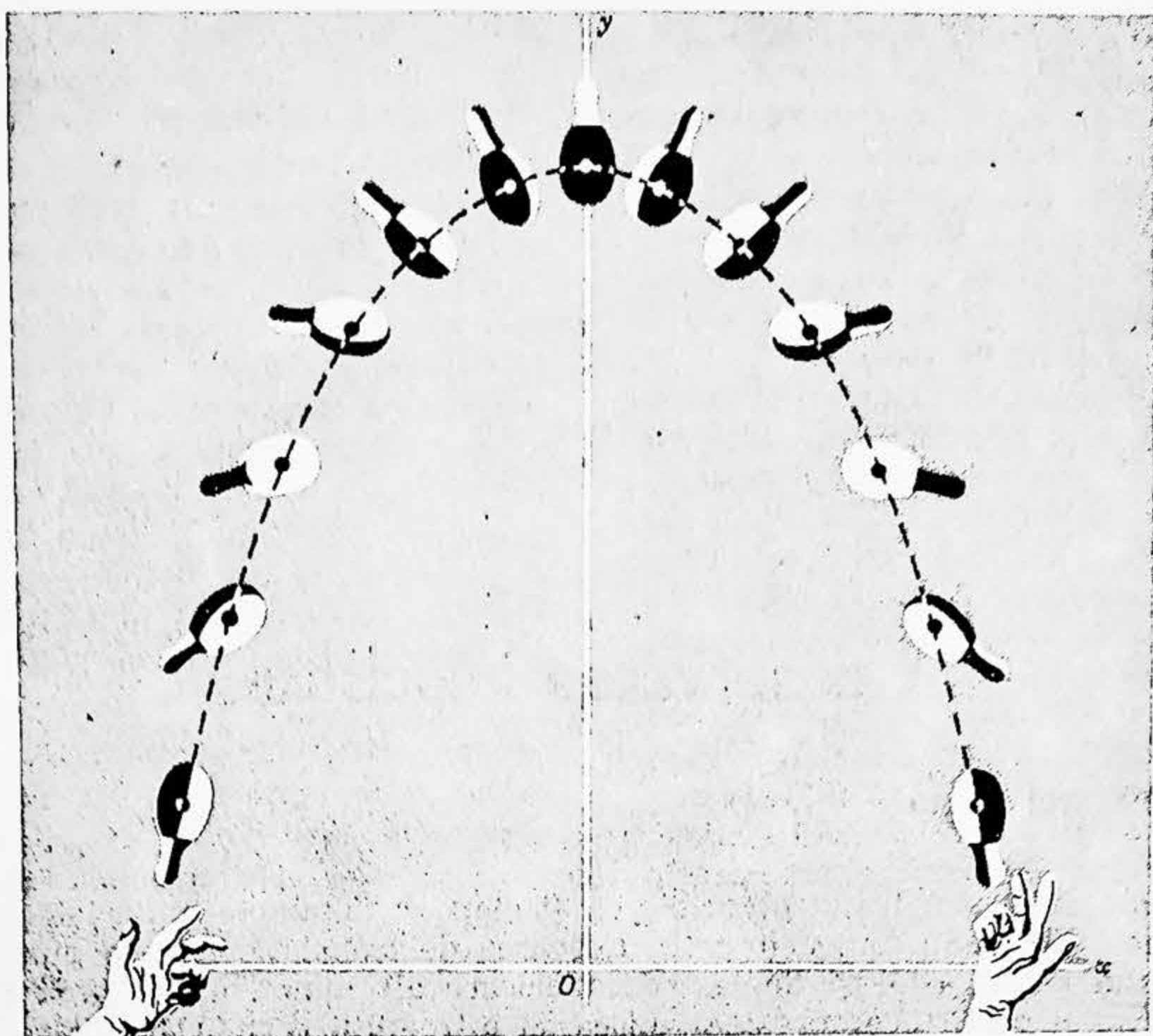


Figura 9-1. O paletă este aruncată de la un executant la altul. Chiar dacă ea se rotește și se învîrtește în jurul axei sale, așa cum se arată, există un punct pe axă, centrul de masă, care urmează o traiectorie parabolică simplă.

Acest punct (fig. 9-2) are proprietatea că produsul dintre masa totală a sistemului M ($=m_1+m_2$) și distanța acestui punct pînă la origine este egal cu suma produselor dintre masa fiecărei particule și distanța sa pînă la origine; adică

$$(m_1+m_2)x_{cm} = Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2.$$

În ecuația (9-1), x_{cm} poate fi privit ca o *medie ponderată* a lui x_1 și x_2 .

O analogie ne poate ajuta la fixarea acestei idei. Să presupunem de exemplu că avem două cutii cu cuie. Într-o cutie avem n_1 cuie avînd toate aceeași lungime l_1 ; în cealaltă cutie avem n_2 cuie toate avînd aceeași lungime l_2 . Vrem să obținem lungimea medie a cuielor. Dacă $n_1=n_2$, lungimea medie este pur și simplu $(l_1+l_2)/2$. Dar dacă $n_1 \neq n_2$, trebuie să ținem seama de faptul că există mai multe cuie de o lungime decît de cealaltă, luînd un factor de „ponderare” pentru fiecare lungime. Pentru l_1 acest factor este $n_1/(n_1+n_2)$, iar pentru l_2 acest factor este

$n_2/(n_1+n_2)$, fracțiunea din numărul total de cuie din fiecare cutie. Atunci lungimea medie ponderată este

$$\bar{l} = \frac{n_1}{n_1+n_2} l_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} l_2$$

sau

$$\bar{l} = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{n_1 + n_2}.$$

Centrul de masă, definit în ecuația (9-1), este atunci o deplasare medie ponderată în care factorul de „ponderare” pentru fiecare particulă, este fracțiunea din masa totală pe care o are fiecare particulă.

Dacă avem n particule, m_1, m_2, \dots, m_n , de-a lungul unei linii drepte, atunci prin definiție centrul de masă al acestor particule relativ la o anumită origine este

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad (9-2)$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sînt distanțele maselor pînă la originea față de care se măsoară x_{cm} . Simbolul Σ reprezintă o operație de sumare, în acest caz asupra tuturor celor n particule. Suma

$$\sum m_i = M$$

este masa totală a sistemului. Putem atunci retranscrie ecuația (9-2) sub forma

$$M x_{cm} = \sum m_i x_i. \quad (9-2, a)$$

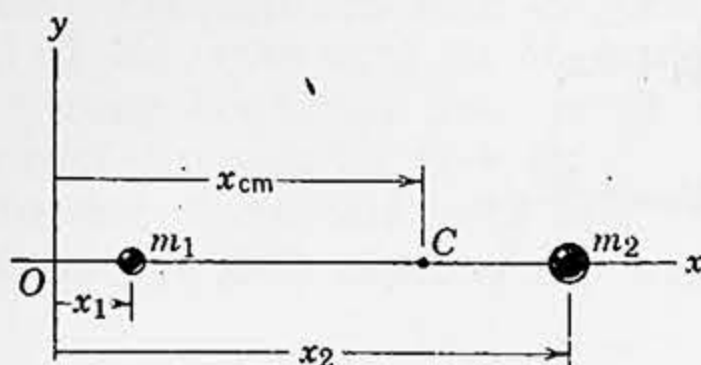


Figura 9-2. Centrul de masă a două corpuri de mase m_1 și m_2 se află pe linia care unește pe m_1 cu m_2 în C la o distanță x_{cm} de origine.

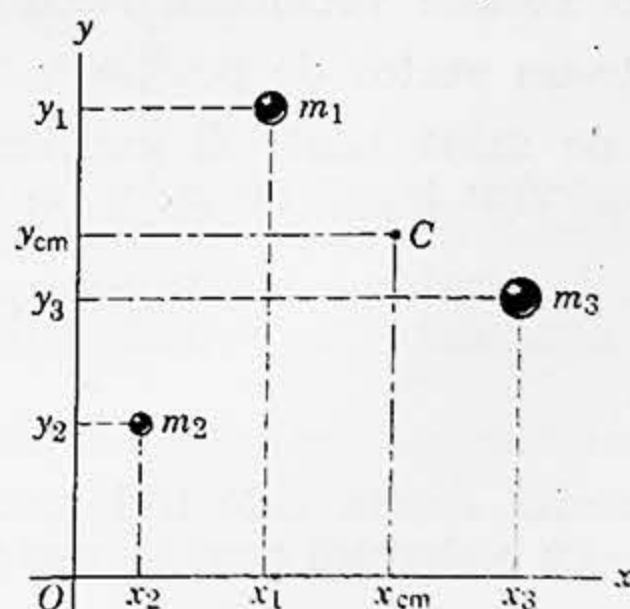


Figura 9-3. Centrul de masă a trei corpuri de mase, m_1, m_2 și m_3 se află într-un punct C de coordonate x_{cm}, y_{cm} . C se află în același plan cu triunghiul format de cele trei corpuri.

Să presupunem acum că avem trei particule *nesituate pe o linie dreaptă*; ele se vor afla într-un plan, ca în figura 9-3. Centrul de masă C este definit și localizat prin coordonatele x_{cm} și y_{cm} , unde

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (9-3)$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

în care x_1, y_1 sînt coordonatele particulei de masă m_1 ; x_2, y_2 sînt coordonatele lui m_2 și x_3, y_3 sînt ale lui m_3 . Coordonatele x_{cm}, y_{cm} ale centrului de masă sînt măsurate de la aceeași origine arbitrară.

Pentru un număr mare de particule situate într-un plan, centrul de masă este în punctul x_{cm}, y_{cm} , unde

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i$$

și

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, \quad (9-4)$$

în care $M (= \sum m_i)$ este masa totală a sistemului.

Pentru un număr mare de particule situate nu neapărat într-un plan ci *distribuite în spațiu*, centrul de masă se află în punctul x_{cm}, y_{cm}, z_{cm} , unde

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, \\ z_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i. \quad (9-5, a)$$

În notație vectorială fiecare particulă din sistem poate fi localizată printr-un vector de poziție \vec{r}_i într-un anumit sistem de referință și centrul de masă poate fi localizat printr-un vector de poziție \vec{r}_{cm} . Acești vectori sînt legați de x_i, y_i, z_i și de x_{cm}, y_{cm}, z_{cm} din ecuația (9-5, a) prin

$$\vec{r}_i = i x_i + j y_i + k z_i$$

și

$$\vec{r}_{cm} = i x_{cm} + j y_{cm} + k z_{cm}.$$

În modul acesta, cele trei ecuații scalare din ecuația (9-5, a) pot fi înlocuite cu o singură ecuație vectorială

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \quad (9-5, b)$$

în care suma este o sumă vectorială. Studentul poate verifica că ecuația (9-5, b) este adevărată, substituind expresiile date mai sus pentru \vec{r}_i și \vec{r}_{cm} în ecuația (9-5, b). Observăm simplitatea expresiei obținută folo-

sind vectori. Ecuația (9-5, b) arată că dacă originea sistemului nostru de referință se află în centrul de masă (ceea ce înseamnă că $\vec{r}_{cm}=0$), atunci $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ pentru sistem.

Ecuațiile (9-5) reprezintă cazul cel mai general pentru o colecție de particule. Ecuațiile (9-1)—(9-4) sînt cazuri particulare ale celei generale. Poziția centrului de masă este independentă de sistemul de referință folosit pentru a-l localiza (vezi problema 1). *Centrul de masă al unui sistem de particule depinde numai de masele particulelor și de pozițiile particulelor una față de cealaltă.*

Un corp rigid, cum este o riglă, poate fi imaginat ca un sistem de particule strîns așezate între ele. Prin urmare el are de asemenea un centru de masă. Numărul particulelor (de exemplu atomi) din corp este atît de mare și distanța dintre particulele vecine atît de mică, încît putem trata corpul ca și cum ar avea o distribuție continuă a masei. Pentru a obține expresia coordonatelor centrului de masă al unui corp continuu, să subdividem corpul în n elemente mici de masă Δm_i localizate aproximativ în punctele x_i, y_i, z_i . Coordonatele centrului de masă sînt atunci date aproximativ de

$$x_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}.$$

Să dividem acum mai departe elementele de masă astfel încît numărul elementelor n să tindă la infinit. Punctele x_i, y_i, z_i vor localiza elementele de masă mai precis cînd n crește și le vor localiza exact cînd n devine infinit. Corpul continuu este atunci subdivizat într-un număr infinit de elemente de masă infinitezimale. Coordonatele centrului de masă pot fi acum date exact astfel

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm, \\ y_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm, \\ z_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm. \end{aligned} \quad (9-6, a)$$

În aceste expresii dm este elementul diferențial de masă din punctul x, y, z și $\int dm$ este egal cu M , unde M este masa totală a obiectului. Pentru un corp continuu însumarea din ecuația (9-5, a) este înlocuită prin integrarea din ecuația (9-6, a).

Expresia vectorială care este echivalentă cu cele trei expresii scalare din ecuația (9-7, a) este

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm. \quad (9-6, b)$$

Ca și mai înainte, însumarea din ecuația (9-5, b) a fost înlocuită printr-o integrare. Vedem din nou că dacă originea sistemului nostru de referință este în centrul de masă (adică dacă $\vec{r}_{cm}=0$), atunci $\int \vec{r} dm = 0$ pentru corp.

Această integrală și suma corespunzătoare $\sum m_i \vec{r}_i$ din ecuația (9-5, b) se numește *momentul de ordinul I al masei pentru sistemul considerat* (momentul de ordinul I).

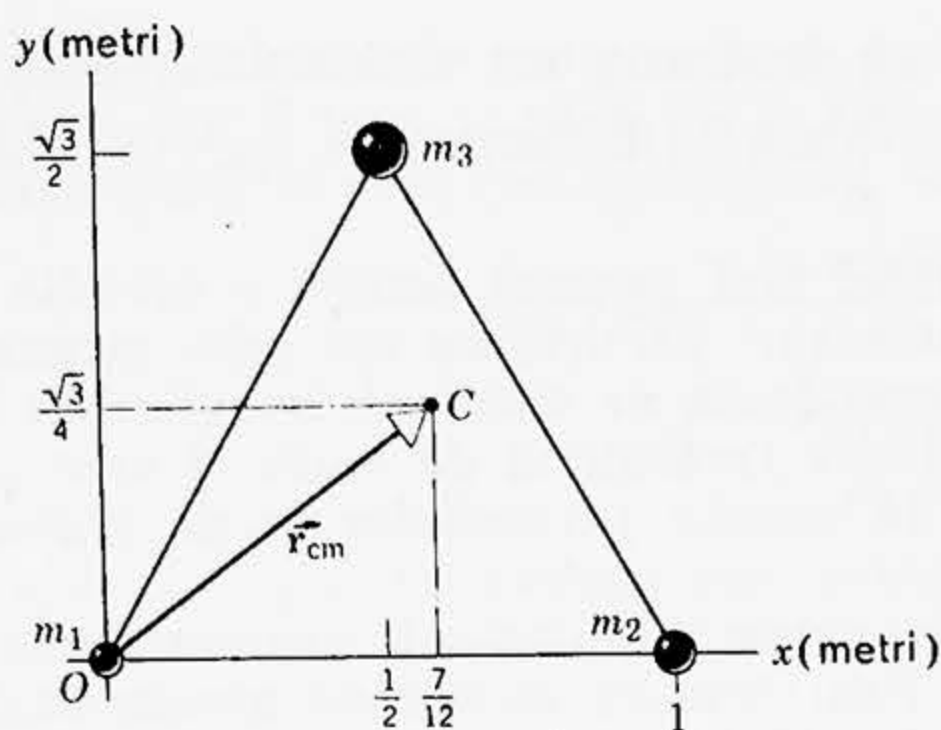


Figura 9-4. Exemplul 1. Aflarea centrului de masă C a trei corpuri cu mase inegale care formează un triunghi echilateral.

Adesea avem de a face cu obiecte omogene care au un punct, o dreaptă sau un plan de simetrie. Atunci centrul de masă se va găsi în acel punct, pe acea dreaptă sau în planul de simetrie. De exemplu, centrul de masă al unei sfere omogene (care are un punct de simetrie) se va afla în centrul sferei. Centrul de masă al unui con (care are o axă de simetrie) se va afla pe această axă a conului etc. Putem înțelege aceasta deoarece, în virtutea simetriei, momentul de ordinul I al masei ($\int \vec{r} dm$) este zero pentru centrul unei sfere, undeva de-a lungul axei conului etc. Din ecuația (9-6, b) rezultă că $\vec{r}_{cm} = 0$ pentru astfel de puncte, ceea ce înseamnă că centrul de masă este localizat în aceste puncte.

Exemplul 1. Să se afle poziția centrului de masă a trei particule de mase $m_1 = 1,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg și $m_3 = 3,0$ kg situate în colțurile unui triunghi echilateral cu latura de 1,0 m.

Alegem axa x de-a lungul unei laturi a triunghiului așa cum se arată în figura 9-4. Atunci

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 0 + 2,0 \text{ kg} \cdot 1,0 \text{ m} + 3,0 \text{ kg} \cdot \frac{1}{2} \text{ m}}{(1,0 + 2,0 + 3,0) \text{ kg}} = \frac{7}{12} \text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 0 + 2,0 \text{ kg} \cdot 0 + 3,0 \text{ kg} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m})}{(1,0 + 2,0 + 3,0) \text{ kg}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

Centrul de masă C este arătat în figură. De ce nu se află el în centrul geometric al triunghiului?

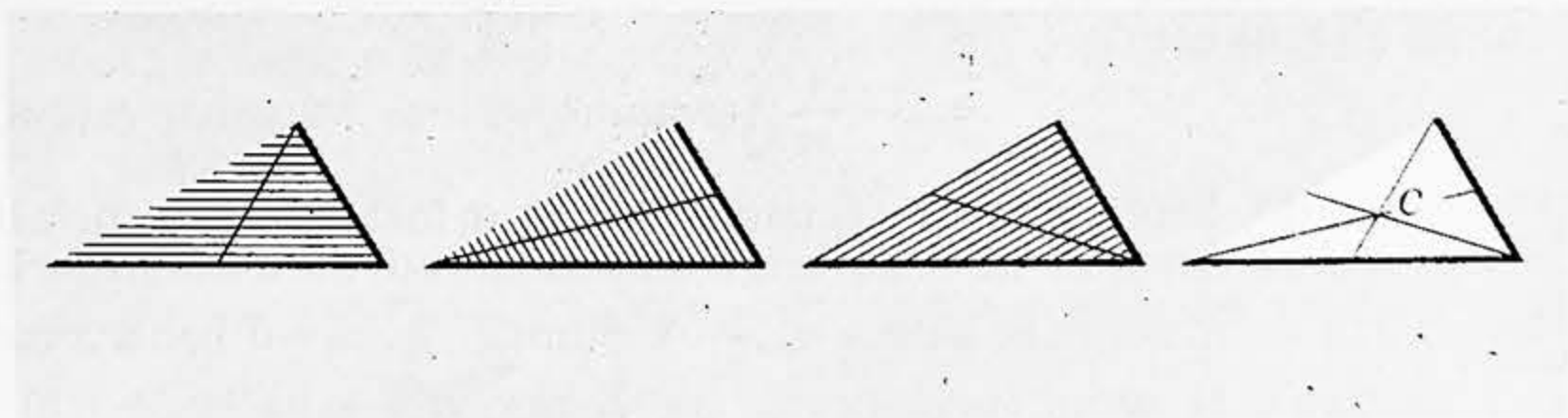


Figura 9-5. Exemplul 2. Aflarea centrului de masă C al unei plăci triunghiulare.

Exemplul 2. Să se afle centrul de masă al plăcii triunghiulare din figura 9-5.

Dacă un corp poate fi divizat în părți astfel încât centrul de masă al fiecărei părți este cunoscut, centrul de masă al corpului poate fi de obicei găsit foarte simplu. Placa triunghiulară poate fi divizată în benzi înguste, paralele cu o latură. Centrul de masă al fiecărei benzi se află pe linia care unește mijlocul acelei laturi cu vârful opus. Dar putem divide triunghiul în trei moduri diferite, folosind acest proces pentru fiecare din cele trei laturi. Prin urmare, centrul de masă se află la intersecția celor trei linii care unesc mijlocul fiecărei laturi cu vârful opus (mediane). Acesta este singurul punct comun celor trei linii (mediane).

9-2. Mișcarea centrului de masă

Acum putem discuta importanța fizică a conceptului de centru de masă. Să considerăm mișcarea unui grup de particule ale căror mase sînt m_1, m_2, \dots, m_n și a căror masă totală este M . Vom presupune deocamdată că nici un fel de masă nu intră și nu părăsește sistemul, astfel încît masa totală M a sistemului rămîne constantă în timp. În secțiunea 9-7 vom considera sisteme în care M nu este constant; un exemplu familiar este o rachetă, care expulzează gaze fierbinți în timpul arderii combustibilului său, reducîndu-și astfel masa sa.

Din ecuația (9-5, b) avem, pentru sistemul nostru fix de particule

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n,$$

unde \vec{r}_{cm} este vectorul de poziție care localizează centrul de masă într-un sistem de referință particular. Derivînd această ecuație în raport cu timpul, obținem:

$$M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

sau

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n, \quad (9-7)$$

unde \vec{v}_1 este viteza primei particule etc. și $d\vec{r}_{cm}/dt (= \vec{v}_{cm})$ este viteza centrului de masă.

Derivînd ecuația (9-7) în raport cu timpul, obținem

$$\begin{aligned} M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} &= m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \\ &= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_n\vec{a}_n, \end{aligned} \quad (9-8)$$

unde \vec{a}_1 este accelerația primei particule etc., și $d\vec{v}_{cm}/dt (= \vec{a}_{cm})$ este accelerația centrului de masă al sistemului. Acum, din legea a doua a lui

Newton, forța \vec{F}_1 care acționează asupra primei particule este dată de $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$. Analog, $\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$ etc. Putem atunci scrie ecuația (9-8) astfel

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (9-9)$$

Prin urmare masa totală a grupului de particule înmulțită cu accelerația centrului său de masă este egală cu suma vectorială a tuturor forțelor care acționează asupra grupului de particule.

Printre aceste forțe unele vor fi forțe *interne* exercitate de particule una asupra celeilalte. Dar din legea a treia a lui Newton, aceste forțe interne vor apărea în perechi, egale în modul și de sens opus, astfel încât ele nu contribuie cu nimic la sumă. Prin urmare forțele interne pot fi excluse din problemă. Suma din membrul drept al ecuației (9-9) reprezintă suma numai a forțelor *externe* care acționează asupra tuturor particulelor. Putem atunci retranscrie ecuația (9-9) mai simplu:

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}. \quad (9-10)$$

Aceasta afirmă că centrul de masă al unui sistem de particule se mișcă ca și cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în centrul de masă și toate forțele externe ar fi aplicate în acel punct.

Observăm că obținem acest rezultat simplu fără a specifica natura sistemului de particule. Sistemul poate fi un corp rigid în care particulele se află în poziții fixe una față de alta sau poate fi o colecție de particule în care pot avea loc tot felul de mișcări interne. Oricare ar fi sistemul și oricum s-ar mișca părțile sale individuale, centrul său de masă se mișcă conform ecuației (9-10).

Prin urmare în loc de a trata corpurile ca particule individuale așa cum am făcut în capitolele precedente, le putem trata ca mulțimi de particule. Putem atunci obține mișcarea de translație a corpului, adică mișcarea centrului său de masă, presupunând că întreaga masă a corpului este concentrată în centrul său de masă și toate forțele externe sînt aplicate în acel punct¹. Aceasta este de fapt procedeul pe care l-am urmat în mod implicit în toate diagramele forțelor și în rezolvarea problemelor.

În afară de faptul că am justificat și am făcut mai concret procedeul nostru anterior, am găsit acum modul cum trebuie să descriem mișcarea de translație a unui sistem de particule și modul cum trebuie să descriem mișcarea de *translație* a unui corp care se poate în același timp roti. În acest capitol și în cel următor aplicăm acest rezultat la mișcarea liniară a unui sistem de particule. În capitolele următoare vom vedea cum simplifică el analiza mișcării de rotație.

Exemplul 3. Să considerăm trei particule de mase diferite asupra cărora acționează forțe externe, așa cum se arată în figura 9-6. Să se afle accelerația centrului de masă al sistemului.

¹ Dacă forța externă este gravitația, ea acționează în centrul de greutate al corpului. În fiecare caz pe care l-am considerat, centrul de greutate coincide cu centrul de masă, acesta din urmă fiind un concept mai general. Condițiile în care aceste puncte sînt diferite pentru un corp vor fi discutate în capitolul 14.

Mai întâi aflăm coordonatele centrului de masă. Din ecuația (9-3), avem

$$x_{cm} = \frac{8,0 \cdot 4 + 4,0 \cdot (-2) + 4,0 \cdot 1}{16} \text{ m} = 1,8 \text{ m},$$

$$y_{cm} = \frac{8,0 \cdot 1 + 4,0 \cdot 2 + 4,0 \cdot (-3)}{16} \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

Acestea sînt coordonatele lui C din figura 9-6.

Pentru a obține accelerația centrului de masă, determinăm întâi forța externă rezultantă care acționează asupra sistemului format din cele trei particule. Componenta pe direcția x a acestei forțe este

$$F_x = 14 \text{ N} - 6,0 \text{ N} - 8,0 \text{ N}$$

și componenta pe direcția y este

$$F_y = 16 \text{ N}.$$

Prin urmare forța externă rezultantă are mărimea

$$F = \sqrt{(8,0)^2 + 16^2} \text{ N} = 18 \text{ N}$$

și face un unghi θ cu axa x , dat de

$$\text{tg } \theta = \frac{16 \text{ N}}{8,0 \text{ N}} = 2,0 \text{ sau } \theta = 63^\circ.$$

Atunci din ecuația (9-10) accelerația centrului de masă este

$$a_{cm} = \frac{F}{M} = \frac{18 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,1 \text{ m/s}^2,$$

și face un unghi de 63° cu axa x .

Deși cele trei particule își vor schimba pozițiile lor relative în decursul timpului, centrul de masă se va mișca, după cum s-a arătat, cu această accelerație constantă.

9-3. Impulsul unei particule

Impulsul unei singure particule este un vector \vec{p} definit ca fiind egal cu produsul dintre masa sa m și viteza sa \vec{v} , adică

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (9-11)$$

Impulsul, fiind produsul unui scalar cu un vector, este el însuși un vector. Deoarece el este proporțional cu \vec{v} , impulsul \vec{p} al unei particule oarecari depinde de sistemul de referință al observatorului. Trebuie să specificăm totdeauna acest reper.

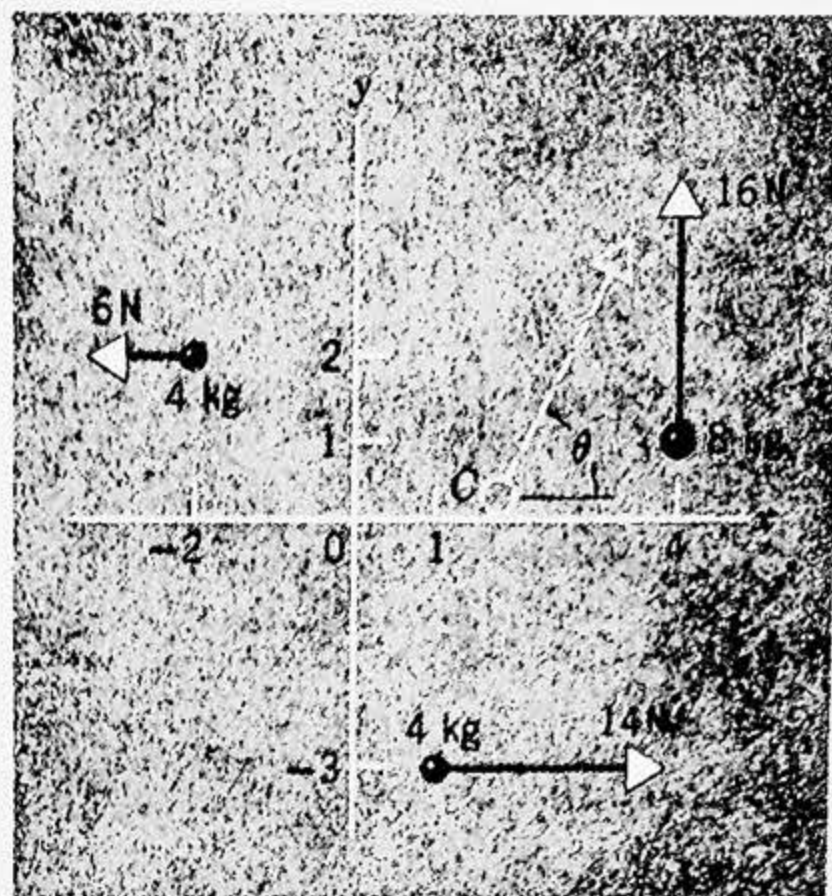


Figura 9-6. Exemplul 3. Aflarea mișcării centrului de masă a trei corpuri, fiecare supus la o forță diferită. Toate forțele se află în planul definit de particule. Distanțele indicate de-a lungul axelor sînt date în metri.

Newton în celebra sa carte *Principia* a exprimat legea a doua a mișcării cu ajutorul impulsului (pe care el l-a numit „cantitate de mișcare“). Exprimată în terminologia modernă legea a doua a lui Newton afirmă că: viteza de variație a impulsului unui corp este proporțională cu forța rezultantă care acționează asupra corpului și are direcția acelei forțe. În formă simbolică aceasta devine

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9-12)$$

Dacă sistemul nostru este format dintr-o singură particulă de masă (constantă) m , această formulare a legii a doua este echivalentă cu forma $\vec{F} = m\vec{a}$, pe care am folosit-o pînă acum, adică, dacă m este constant, rezultă

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Relațiile $\vec{F} = m\vec{a}$ și $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ pentru particule individuale sînt complet echivalente în mecanica clasică.

În teoria relativității legea a doua pentru o particulă individuală sub forma $\vec{F} = m\vec{a}$ nu este valabilă. Se constată însă că legea a doua a lui Newton sub forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ este totuși o lege valabilă dacă impulsul \vec{p} al unei particule individuale este definit nu prin $m_0\vec{v}$ ci prin

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9-13)$$

Acest rezultat ne sugerează o nouă definiție a masei (compară ecuațiile 9-11 și 9-13)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

astfel încît impulsul poate fi iarăși scris sub forma $\vec{p} = m\vec{v}$; vezi paragraful 8-9. În această ecuație v este viteza particulei, c este viteza luminii și m_0 este „masa de repaus“ a corpului (masa sa cînd $v=0$). Din această definiție trebuie să ne așteptăm ca masa unei particule să crească cu viteza sa. În sistemele atomice și nucleare particulele pot cîștiga viteze enorme, comparabile cu viteza luminii. Această concepție poate fi confruntată direct cu o verificare pentru astfel de sisteme, deoarece creșterea masei peste masa de repaus pentru astfel de particule este suficient de mare pentru a fi măsurată precis. Rezultatele tuturor acestor experiențe arată că acest efect este real și este dat exact de ecuația de mai sus. (Vezi de exemplu fig. 8-8.)

9-4. Impulsul unui sistem de particule

Să presupunem că în locul unei singure particule avem un sistem de n particule cu masele m_1, m_2 etc. Vom continua să presupunem, așa cum am făcut în paragraful 9-2, că nici un fel de masă nu intră și nu părăsește sistemul, astfel încît masa $M (= \sum m_i)$ a sistemului rămîne

constantă în timp. Particulele pot interacționa unele cu altele și de asemenea pot acționa asupra lor forțe externe. Fiecare particulă va avea o viteză și un impuls. Particula 1 de masă m_1 și viteză \vec{v}_1 va avea un impuls $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ de exemplu. Sistemul ca un întreg va avea un impuls total \vec{P} într-un anumit sistem de referință, definit pur și simplu ca suma vectorială a impulsurilor particulelor individuale în același reper, adică

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n.\end{aligned}\quad (9-14)$$

Dacă comparăm această relație cu ecuația (9-7) vedem imediat că

$$\vec{P} = M \vec{v}_{cm}, \quad (9-15)$$

care este o definiție echivalentă a impulsului unui sistem de particule. În cuvinte ecuația (9-15) afirmă că: *impulsul total al unui sistem de particule este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului și viteza centrului său de masă.*

Am văzut (ecuația 9-10) că legea a doua a lui Newton pentru un sistem de particule poate fi scrisă astfel

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm} \quad (9-10)$$

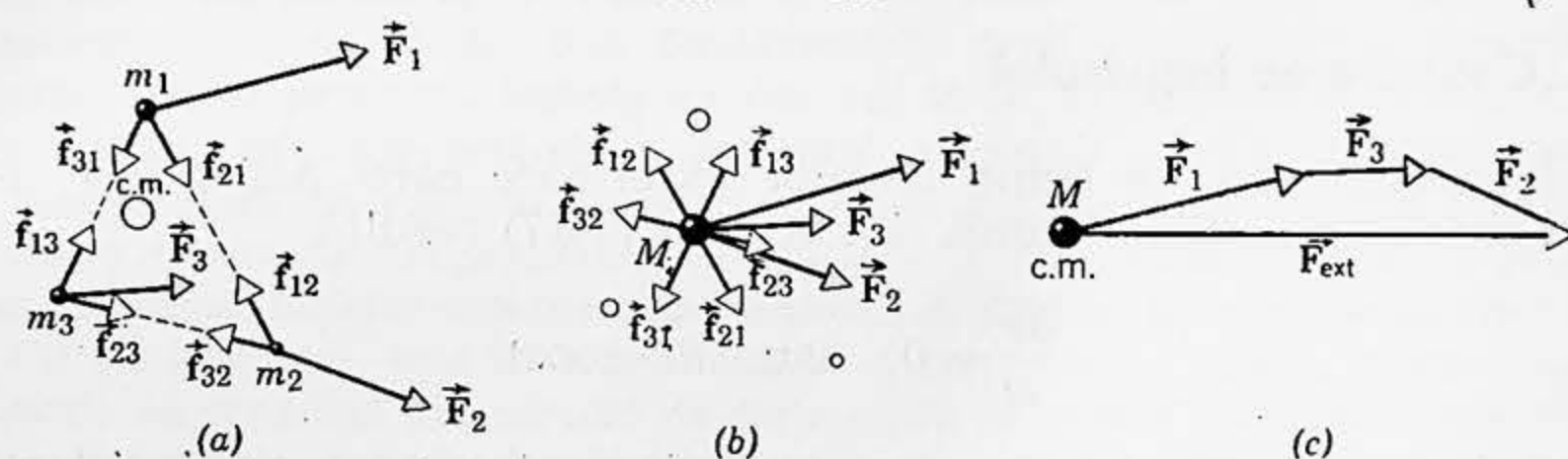


Figura 9-7. Legătura dintre forțele care acționează asupra unui sistem format din trei corpuri de mase m_1 , m_2 și m_3 . (a) Toate forțele care acționează asupra fiecărui corp sînt arătate aici, precum și poziția centrului de masă. Asupra lui m_1 acționează forțele \vec{f}_{21} și \vec{f}_{31} exercitate de m_2 respectiv m_3 , precum și \vec{F}_1 o forță exercitată de un agent exterior. Forțe asemănătoare acționează asupra lui m_2 și m_3 . Conform legii a treia a lui Newton însă, forțele interne \vec{f}_{31} și \vec{f}_{13} trebuie să fie egale în modul și opuse ca sens și trebuie să fie dirijate amîndouă de-a lungul liniei care unește centrele lui m_1 și m_3 . Afirmatii analoge sînt valabile pentru celelalte două perechi de forțe acțiune-reacțiune. (b) Dacă ne interesează numai mișcarea sistemului ca un întreg, putem considera că toate forțele acționează asupra unui corp de masă $M = m_1 + m_2 + m_3$, situat în centrul de masă. Datorită faptului că în fiecare pereche de forțe interne acțiunea și reacțiunea sînt egale în modul și opuse ca sens, după cum am afirmat, ele se reduc două cite două în mod identic rămîinind numai cele trei forțe externe \vec{F}_1 , \vec{F}_2 și \vec{F}_3 . Acestea sînt compuse grafic în (c) pentru a da o forță rezultantă \vec{F}_{ext} care acționează în centrul de masă al sistemului.

în care \vec{F}_{ext} este suma vectorială a tuturor forțelor *externe* care acționează asupra sistemului; reamintim că forțele interne care acționează între particule se reduc două câte două în virtutea legii a treia a lui Newton (vezi fig. 9-7). Dacă derivăm ecuația (9-15) în raport cu timpul, obținem, pentru o masă M presupusă constantă,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}. \quad (9-16)$$

Compararea ecuațiilor (9-10) și (9-16) ne permite să scriem legea a doua a lui Newton pentru un sistem de particule sub forma

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (9-17)$$

Această ecuație este o generalizare a ecuației pentru o particulă individuală $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (ecuația 9-12) la un sistem de mai multe particule, cu condiția ca nici un fel de masă să nu intre și să nu părăsească sistemul. Ecuația (9-17) se reduce la ecuația (9-12) în cazul particular al unei singure particule, când există numai forțe externe care acționează asupra unui sistem format dintr-o singură particulă.

9-5. Conservarea impulsului

Să presupunem că suma forțelor exterioare care acționează asupra unui sistem este nulă. Atunci, din ecuația (9-17) rezultă

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{sau} \quad \vec{P} = \text{const.}$$

Dacă forța externă rezultantă care acționează asupra unui sistem este nulă, vectorul impuls total al sistemului rămâne constant. Acest rezultat simplu, dar foarte general, se numește *principiul conservării impulsului*. Vom vedea că el se aplică în multe situații fizice importante.

Principiul conservării impulsului este cel de-al doilea principiu mare de conservare pe care l-am întâlnit până acum, primul fiind principiul conservării energiei. Mai târziu vom întâlni mai multe alte principii de conservare, prin care conservarea sarcinii electrice și a momentului cinetic. Principiile de conservare au importanță teoretică și practică în fizică deoarece ele sînt simple și universale. Ele toate se formulează sub forma: cînd sistemul evoluează există un aspect al sistemului care rămîne neschimbat. Diferiții observatori, fiecare în propriul său sistem de referință, vor fi toți de acord, dacă ei urmăresc același sistem variabil, că legile de conservare se aplică sistemului. De exemplu, în cazul conservării impulsului, observatorii din diferite repere vor atribui valori diferite lui \vec{P} , adică impulsului sistemului, dar fiecare va fi de acord (presupunînd $\vec{F}_{ext} = 0$) că valoarea proprie a lui \vec{P} rămîne neschimbată atunci cînd particulele care compun sistemul se mișcă.

Impulsul total al unui sistem poate fi schimbat numai de către forțele externe care acționează asupra sistemului. Forțele interne, fiind egale în modul și de sens opus, produc variații egale în modul și de sens opus ale impulsului care se anulează una pe alta. Pentru un sistem de particule

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \vec{P},$$

astfel încât dacă impulsul total \vec{P} este constant avem

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{const} = \vec{P}_0. \quad (9-18)$$

Impulsurile particulelor individuale pot varia, însă suma lor rămâne constantă dacă nu există nici o forță externă netă.

Impulsul este o mărime vectorială. Ecuația (9-18) este de aceea echivalentă cu trei ecuații scalare, câte una pentru fiecare axă de coordonate. Prin urmare, conservarea impulsului ne furnizează trei condiții asupra mișcării sistemului cărui i se aplică ea. Conservarea energiei pe de altă parte ne furnizează o singură condiție asupra mișcării sistemului cărui i se aplică, deoarece energia este un scalar.

Legea conservării impulsului este valabilă chiar în fizica atomică și nucleară, deși în acest caz mecanica newtoniană nu se aplică. Prin urmare, această lege de conservare trebuie să fie mai fundamentală decât principiile lui Newton. În deducerea acestui principiu trebuie că noi am făcut ipoteze mai rigide decât era nevoie. Aceasta este adevărat chiar în cadrul mecanicii clasice. Studentul trebuie să-și reamintească de rolul-cheie jucat de legea a treia a lui Newton în această deducere a conservării impulsului. Această lege a fost folosită pentru a justifica ipoteza că suma forțelor interne care acționează asupra tuturor particulelor este zero. Cu toate acestea, este ceva artificial în a privi forțele interne dintr-o bucată de materie ca rezultând din perechi de forțe egale în modul și de sens opus, dintre diferite perechi de atomi. Aceste forțe interne sînt în realitate forțe între mai multe particule (multiparticulă), depinzînd nu numai de distanța relativă și de orientarea celor doi atomi, ci și de pozițiile și orientările atomilor vecini. Dacă ar fi posibil să demonstrăm ipoteza noastră fără a folosi legea a treia a lui Newton, legea conservării impulsului n-ar depinde de valabilitatea legii a treia a mișcării. În realitate, noi am demonstrat această ipoteză în baza unei cerințe mult mai puțin stringente decât valabilitatea legii a treia. Demonstrația este dincolo de scopul acestui text¹.

9-6. Unele aplicații ale principiului conservării impulsului

Exemplul 4. Să considerăm întâi o problemă în care acționează o forță externă asupra unui sistem de particule. Să ne reamintim discuția precedentă asupra mișcării proiectilului (capitolul 4). Să ne imaginăm acum că proiectilul nostru este un obuz care explodează în timpul zborului. Traectoria obuzului este arătată în figura 9-8. Presupunem că rezistența aerului este neglijabilă. Sistemul

¹ Vezi „Despre legea a treia a lui Newton și conservarea impulsului“ E. Gerjuoy, *American Journal of Physics*, noiembrie 1949.

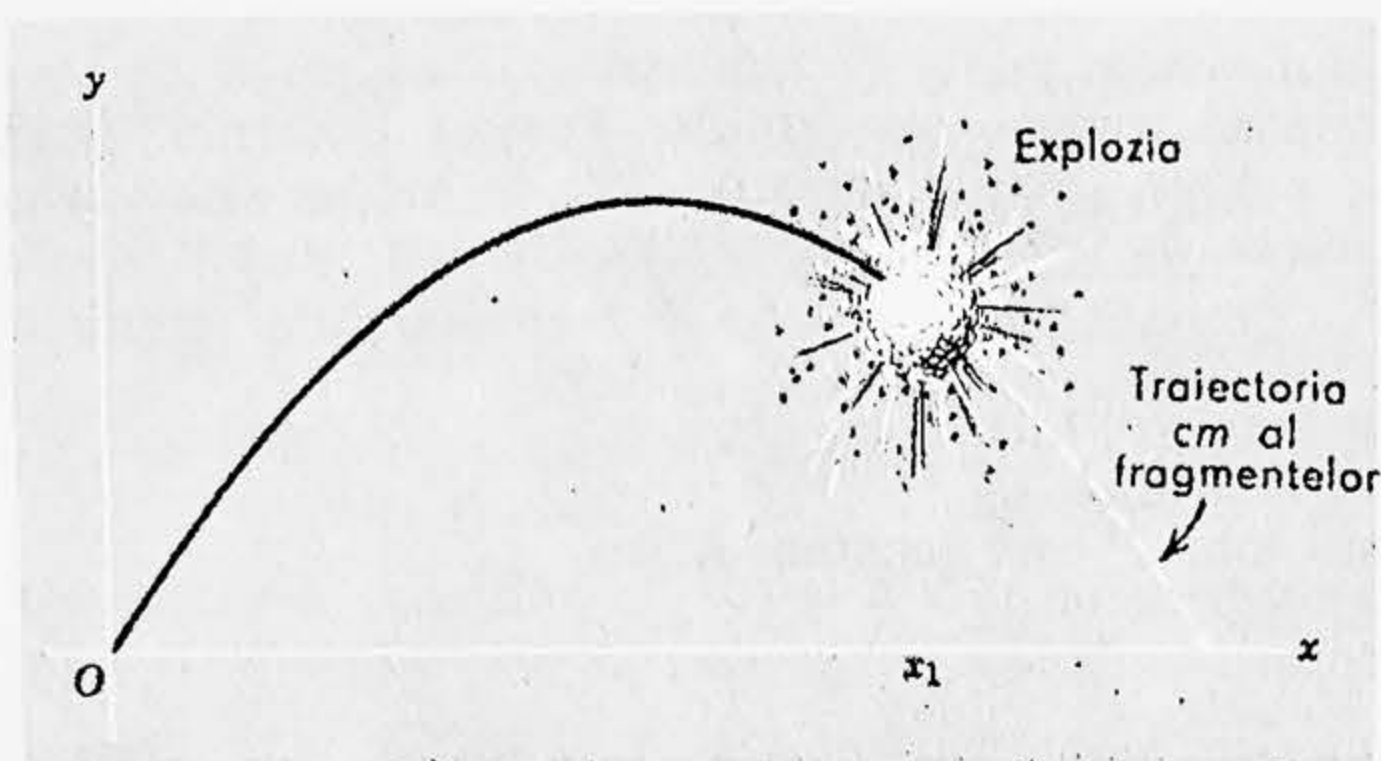


Figura 9-8. Exemplul 4. Un proiectil, care urmează traiectoria parabolică obișnuită explodează în x_1 . Centrul de masă al fragmentelor continuă să se miște de-a lungul aceleiași traiectorii parabolice.

este obuzul, reperul nostru este Pământul iar forța externă este cea a gravitației. În punctul x_1 obuzul explodează și fragmentele obuzului se împrăștiă în toate direcțiile. Ce putem spune despre mișcarea sistemului după aceea?

Forțele exploziei sînt toate *forțe interne*; ele sînt forțe exercitate de o parte a sistemului asupra altor părți ale sistemului. Aceste forțe pot schimba impulsurile tuturor *fragmentelor individuale* față de valorile pe care acestea le aveau cînd constituiau obuzul, dar ele nu pot schimba vectorul impuls *total* al sistemului. Numai o forță externă poate schimba impulsul total. Forța externă însă este cea datorită gravitației. Deoarece un sistem de particule ca un întreg se mișcă ca și cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul de masă cu forța externă aplicată 'acolo, centrul de masă al fragmentelor va continua să se miște pe o traiectorie parabolică pe care ar fi urmat-o obuzul neexplodat. Variația impulsului total al sistemului datorită gravitației este aceeași indiferent dacă obuzul explodează sau nu. Ce se poate spune despre energia mecanică a sistemului înainte și după explozie?

Exemplul 5. Să considerăm acum două blocuri A și B de mase m_A și m_B , cuplate printr-un resort și aflate în repaus pe o masă orizontală fără frecări. Să depărtăm blocurile unul de altul întinzînd resortul, ca în figura 9-9, și apoi să le dăm drumul. Să se descrie mișcarea care va urma.

Dacă sistemul constă din două blocuri și un resort, atunci după ce dăm drumul blocurilor, nu mai există nici o forță *externă* netă care să acționeze asupra sistemului. Putem de aceea aplica conservarea impulsului acestei mișcări. Impulsul sistemului înainte de eliberarea blocurilor era zero în sistemul de referință arătat, legat de masă, astfel încît impulsul trebuie să rămînă zero și după aceea. Impulsul total poate fi zero chiar dacă blocurile se mișcă, deoarece impulsul este o mărime vectorială. Un bloc va avea impuls pozitiv (A se mișcă în sensul pozitiv al axei x) iar celălalt bloc va avea impuls negativ (B se mișcă în sensul negativ al axei x).

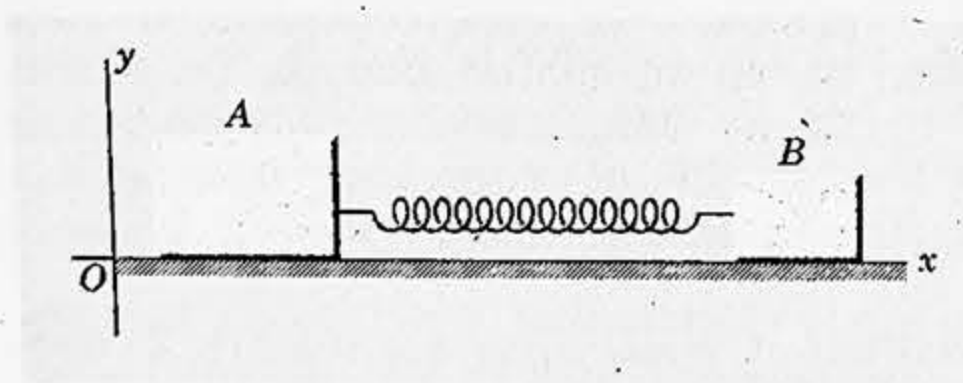


Figura 9-9. Exemplul 5. Două blocuri A și B aflate în repaus pe o suprafață fără frecări, sînt legate între ele printr-un resort. Dacă ele sînt depărtate și apoi lăsate liber, suma impulsurilor lor rămîne nulă.

Din conservarea impulsului avem
impulsul inițial = impulsul final

$$0 = m_B \vec{v}_B + m_A \vec{v}_A.$$

Prin urmare

$$m_B \vec{v}_B = -m_A \vec{v}_A$$

sau

$$\vec{v}_A = -\frac{m_B}{m_A} \vec{v}_B.$$

De exemplu, dacă m_A este de 2 kg și m_B este de 1 kg, atunci v_A va fi totdeauna jumătate din v_B ca modul și dirijat în sens opus, în timpul mișcării blocurilor.

Energia cinetică a blocului A este $\frac{1}{2} m_A v_A^2$ și poate fi scrisă ca $(m_A v_A)^2 / 2m_A$,

iar energia cinetică a blocului B este $\frac{1}{2} m_B v_B^2$ și poate fi scrisă ca $(m_B v_B)^2 / 2m_B$.

Dar

$$\frac{E_{cA}}{E_{cB}} = \frac{1}{2} \frac{m_B (m_A v_A)^2}{m_A (m_B v_B)^2} = \frac{m_B}{m_A},$$

în care $m_A v_A$ este egal cu $m_B v_B$ datorită conservării impulsului. Energiile cinetice ale blocurilor în fiecare moment sînt invers proporționale cu masele lor respective. Deoarece se conservă și energia mecanică, blocurile vor continua să oscileze înainte și înapoi, energia fiind parțial cinetică și parțial potențială. Care este mișcarea centrului de masă al acestui sistem?

Dacă energia mecanică nu se conservă, așa cum ar fi fost în prezența frecărilor, mișcarea s-ar stinge după disiparea energiei. Se poate aplica conservarea impulsului în acest caz? Să se explice.

Exemplul 6. Ca un exemplu de recul, să considerăm dezintegrarea radioactivă. O particulă α (nucleul unui atom de heliu) este emisă dintr-un nucleu de uraniu 238, inițial în repaus, cu o viteză de $1,4 \cdot 10^7$ m/s și o energie cinetică de 4,1 MeV (milioane electron-volți). Să se afle viteza de recul a nucleului rămas (toriu 234).

Considerăm sistemul (toriu + particula α) ca fiind inițial legat și formînd nucleul de uraniu. Sistemul se fragmentează apoi în două părți separate. Impulsul sistemului înainte de fragmentare este zero. În absența forțelor externe, impulsul după fragmentare este de asemenea zero. Prin urmare,

impulsul inițial = impulsul final,

$$0 = M_\alpha \vec{v}_\alpha + M_{Th} \vec{v}_{Th}$$

$$\vec{v}_{Th} = -\frac{M_\alpha}{M_{Th}} \vec{v}_\alpha.$$

Raportul dintre masa particulei α și masa nucleului de toriu, M_α / M_{Th} este 4/234 și $v_\alpha = 1,4 \cdot 10^7$ m/s. Prin urmare,

$$v_{Th} = -(4/234) \cdot 1,4 \cdot 10^7 \text{ m/s} = -2,4 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Semnul minus arată că nucleul rezultat de toriu capătă un recul într-o direcție exact opusă mișcării particulei α , astfel încît să dea vectorul rezultat al impulsului egal cu zero.

Cum putem calcula energia cinetică a nucleului de recul (vezi exemplul precedent)? De unde provine energia fragmentelor?

Exemplul 7. Să considerăm acum un exemplu aparent simplu al unei mingi aruncate în sus de pe Pămînt de o persoană și apoi prinsă de ea după întoarcerea mingii. Pentru a simplifica lucrurile, putem considera persoana ca fiind o parte a Pămîntului, deoarece ea nu pierde contactul cu el. Presupunem de asemenea că rezistența aerului este neglijabilă.

Sistemul considerat constă din Pămînt și minge. Forțele gravitaționale dintre părțile sistemului sînt acum forțe interne. Să alegem un sistem de referință în care sistemul (Pămînt+minge) este în repaus. Atunci cînd mingea este aruncată în sus, Pămîntul trebuie să capete un recul, privit de un observator din acel sistem de referință. Impulsul sistemului (Pămînt+minge) este inițial zero și nu acționează nici un fel de forțe externe. Prin urmare, impulsul se conservă și impulsul total rămîne zero în timpul mișcării. Impulsul în sus cîștigat de minge este echilibrat de un impuls egal în modul și dirijat în jos al Pămîntului. Avem

impulsul inițial = impulsul final,

$$0 = m_M \vec{v}_M + m_P \vec{v}_P$$

$$m_M \vec{v}_M = -m_P \vec{v}_P.$$

Aici m_M și m_P sînt masele mingii și respectiv Pămîntului iar \vec{v}_M și \vec{v}_P sînt vitezele mingii și Pămîntului în sistemul nostru de referință ales. Datorită masei enorme a Pămîntului în comparație cu masa mingii, viteza de recul a Pămîntului este neglijabil de mică.

Cînd mingea și Pămîntul se depărtează, forța internă de atracție gravitațională le atrage unul spre celălalt pînă cînd încetează să se depărteze și încep să se apropie unul de altul. Cînd mingea cade către Pămînt, Pămîntul cade către minge cu un impuls egal în modul dar de sens opus. Cînd mingea este prinsă, impulsul ei este neutralizat de impulsul Pămîntului (și neutralizează impulsul acestuia). Ambele obiecte pierd mișcarea lor relativă, impulsul total continuă să fie iarăși zero și situația inițială dinainte de aruncare este restabilă.

Reamintim că atunci cînd am discutat conservarea energiei în prezența potențialului gravitațional, am neglijat să considerăm mișcarea Pămîntului însuși. Am luat suprafața Pămîntului ca nivelul zero al energiei potențiale gravitaționale. Poziția de referință nu are nici o importanță, deoarece am avut de a face numai cu variațiile energiei potențiale. Cu toate acestea în calculul variațiilor energiei cinetice, am presupus că Pămîntul rămînea în repaus, ca în cazul mingii aruncate în sus de pe Pămînt.

În principiu, nu putem ignora variația energiei cinetice a Pămîntului însuși. De exemplu, atunci cînd mingea cade către Pămînt, Pămîntul este ușor accelerat către minge. Am neglijat acest fapt înainte, deoarece am presupus că variația energiei cinetice a Pămîntului este neglijabilă. Acest rezultat nu este evident, deoarece, deși viteza Pămîntului va fi sigur mică, masa sa este enormă și energia cinetică cîștigată ar putea fi sensibilă. Pentru a lămuri lucrurile să calculăm ra-

portul dintre energia cinetică a Pământului și energia cinetică a mingii. Folosind $m_P v_P = m_M v_M$ din legea conservării impulsului, avem

$$\frac{E_{cP}}{E_{cM}} = \frac{\frac{1}{2} m_P v_P^2}{\frac{1}{2} m_M v_M^2} = \frac{\frac{1}{2} (m_P v_P)^2}{\frac{1}{2} (m_M v_M)^2} \cdot \frac{m_M}{m_P} = \frac{m_M}{m_P}.$$

Deoarece masa mingii m_M este neglijabil de mică în comparație cu masa Pământului m_P , energia cinetică câștigată de Pământ, E_{cP} este neglijabil de mică în comparație cu cea a mingii, E_{cM} . De exemplu dacă $m_M = 6 \text{ kg}$ (o minge destul de masivă) atunci, deoarece $m_P = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, rezultă $E_{cP}/E_{cM} = 10^{-24}$!

Observăm că această problemă este identică în principiu cu exemplul 5. Diferențele sînt numai cele de detaliu; într-una energia potențială este elastică, iar în cealaltă energia potențială este gravitațională; în una masele sînt de același ordin de mărime, iar în cealaltă ele sînt de ordine de mărime total diferite.

9-7. Sisteme cu masă variabilă

Pînă acum ne-am ocupat numai de sisteme în care masa totală a sistemului M rămînea constantă în timp. Acum vom considera sisteme în care masa intră sau iese din sistem în timpul observării acestuia, dM/dt fiind pozitiv în primul caz și negativ în ultimul caz.

Figura 9-10, a arată un sistem de masă M al cărui centru de masă se mișcă cu viteza \vec{v} , văzut dintr-un anumit sistem de referință. Asupra sistemului acționează o forță externă \vec{F}_{ext} . După un timp Δt , configurația se schimbă așa cum se vede în figura 9-10, b. O masă ΔM a fost ejectată din sistem, centrul ei de masă se mișcă acum cu viteza \vec{u} , văzută de observatorul nostru. Masa sistemului s-a redus la $M - \Delta M$, iar viteza \vec{v} a centrului de masă a sistemului s-a schimbat în $\vec{v} + \Delta \vec{v}$.

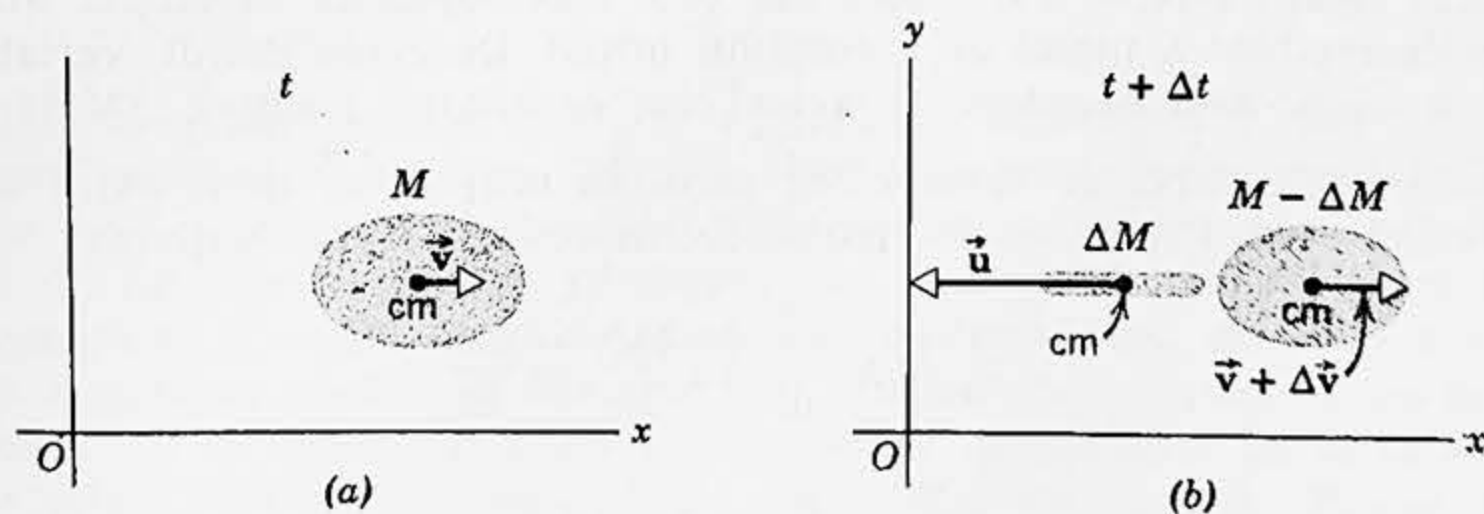


Figura 9-10. Un corp de masă M care se mișcă cu viteza \vec{v} expulzează o masă ΔM într-un interval de timp Δt . Asupra sistemului acționează o forță externă \vec{F}_{ext} (nu este arătată).

Studentul poate imagina sistemul din figura 9-10 ca reprezentînd o rachetă. Ea ejectionează gaze arse prin orificiul său cu o viteză destul de mare, micșorîndu-și propria sa masă și măritîndu-și propria sa viteză. Într-o rachetă pierderea de masă este continuă în timpul procesului de ardere. Forța externă \vec{F}_{ext} nu este forța de tracțiune a rachetei ci este forța de gravitație exercitată asupra rachetei și forța de rezistență a atmosferei.

Pentru a analiza situația să definim deocamdată sistemul ca avînd masă constantă. Aceasta înseamnă că în figura 9-10, b, vom include în sistemul nostru nu numai masa $M - \Delta M$ a corpului dar și masa ejectionată ΔM , masa totală a sistemului fiind M din figura 9-10, a. Făcînd aceasta, avem voie să aplicăm rezultatele pe care le-am dedus pînă acum pentru sisteme cu masă constantă. Vom vedea că această tratare ne conduce la forma legii a doua a lui Newton pentru sistemele în care masa nu este constantă.

Din ecuația (9-17)

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

putem scrie, ca un rezultat aproximativ pentru un interval de timp finit Δt ,

$$\vec{F}_{ext} \approx \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{\Delta t}$$

în care \vec{P}_f este impulsul (final) al sistemului din figura 9-10, b, iar \vec{P}_i este impulsul (inițial) al sistemului din figura 9-10, a. Dar $\vec{P}_f = (M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \vec{u}$ și $\vec{P}_i = M \vec{v}$. Aceasta duce la

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} &\approx \frac{[(M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \vec{u}] - M \vec{v}}{\Delta t} = \\ &= M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + [\vec{u} - (\vec{v} + \Delta \vec{v})] \frac{\Delta M}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (9-19)$$

Acum, dacă facem pe Δt să tindă către zero, configurația din figura 9-10, b tinde către configurația din figura 9-10, a; adică $\Delta \vec{v} / \Delta t$ tinde către $d\vec{v} / dt$, accelerația corpului din figura 9-10, a. Cantitatea ΔM este masa ejectionată în timpul Δt : aceasta duce la o descreștere a masei M a corpului inițial. Deoarece dM/dt , variația masei corpului în timp, este negativă în acest caz, cantitatea pozitivă $\Delta M / \Delta t$ se înlocuiește cu $-dM/dt$ cînd Δt tinde către zero. În sfîrșit, $\Delta \vec{v}$ tinde către zero cînd Δt tinde către zero. Făcînd aceste schimbări în ecuația (9-19), obținem

$$\vec{F}_{ext} = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dM}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (9-20, a)$$

sau

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} (M \vec{v}) - \vec{u} \frac{dM}{dt}, \quad (9-20, b)$$

care reprezintă legea a doua a lui Newton, ce definește forțele externe ce acționează asupra unui corp (analog celui din fig. 9-10, a), a cărui masă variază.

Observăm că aceste ecuații se reduc la formele cunoscute $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}$ și respectiv $\vec{F}_{ext} = (d/dt)(M\vec{v})$ pentru cazul particular al unui corp de masă constantă ($dM/dt=0$). Este important să observăm că *nu putem* deduce o expresie generală pentru legea a doua a lui Newton pentru sisteme cu masă variabilă tratând masa din $\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt = d(M\vec{v})/dt$ ca o masă *variabilă*. Deoarece aceasta duce la

$$\vec{F}_{ext} = d(M\vec{v})/dt = M d\vec{v}/dt + \vec{v} dM/dt,$$

care este doar un caz particular al ecuației mai generale (9-20) anume cazul în care fie (a) $dM/dt=0$, sistem cu masă constantă, fie (b) $\vec{u}=0$, o alegere particulară a sistemului de referință. Putem folosi $\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt$ pentru a analiza sisteme cu masă variabilă numai dacă o aplicăm *întregului sistem cu masă constantă* care are părți între care există un schimb de masă. Acesta este în adevăr lucrul pe care l-am făcut în deducerea ecuațiilor (9-20). Importanța formulării prin impuls $\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt$ în fizica clasică constă în faptul că ea pune în lumină conservarea impulsului și ne dă o cale simplă, fizică, pentru a trata sisteme complicate. Deoarece alegerea a ceea ce vom lua drept sistem este la dispoziția noastră, putem totdeauna alege un sistem cu masă constantă, definind sistemul nostru suficient de larg.

Cu toate acestea, este adesea convenabil, ca în problemele cu rachetă, să alegem un sistem a cărui masă variază în timp. În astfel de cazuri aplicăm legea a doua lui Newton dată de ecuațiile (9-20) într-o formă care este uneori mai convenabilă și interpretabilă fizic. Cantitatea $\vec{u} = (\vec{v} + \Delta\vec{v})$ din ecuația (9-19) este chiar \vec{v}_{rel} , viteza relativă a masei ejectate față de corpul principal. De aceea, ecuațiile (9-20) pot fi scrise astfel

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} \quad (9-21, a)$$

sau

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}. \quad (9-21, b)$$

Ultimul termen din ecuația (9-21, b), $\vec{v}_{rel}(dM/dt)$, reprezintă viteza cu care este transferat impulsul către (sau dinspre) sistem de către masa pe care sistemul a ejectat-o (sau a colectat-o). El poate fi interpretat ca forța exercitată *asupra* sistemului de către masa care îl părăsește (sau se unește cu el). Pentru o rachetă, acest termen se numește *tracțiune* și scopul constructorului de rachetă este de a-l face cât mai mare posibil. O examinare a ecuației (9-21) arată că racheta trebuie să ejecteze pe cât posibil o masă cât mai mare în unitatea de timp și ca viteza masei ejectate față de rachetă să fie cât mai mare posibil. Putem retranscrie ecuația (9-21) astfel

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{reacțiune}$$

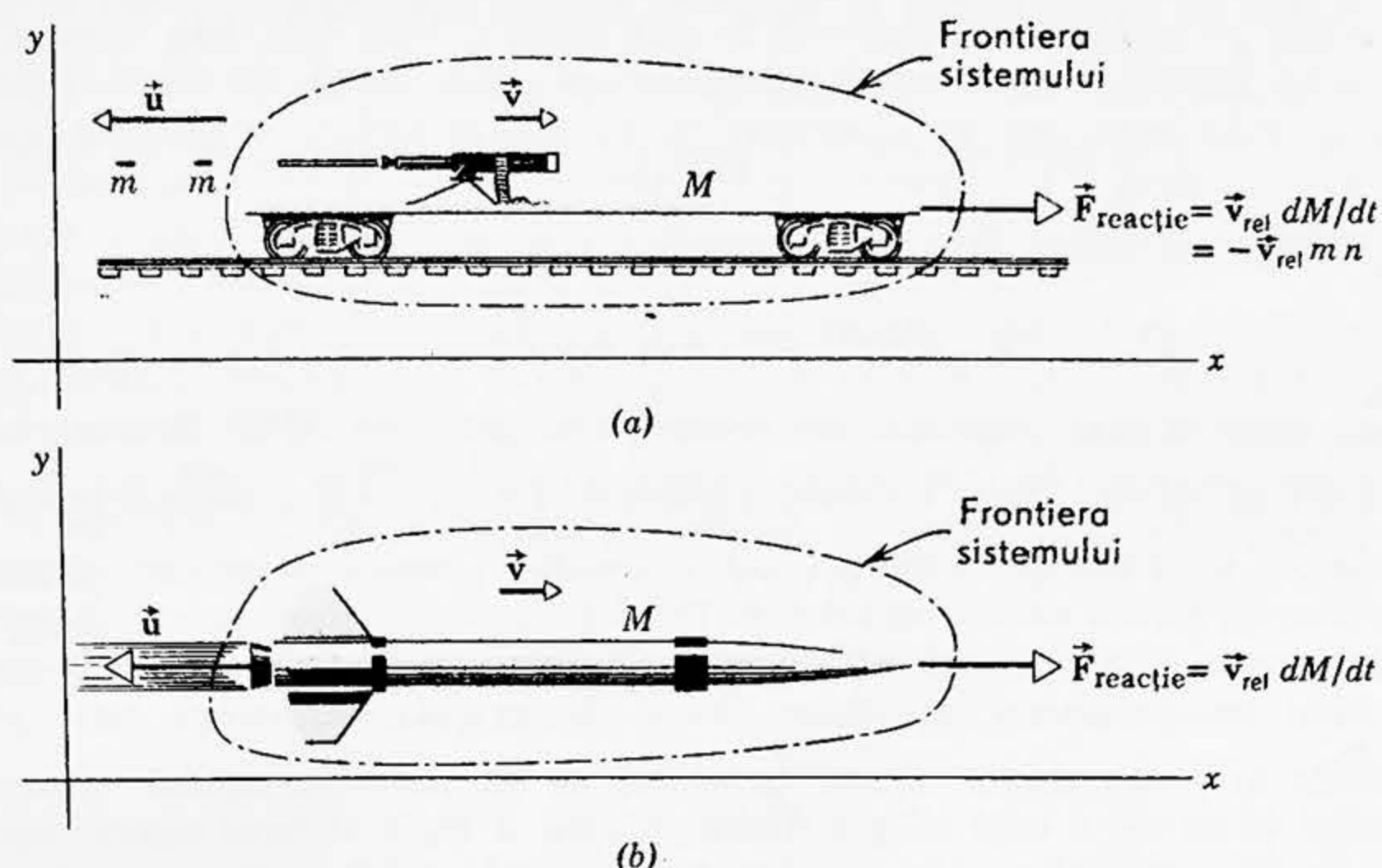


Figura 9-11. (a) Exemplul 8. O mitralieră este fixată pe un car care se mișcă cu frecare neglijabilă. Mitraliera trage gloanțe de masă m cu o frecvență n (număr de gloanțe pe unitatea de timp), viteza gloanțelor față de mitralieră fiind $\vec{u}-\vec{v}$. În momentul arătat unele gloanțe au părăsit deja sistemul. Vitezele indicate, pentru car și pentru gloanțe, sînt acelea care ar fi măsurate de către un observator într-un sistem de referință fixat de șine, așa cum este arătat. Forța de reacțiune asupra sistemului este $\vec{F} = -mn\vec{v}_{rel} = (dM/dt)\vec{v}_{rel}$. (b) O rachetă se mișcă în spațiu cu forțe externe neglijabile. Particulele de gaz sînt ejectate prin ajutoraj, avînd o viteză $\vec{u}-\vec{v}$ față de rachetă. Rata cu care este expulzată masa prin ajutoraj este $-dM/dt$. Forța de reacțiune asupra rachetei este $\vec{F} = (dM/dt)\vec{v}_{rel}$. Vitezele indicate, pentru rachetă și pentru gazele expulzate, sînt relative la sol.

în care $\vec{F}_{reacție} (-\vec{v}_{rel} dM/dt)$ este forța de reacție exercitată asupra sistemului de către masa care îl părăsește.

Exemplul 8. O mitralieră este montată pe un vehicul așezat pe o suprafață orizontală fără frecări, ca în figura 9-11, a. Masa sistemului (vehicul+mitralieră) la un anumit moment este M . În același moment mitraliera trage gloanțe de masă m a căror viteză, în sistemul de referință arătat, este \vec{u} . Viteza vehiculului în același reper este \vec{v} , iar viteza gloanțelor față de vehicul este $\vec{u}-\vec{v}$. Numărul gloanțelor trase pe unitatea de timp este n . Care este accelerația vehiculului?

Alegem vehiculul și mitraliera ca sistem. Deoarece masa sa M este variabilă, aplicăm legea a doua a lui Newton sub forma dată de ecuația (9-21). Deoarece asupra sistemului nu acționează nici o forță externă netă, avem $\vec{F}_{ext}=0$ în acea ecuație, ceea ce dă

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}.$$

Dar $d\vec{v}/dt$ este \vec{a} — accelerația sistemului; \vec{v}_{rel} este $\vec{u}-\vec{v}$, îndreptată spre stînga în figura 9-11, a, și dM/dt este $-mn$. Introducînd acestea în ecuația de mai sus, obținem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\vec{v}_{rel} (mn)}{M}.$$

Aceasta arată că \vec{a} este dirijat în direcția opusă lui \vec{v}_{rel} , adică \vec{a} este dirijat spre dreapta în figura 9-11, a. Dacă $\vec{v}_{rel}=500$ m/s, $m=10$ g, $n=10$ s⁻¹ și $M=200$ kg la un anumit moment, atunci în acel moment

$$a = \frac{(500 \text{ m/s}) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 10 \text{ s}^{-1}}{200 \text{ kg}} = 0,25 \text{ m/s}^2.$$

Intensitatea „tracțiunii” medii a gloanțelor ejectate asupra sistemului (vehicul+mitralieră) în acel moment este dată de $F=v_{rel}nm=(500 \text{ m/s}) \cdot 10 \text{ s}^{-1} \cdot 10^{-2} \text{ kg}=50 \text{ N}$.

În figura 9-11, b se arată situația analogă pentru o rachetă. Este instructiv de privit această problemă din punctul de vedere al legii a treia a lui Newton și al principiului conservării impulsului. Alegem un sistem cu masă fixă (rachetă+gaze) și atașăm centrului său de masă un sistem de referință. Racheta ejectează un jet de gaze arse din eșapamentul său; aceasta este forța de acțiune. Jetul de gaze arse exercită o forță asupra rachetei, propulsînd-o înainte. Aceasta este forța de reacțiune. Aceste forțe sînt forțe interne în sistemul (rachetă+gaze). În absența forțelor externe impulsul total al sistemului este constant (centrul de masă, inițial în repaus, rămîne în repaus). Părțile individuale ale sistemului (rachetă și gaze) își pot însă schimba impulsul lor; față de sistemul centrului de masă, gazele arse cîștigă un impuls în direcția înapoi, iar racheta cîștigă un impuls de modul egal în direcția înainte.

Studentul poate analiza sistemul (gloanțe+mitralieră) într-un mod analog.

Exemplul 9. O rachetă cîntărește 12,0 t în momentul cînd este încărcată cu combustibil pe platforma de lansare. Ea este lansată vertical în sus și după epuizarea combustibilului cîntărește 4,00 t. Într-o secundă sînt expulzate 100 kg gaze cu o viteză de 1,50 km/s, relativă la rachetă (viteza de expulzare), ambele cantități fiind presupuse constante în timpul arderii combustibilului.

(a) Care este tracțiunea? Tracțiunea \vec{F} este dată de ultimul termen din ecuația (9-21, b) sau

$$F = v_{rel} \frac{dM}{dt} = (1500 \text{ m/s}) \cdot 100 \text{ kg/s} = 150 \text{ kN}.$$

Observăm că inițial, cînd rezervoarele sînt pline cu combustibil, forța netă care acționează în sus asupra rachetei (neglijînd rezistența aerului) este egală cu tracțiunea (150 kN) minus greutatea inițială (117,6 kN) sau 32,4 kN. Imediat înaintea epuizării combustibilului forța netă în sus este de 150 kN minus 39,2 kN sau 110,8 kN.

(b) Dacă am putea neglija toate forțele externe, inclusiv gravitația și rezistența aerului, care ar fi viteza rachetei după epuizarea combustibilului?

Dacă punem $\vec{F}_{ext}=0$ în ecuația (9-21, b), avem

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt} \text{ sau } d\vec{v} = -\vec{v}_{rel} \frac{dM}{M}.$$

Integrând această expresie (vezi anexa F) de la momentul cînd viteza era \vec{v}_0 și masa rachetei era M_0 pînă la momentul cînd viteza este \vec{v} și masa rachetei M , obținem

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = -\vec{v}_{rel} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

viteza de ejectare fiind presupusă constantă în acest timp. Aceasta dă

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = -\vec{v}_{rel} \ln(M_0/M) = -\vec{v}_{rel} \ln\left(1 + \frac{M_0 - M}{M}\right).$$

Prin urmare variația vitezei rachetei pentru oricare interval de timp depinde numai de viteza de ejectare (fiind opusă ca sens acesteia) și de fracțiunea de masă ejectată în timpul aceluia interval de timp.

În exemplul nostru, $v_0 = 0$ și $M_0/M = 12,0/4,0 = 3,0$, astfel încît viteza rachetei după arderea combustibilului este

$$v = v_{rel} \ln(M_0/M) = (1500 \text{ m/s}) \cdot \ln 3 = 1,65 \text{ km/h.}$$

Dacă forțele externe de gravitație și rezistență a aerului ar fi luate în seamă, viteza finală ar fi mai mică¹.

Presupunînd că racheta pornește din repaus ($v_0 = 0$) cu o masă inițială M_0 și atinge o viteză finală v_f după arderea combustibilului cînd masa sa devine M_f , putem scrie ecuația rachetei de mai sus astfel

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f/v_{rel}},$$

în care v_{rel} este viteza de ejectare a gazelor.

Ecuațiile clasice ale rachetei (ale corpului cu masă variabilă) implică faptul că viteza rachetei poate crește pînă la orice valoare cu condiția ca racheta să expulzeze suficient carburant astfel încît masa rămasă, finală, să fie suficient de mică. Știm însă din mecanica relativistă că o rachetă nu poate fi accelerată pînă la o viteză egală sau mai mare decît viteza luminii. Cînd viteza rachetei se apropie de domeniul relativist al vitezelor ecuațiile clasice nu mai sînt aplicabile. Trebuie să ținem seama de variația masei inerțiale a particulei cu viteza și de formula de adunare relativistă a vitezelor. Ecuațiile rezultante se aplică unei rachete relativiste².

Exemplul 10. Dintr-o pîlnie în repaus curge nisip cu o viteză dM/dt pe o bandă rulantă care se mișcă cu viteza \vec{v} în sistemul de referință al laboratorului, ca în figura 9-12. Ce forță este necesară pentru a menține banda în mișcare cu viteza v ?

¹ În ceea ce privește rezolvarea exactă a problemei clasice a rachetei, vezi „Dinamica corpului de masă variabilă” de J. L. Meriam, *Journal of Engineering Education*, decembrie 1960.

² Vezi „Ecuația mișcării pentru particule relativiste și sisteme cu masă de repaus variabilă”, de Kalman B. Pomeranz, în *American Journal of Physics*, decembrie 1964.

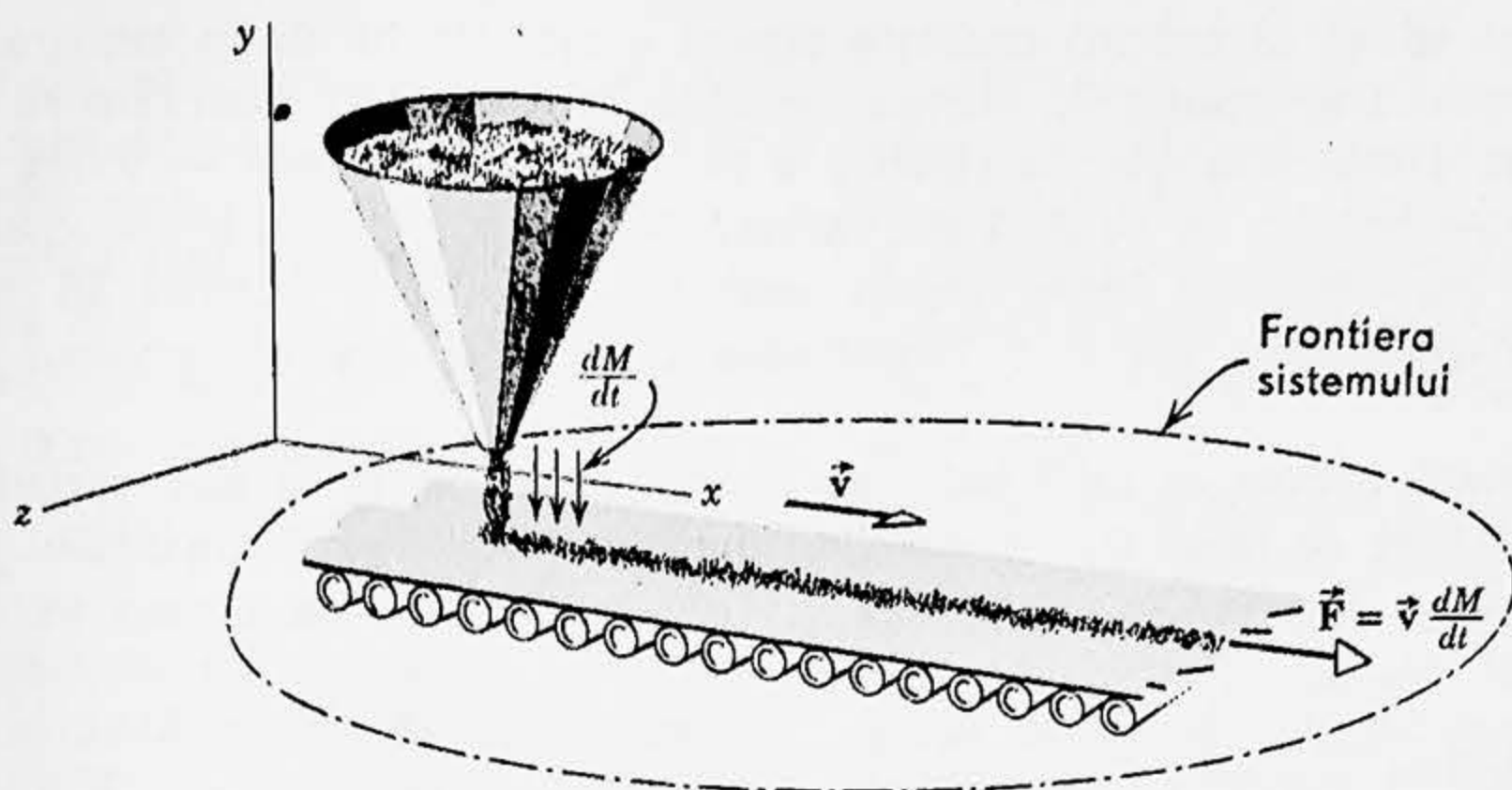


Figura 9-12. Exemplul 10. Dintr-o pîlnie curge nisip cu un debit dM/dt pe o bandă rulantă care se mișcă cu viteza \vec{v} în sistemul de referință al laboratorului. Forța \vec{F} necesară pentru a menține banda în mișcare cu viteză constantă este $\vec{v} dM/dt$. Pîlnia este în repaus în sistemul de referință.

Acesta este un exemplu tranșant de forță asociată numai cu variația masei, viteza fiind constantă. Alegem ca sistem banda de masă variabilă astfel încît se aplică ecuația (9-21). Trebuie să punem $d\vec{v}/dt = 0$ în acea ecuație deoarece viteza benzii este constantă. Mai mult, unui observator aflat în repaus pe bandă, nisipul care curge (și pîlnia) i-ar apărea într-o mișcare orizontală cu o viteză \vec{v} în sens opus celei arătate pentru bandă în sistemul laboratorului. În consecință $\vec{v}_{rel} = -\vec{v}$ în ecuațiile (9-21). Mai formal, $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$; dar $\vec{u} = 0$, astfel încît $\vec{v}_{rel} = -\vec{v}$. Făcînd aceste substituții găsim

$$0 = \vec{F}_{ext} - \vec{v} \frac{dM}{dt}$$

sau

$$\vec{F}_{ext} = \vec{v} \frac{dM}{dt}.$$

În acest exemplu dM/dt este pozitiv deoarece sistemul cîștigă masă în timp. Prin urmare, după cum era de așteptat, forța externă necesară trebuie să fie îndreptată în direcția în care se mișcă banda. Observăm că, în absența frecărilor, masa benzii însăși nu intervine în problemă.

Puterea dezvoltată de forța externă este

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot (\vec{v} dM/dt) = v^2 (dM/dt).$$

Deoarece $v = \text{const}$, putem scrie aceasta astfel

$$P = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dE_c}{dt}.$$

Aceasta ne spune că puterea necesară pentru a menține banda în mișcare este de două ori viteza de creștere a energiei cinetice a sistemului; observăm că nu este necesar să considerăm energia cinetică a benzii însăși deoarece — viteza ei fiind constantă — energia sa cinetică nu variază. Este clar că energia mecanică nu se conservă în acest caz. Unde dispare cealaltă jumătate a puterii? În care din exemplele precedente am avut conservarea impulsului fără conservarea energiei mecanice?

Studentul trebuie să fie capabil să rezolve exemplul 10 în altă variantă, alegând un sistem cu masă fixă și aplicând principiul conservării impulsului.

Intrebări

1. Trebuie neapărat să fie prezentă vreo masă în centrul de masă al unui sistem?

2. Centrul de masă al unui corp solid trebuie neapărat să se găsească în interiorul corpului? Dacă nu, să se dea exemple.

3. Cum este legat conceptul de centru de masă de conceptul de centru geografic al unei țări? De centrul de populație al unei țări? Ce se poate conchide din faptul că centrul geografic diferă de centrul de populație?

4. Un sculptor decide să reprezinte o pasăre (fig. 9-13). Din fericire, modelul final este într-adevăr capabil să stea în picioare. Modelul este format dintr-o singură foaie de metal de grosime uniformă. Dintre punctele reprezentate, care este cel mai probabil centrul de masă?

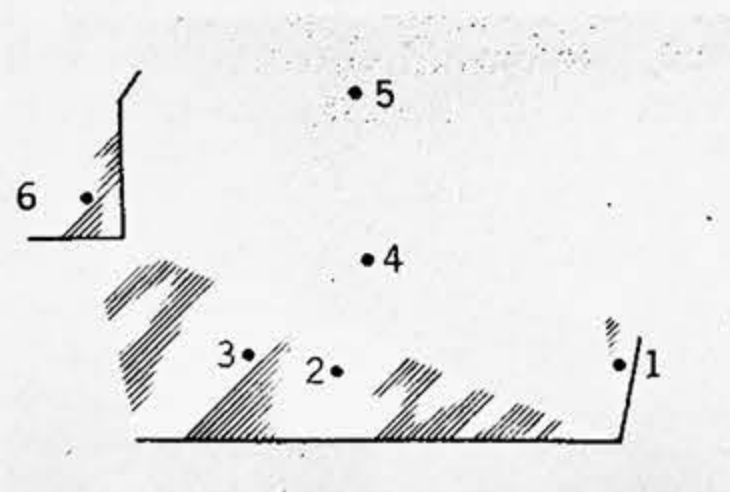


Figura 9-13.

5. Dacă numai o forță externă poate schimba starea de mișcare a centrului de masă al unui corp, cum se întâmplă că forța internă a frinelor poate aduce vehiculul în repaus?

6. Poate un corp avea energie fără a avea impuls? Să se explice. Poate un corp avea impuls fără a avea energie? Să se explice.

7. Un corp ușor și un corp greu au energii cinetice de translație egale. Care din ele are impulsul mai mare?

8. O pasăre se află într-o colivie de sîrmă pusă pe talerul unui cântar cu resort. Cînd pasărea zboară în cușcă, indicația cântarului este mai mare, mai mică sau aceeași ca în cazul cînd pasărea șade în cușcă?

9. Poate fi o barcă cu pînze propulsată de aerul suflat în pînze de către un ventilator fixat de barcă?

10. Un om ce stă liniștit pe un sloi mare, neted, de gheață ține în mînă o pocnitoare aprinsă. El aruncă pocnitoarea în aer. Să se descrie pe scurt, dar cît mai exact posibil, mișcarea centrului de masă al pocnitorii și mișcarea centrului de masă al sistemului format de om și pocnitoare. Este convenabil să se descrie fiecare mișcare, în timpul fiecăreia din perioadele următoare: (a) după ce aruncă pocnitoarea, dar înainte de a exploda; (b) între explozie și momentul cînd un prim fragment al pocnitorii lovește

gheața; (c) între momentul când un prim fragment lovește gheața și când ultimul fragment atinge gheața; (d) în timpul când toate fragmentele au coborât dar nici unul n-a atins marginea sloiului de gheață?

11. După cum s-a afirmat în text, nu se poate folosi ecuația $\vec{F}_{ext} = -d(M\vec{v})/dt$ pentru un sistem cu masă variabilă. Pentru a arăta aceasta: (a) să se pună ecuația în forma echivalentă $\vec{F}_{ext} = M(d\vec{v}/dt)/(dM/dt) - \vec{v}$ și (b) să se arate că un membru al acestei ecuații are aceeași valoare în toate reperele inerțiale, în timp ce celălalt membru nu. Prin urmare ecuația nu poate fi în general valabilă. (c) Să se arate că ecuația (9-20) nu duce la o astfel de contradicție.

Probleme

1. Să se arate că raportul dintre distanțele a două particule până la centrul lor de masă este egal cu raportul invers al maselor lor.

2. Să se arate că centrul de masă a două particule se află pe linia care le unește, într-un punct a cărui distanță până la fiecare particulă este invers proporțională cu masa acelei particule.

3. Experiențele de difracție a electronilor arată că distanța dintre centrele atomului de carbon (C) și atomului de oxigen (O) în molecula de oxid de carbon este de $1,130 \cdot 10^{-10}$ m. Să se găsească poziția centrului de masă a moleculei de CO față de atomul de carbon.

4. Masa Lunii este de aproximativ 0,013 ori masa Pământului, iar distanța de la centrul Lunii până la centrul Pământului este de aproximativ 60 ori raza Pământului. Cât de departe se află centrul de masă al sistemului Pământ-Lună față de centrul

12. Viteza finală a ultimei trepte a unei rachete cu mai multe trepte este mult mai mare decât viteza finală a unei rachete cu o singură treaptă de aceeași greutate totală și cu aceeași rezervă de combustibil. Să se explice acest fapt.

13. Atunci când o rachetă expulzează combustibil ars, poziția centrului de masă al rachetei (într-un reper legat de rachetă) variază. Trebuie să ținem seama de aceasta într-o rezolvare exactă a problemei rachetei?

14. Să se explice clar distincția dintre originea variației masei unui sistem clasic și originea variației masei unui sistem relativist.

15. Puteți imagina sisteme cu masă variabilă, altele decât exemplele date în text?

Pământului? Se va lua raza Pământului 6400 km.

5. În molecula de amoniac (NH_3) cei trei atomi de hidrogen (H) formează un triunghi echilateral, distanța dintre centrele atomilor fiind $1,628 \cdot 10^{-10}$ m, astfel încât centrul tri-

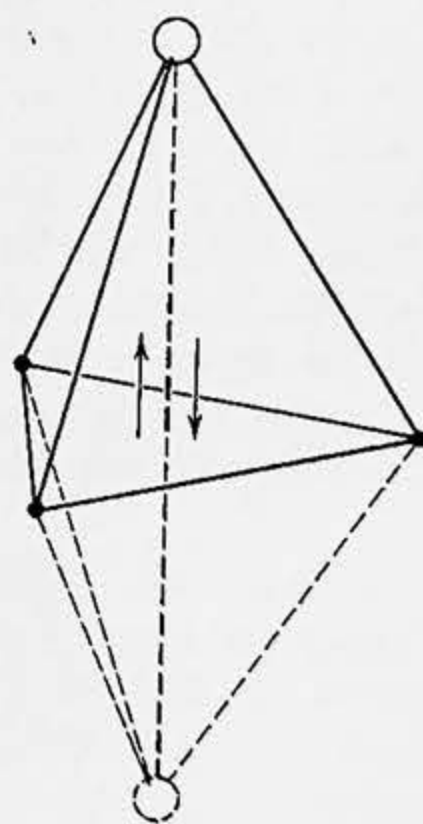


Figura 9-14.

unghiului se află la distanța de $9,39 \cdot 10^{-11}$ m de fiecare atom de hidrogen. Atomul de azot (N) se află în vârful unei piramide, în care cei trei atomi de hidrogen constituie baza (vezi fig. 9-14). Distanța dintre un atom de hidrogen și atomul de azot este de $1,014 \cdot 10^{-10}$ m. Să se afle poziția centrului de masă față de atomul de azot. (Atomul de azot în realitate oscilează în sus și în jos prin baza piramidei, așa cum este arătat prin săgeți și linii punctate. Să se presupună însă o moleculă statică pentru această problemă.)

6. Să se afle centrul de masă al unei plăci semicirculare omogene. Fie a raza cercului.

7. Două particule P și Q sînt inițial în repaus la o distanță de 1,0 m una de alta. P are o masă de 0,10 kg și Q o masă de 0,30 kg. P și Q se atrag între ele cu o forță constantă de $1,0 \cdot 10^{-2}$ N. Asupra sistemului nu acționează nici o forță externă. Să se descrie mișcarea centrului de masă. La ce distanță de poziția inițială a lui P se vor ciocni particulele?

8. Două corpuri, fiecare format din masele etalon ale unei cutii cu mase etalon, sînt legate printr-un fir ușor care trece peste un scripete ușor fără frecări cu un diametru de 5,0 cm. Cele două corpuri sînt la același nivel. Fiecare are inițial o masă de 500 g. (a) Să se afle poziția centrului lor de masă. (b) Douăzeci de grame sînt transferate de la un corp la celălalt, dar corpurile sînt împiedicate să se miște. Să se afle poziția centrului de masă. (c) Cele două corpuri sînt acum lăsate libere. Să se descrie mișcarea centrului de masă și să se determine accelerația sa.

9. Care este impulsul unui vehicul cu masa de 1810 kg a cărui viteză este de 48 km/oră? La ce viteză un camion de 10 tone ar avea același impuls? Dar aceeași energie cinetică?

10. Un om de 80 kg, aflat pe o suprafață cu frecare neglijabilă, azvirle înainte o piatră de 50 g aflată în dreptul piciorului său, astfel încît ea capătă o viteză de 3,0 m/s. Ce viteză va câștiga omul în acest caz?

11. Un ciine cîntărind 5,0 kg, se află într-o barcă astfel încît el se



Figura 9-15.

găsește la 6,0 m de țărm. El merge 2,4 m pe barcă spre țărm și apoi se oprește. Barca cântărește 20 kg și se poate presupune că nu există frecare între ea și apă. Cît de departe se află ea de țărm la sfîrșitul acestui interval de timp? (Indicație: centrul de masă al bărcii+cîine nu se mișcă. De ce?) Linia țărmului se află și în stînga figurii 9-15.

12. Un tun și o rezervă de obuze de tun se află în interiorul unui vagon sigilat ca în figura 9-16. Tunul trage spre dreapta, vagonul ricoșînd spre stînga. Obuzele tunului rămîn în vagon după lovirea peretelui. Să se arate că indiferent de modul în care sînt trase obuzele de către tun, vagonul nu se poate deplasa mai mult decît lungimea sa L , presupunînd că el pornește din repaus.

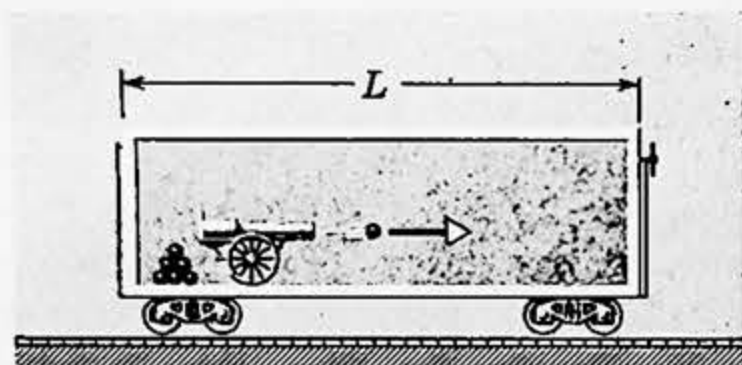


Figura 9-16.

13. Un vas aflat în repaus explodează, rupîndu-se în trei bucăți. Două bucăți de mase egale zboară cu aceeași viteză de 30 m/s în două direcții perpendiculare una pe cealaltă. Cea de a treia bucată are o masă de trei ori mai mare decît fiecare din celelalte două. Care este direcția și mărimea vitezei sale imediat după explozie?

14. Un nucleu radioactiv, inițial în repaus, se dezintegrează emițînd un electron și un neutron sub un unghi drept unul față de altul. Impulsul electronului este de $1,2 \cdot 10^{-22}$ kg·m/s. și cel al neutronului $6,4 \cdot 10^{-23}$ kg·m/s. (a) Să se afle direcția și mărimea impulsului nucleului rămas, care capătă recul. (b) Masa nucleului rezidu-

dual este de $5,8 \cdot 10^{-26}$ kg. Care este energia sa cinetică de recul?

15. Un proiectil este tras dintr-un tun sub un unghi de 45° față de orizontală și cu o viteză de 500 m/s. În punctul cel mai înalt al traiectoriei sale proiectilul explodează în două fragmente de masă egală. Un fragment, a cărui viteză inițială este zero, cade vertical. Cît de departe de tun va cădea celălalt fragment, presupunînd că terenul este orizontal?

16. Un corp cu masa de 8,0 kg se mișcă cu 2,0 m/s fără a fi influențat de nici un agent extern. La un moment dat are loc o explozie internă care despică corpul în două bucăți de cîte 4,0 kg fiecare; 16 J reprezentînd energie cinetică de translație sînt transmiși prin explozie sistemului format din cele două bucăți. Nici una dintre bucăți nu părăsește linia mișcării inițiale. Să se determine viteza și direcția mișcării fiecărei bucăți după explozie.

17. Ultima treaptă a unei rachete se mișcă cu o viteză de 27 400 km/oră sau 7,62 km/s. Această ultimă treaptă este formată din două părți care sînt cuplate împreună și anume racheta propriu-zisă cu o masă de 292 kg și cabina (capsula) cu o masă de 146 kg, conținînd un cimpanzeu. Cînd cuplajul este deconectat, un resort comprimat separă cele două părți cu o viteză relativă de 915 m/s. (a) Care sînt vitezele celor două părți după separare? Se presupune că toate vitezele sînt de-a lungul aceleiași drepte. (b) Să se afle energia cinetică totală a celor două părți înainte și după separarea lor și să se explice diferența, dacă există.

18. Un bloc de masă m se află în repaus pe o pană de masă M care, la rîndul ei, se află în repaus pe o masă orizontală, așa cum se arată în figura 9-17. Toate suprafețele sînt fără frecări. Știînd că sistemul pornește din repaus, punctul P al blocului

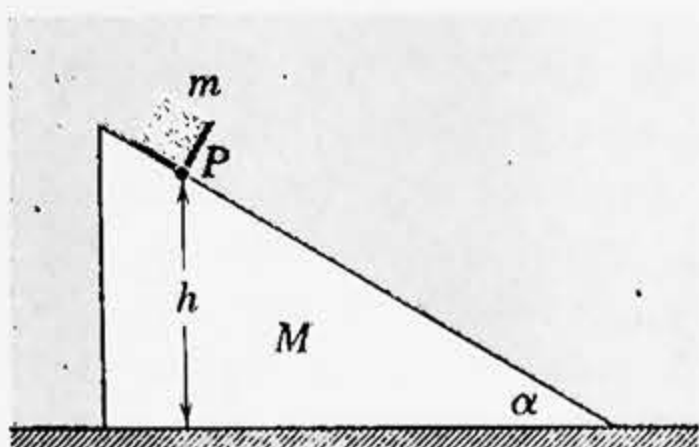


Figura 9-17.

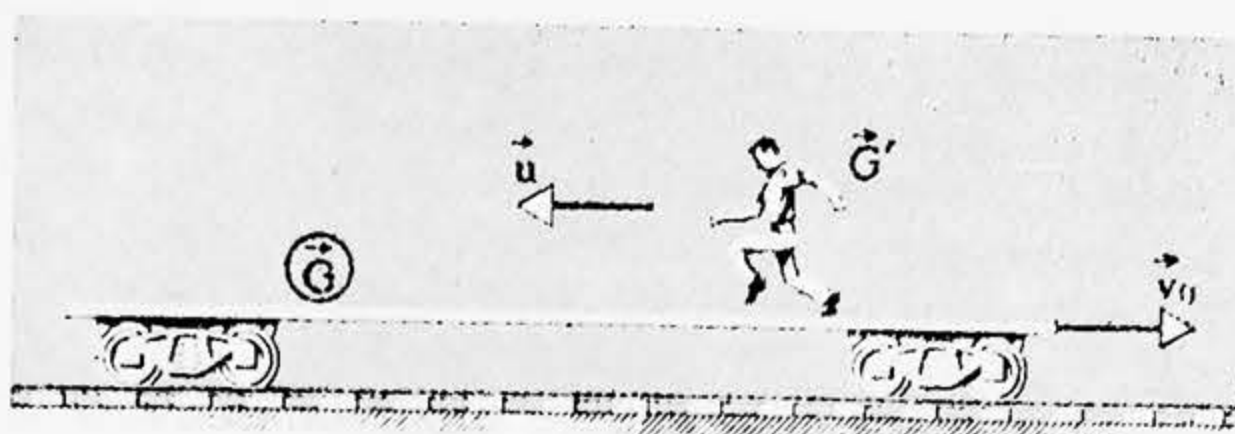


Figura 9-18.

aflându-se la o înălțime h deasupra mesei, să se afle viteza penei în momentul când punctul P atinge masa.

19. Un vagon platformă de greutate \vec{G} se poate mișca fără frecare de-a lungul unei șine orizontale așa cum este arătat în figura 9-18. Inițial un om de greutate \vec{G}' stă pe platformă care se mișcă spre dreapta cu viteza v_0 . Care va fi variația vitezei platformei dacă omul aleargă spre stînga (fig. 9-18) astfel încît viteza sa relativă față de platformă este v_{rel} imediat înainte de a sări de pe marginea stîngă?

20. Să presupunem că platforma din problema 19 este inițial în repaus. Ea transportă n oameni, fiecare de greutate \vec{G}' . Dacă fiecare om aleargă succesiv cu o viteză relativă v_{rel} și sare de pe platformă la marginea ei, vor imprima ei platformei o viteză mai mare decît dacă ar alerga toți și ar sări în același timp?

21. O mitralieră trage gloanțe de 50 g cu o viteză de 1000 m/s. Mitraliorul care ține mitraliera în mîinile sale, poate exercita o forță medie de 180 N împotriva mitralierei. Să se determine numărul maxim de gloanțe pe care le poate trage pe minut.

22. O rachetă cu masa de 6000 kg este așezată vertical pentru lansare. Dacă viteza de expulzare a gazului este de 1000 m/s, ce cantitate de gaz poate fi ejectată pe secundă pentru a furniza tracțiunea necesară: (a) să

învingă greutatea rachetei, (b) să imprime rachetei o accelerație inițială în sus de 19,6 m/s?

23. Să se arate că viteza rachetei este egală cu viteza de ejectare atunci când raportul M_0/M este e (aproximativ 2,7). Să se specifice sistemul de coordonate față de care este valabil acest rezultat. Să se arate de asemenea că viteza rachetei este de două ori viteza de ejectare atunci când M_0/M este e^2 (aproximativ 7,4).

24. Un combustibil de rachetă, larg folosit, este kerosen cu oxigen lichid, capabil să dea o viteză de ejectare v_{rel} de 2,5 km/s. (a) Neglijînd gravitația și greutatea rezervoarelor de combustibil, a pompelor etc., să se afle masa de combustibil necesară pentru fiecare kilogram de sarcină utilă pentru ca racheta, pornind din repaus, să atingă o viteză de 12 km/s (viteza de evadare din cîmpul gravitațional terestru este de 11,3 km/s). (b) În sonda „Mariner” lansată către Marte, masa inițială era de aproximativ 90 t, sarcina utilă de aproximativ 230 kg și raportul dintre „combustibil” și sarcina utilă de 400 : 1. Dacă racheta pleacă din repaus, ce viteză finală poate fi atinsă în aceste condiții? (c) Viteza finală reală a rachetei era de aproximativ 24 km/s, mult mai mare decît valoarea găsită la punctul (b). Să se explice aceasta, considerînd următorii factori: forțele externe și greutatea, neglijate la punctul (a), trebuie luate în considerație; racheta folosește un anumit număr de trepte; viteza inițială a

rachetei este cea a suprafeței Pământului în sistemul de referință legat de Soare.

25. Un avion rapid zboară cu 183 m/s. Motorul absoarbe în fiecare secundă 88 m³ de aer având o masă de 70 kg. Aerul este folosit pentru a arde 2,9 kg de combustibil în fiecare secundă. Energia este folosită pentru a comprima produsele de combustie și a le ejecta în spatele avionului cu 490 m/s față de avion. Să se afle tracțiunea motorului cu reacție și puterea dezvoltată.

26. Un vagon de marfă, fără acoperiș, având masa de 10 tone, se mișcă de-a lungul unei căi ferate orizontale cu frecări neglijabile, cu o viteză de 0,60 m/s în momentul când începe să plouă tare. Picăturile de ploaie cad vertical față de Pământ. Care este viteza vagonului după ce a colectat 0,50 tone de apă de ploaie? Ce ipoteze trebuie făcute (dacă trebuie făcute) pentru a obține răspunsul?

27. Un vagon de marfă umplut cu nisip are o gaură, astfel încât nisipul curge afară prin podea cu o viteză constantă — $dm/dt = \lambda$. O forță \vec{F} acționează asupra vagonului în direcția mișcării sale. Notînd viteza instantanee cu v , să se scrie ecuația mișcării vagonului.

28. O sfoară flexibilă de lungime l și de masă pe unitate de lungime μ , alunecă peste marginea unei mese fără frecări. La momentul $t=0$

peste marginea mesei atîrnă în repaus o lungime y_0 , iar la momentul t se află peste marginea mesei o lungime y care se mișcă cu viteza dy/dt . (a) Să se arate utilizînd notațiile din problema masei variabile, că $\vec{v}_{rel} = 0$, astfel încît ecuația mișcării are forma $m dv/dt = \vec{F}_{ext}$. (b) Să se arate că ecuația mișcării în cazul considerat este $l(d^2y/dt^2) = gy$. (c) Să se arate că conservarea energiei mecanice duce la ecuația $l(dy/dt)^2 - gy^2 = \text{const}$ și că aceasta este consistentă cu (b). (d) Să se arate că $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/l} \cdot t} + e^{-\sqrt{g/l} \cdot t})$ este soluție a ecuației mișcării (prin substituirea ei în (b)) și să se discute soluția.

29. Să considerăm o particulă asupra căreia acționează o forță care are aceeași direcție ca și viteza sa. (a) Folosind relația relativistă $F = d(mv)/dt$ pentru o particulă individuală, să se arate că

$$Fds = mv dv + v^2 dm.$$

(b) Folosind relația relativistă $v^2 = (1 - m_0^2/m^2)c^2$, să se arate că

$$mv dv = \frac{m_0^2 c^2}{m^3} dm.$$

(c) Să se substituie relațiile pentru $mv dv$ și v^2 în rezultatul de la (a) și să se arate că

$$W = \int Fds = (m - m_0)c^2.$$

Ciocniri

10-1. Ce este o ciocnire?

Noi aflăm multe lucruri despre particulele atomice, nucleare sau elementare, pe cale experimentală, observînd ciocnirile dintre ele. La scară macroscopică putem interpreta mai bine anumite lucruri, cum sînt proprietățile gazelor, cu ajutorul ciocnirilor dintre particule. În acest capitol vom aplica principiile conservării energiei și conservării impulsului la ciocnirile dintre particule.

Într-o ciocnire, asupra fiecărei particule care se ciocnește, acționează o forță relativ mare într-un timp relativ scurt. Ideea de bază a unei „ciocniri” este aceea că mișcarea particulelor care se ciocnesc (sau cel puțin a uneia dintre ele) variază abrupt și că putem face o distincție relativ clară între timpul „înainte de ciocnire” și timpul „după ciocnire”.

Cînd un baston lovește o minge de baseball, de exemplu, începutul și sfîrșitul ciocnirii pot fi determinate destul de precis. Bastonul este în contact cu mingea într-un interval de timp care este foarte scurt în comparație cu timpul în care urmărim mingea. În timpul ciocnirii bastonul exercită o forță mare asupra mingii (fig. 10-1). Această forță variază în timp într-un mod complicat pe care-l putem determina doar cu dificultate. Atît mingea cît și bastonul sînt deformatе în timpul ciocnirii. Forțele care acționează într-un timp scurt în comparație cu timpul de observație a sistemului, se cheamă forțe *impulsive*.

Atunci cînd o particulă alfa (^4He) „se ciocnește” cu un nucleu de aur (^{197}Au), forța care acționează între ele poate fi bine cunoscuta forță repulsivă datorită sarcinilor electrice ale particulelor. Particulele pot să nu se „atingă”, dar putem totuși vorbi de o „ciocnire”, deoarece o forță relativ puternică, acționînd într-un timp scurt în comparație cu timpul de observație al particulei alfa, a produs un efect marcant asupra mișcării particulei alfa.

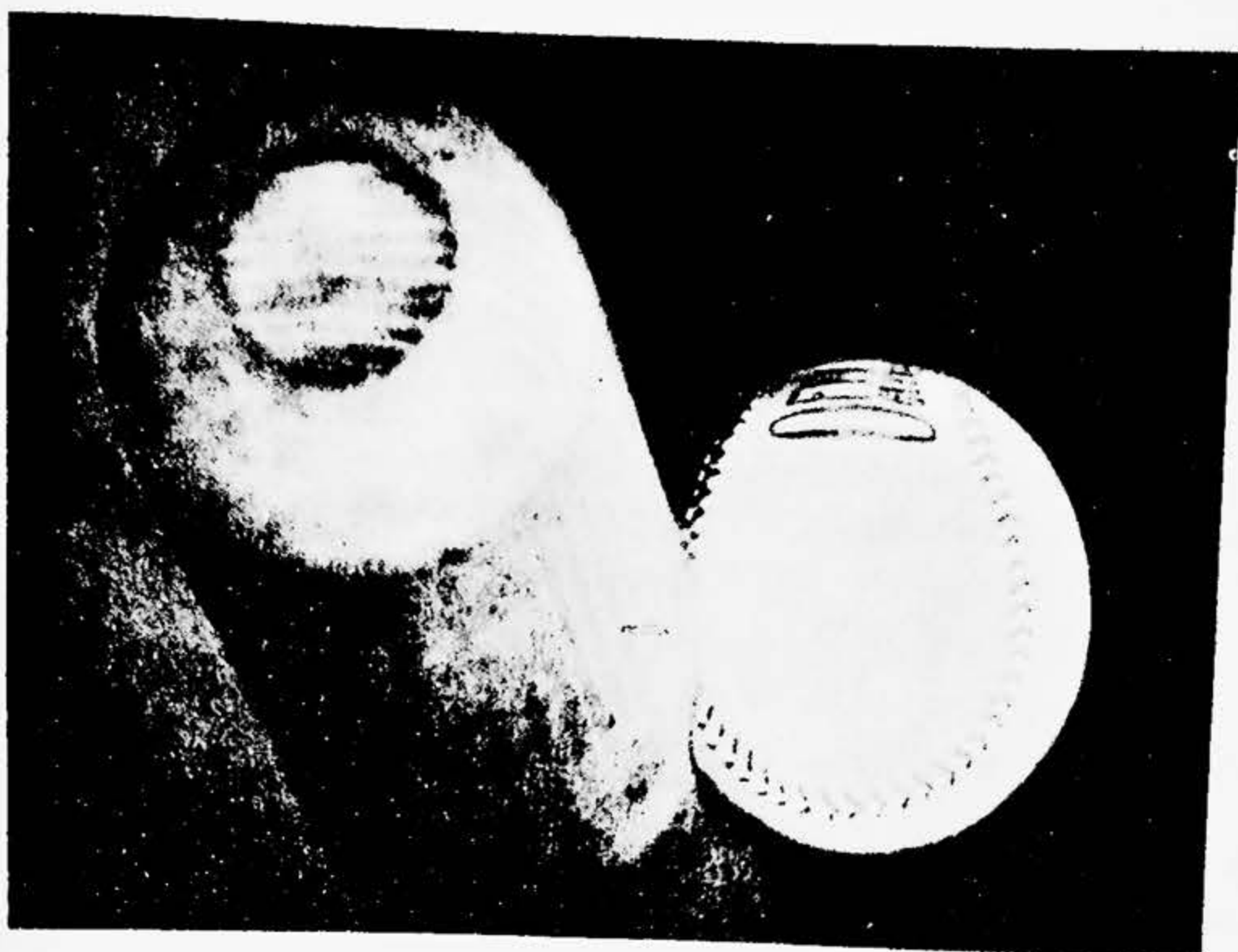


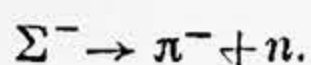
Figura 10-1. O fotografie instantanee a unui baston care lovește o minge de baseball. Observăm că deformarea mingii indică o intensitate enormă a forței impulsive în acest moment. (Prin amabilitatea lui Harold E. Edgerton, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.)

Atunci când un proton (${}^1\text{H}$ sau p) cu o energie de 25 MeV „se ciocnește” cu un nucleu al unui izotop de argint (de exemplu ${}^{107}\text{Ag}$), particulele pot într-adevăr „să se atingă”, forța predominantă care acționează între ele în acest caz nefiind forța repulsivă electrostatică, ci forța nucleară atractivă puternică, cu rază de acțiune scurtă (vezi pag. 137). Protonul poate intra în nucleul de argint, formînd o structură compusă. La scurt timp după aceea — „intervalul de ciocnire” poate fi de 10^{-13} s — această structură compusă se poate rupe în două particule *diferite*, conform unei scheme ca cea de mai jos:



în care α ($={}^4\text{He}$) este particula alfa. În modul acesta putem lărgi conceptul de ciocnire pentru a include evenimentele (numite de obicei *reacții*) în care identitatea particulelor ce interacționează se schimbă în timpul evenimentului. Principiile de conservare sînt aplicabile tuturor acestor exemple.

Dacă dorim, putem lărgi definiția „ciocnirii” chiar mai mult pînă la a include dezintegrarea spontană a unei particule individuale în două sau mai multe alte particule. Un exemplu este dezintegrarea particulei elementare, numită *particulă sigma*, în două alte particule, un pion și un neutron (vezi anexa H, vol. II):



Deși cele două corpuri nu vin în contact în acest proces, (dacă nu-l considerăm în sens invers), el are multe trăsături comune cu ciocnirile: (1) există o distincție clară între „înainte de eveniment” și „după eveniment”, și (2) legile de conservare a impulsului și energiei ne permit să aflăm multe lucruri despre astfel de procese, studiind situațiile „înainte” și „după” proces, chiar dacă știm puține lucruri despre legile forței care operează în decursul „evenimentului” însuși.

În studiul ciocnirilor din acest capitol, scopul nostru va fi următorul: dându-se mișcările inițiale ale particulelor care se ciocnesc, ce putem afla despre mișcările lor finale în baza principiilor de conservare a impulsului și energiei, presupunând că nu știm nimic despre forțele care acționează în timpul ciocnirii?

10-2. Impulsul forței și impulsul particulei

Să presupunem că figura 10-2 reprezintă intensitatea forței exercitate asupra unui corp în timpul unei ciocniri. Presupunem că forța are o direcție constantă. Ciocnirea începe în momentul t_i și sfârșește în momentul t_f , forța fiind nulă înainte și după ciocnire. Din ecuația (9-12) putem scrie variația impulsului $d\vec{p}$ al unui corp într-un timp dt în decursul căruia asupra lui acționează o forță \vec{F} , astfel:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \quad (10-1)$$

Putem afla variația impulsului corpului în timpul unei ciocniri integrând pe timpul ciocnirii, adică

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \quad (10-2)$$

în care indicii i (=inițial) și f (=final) se referă la timpul înainte și respectiv timpul după ciocnire. Integrala unei forțe extinse pe intervalul de timp în decursul căruia acționează forța se numește *impulsul forței* (impulsie sau percuție) \vec{J} . Prin urmare variația impulsului unui corp asupra căruia acționează o forță impulsivă este egală cu impulsul forței. Atât impulsul forței cât și impulsul particulei sînt vectori și au aceleași unități și aceleași dimensiuni.

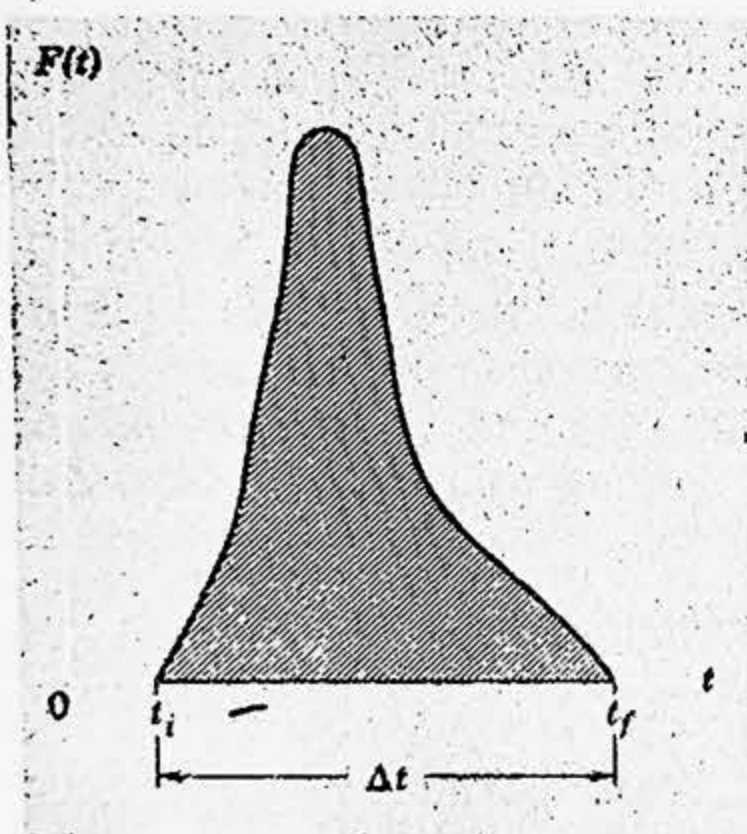


Figura 10-2. Modul cum o forță impulsivă $F(t)$ poate varia în timp în procesul unei ciocniri care începe în momentul t_i și sfârșește în momentul t_f .

Forța impulsivă reprezentată în figura 10-2 este presupusă ca avînd o direcție constantă. Impulsul acestei forțe, $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$, este reprezentat ca mărime prin aria cuprinsă de curba forță-timp¹.

10-3. Conservarea impulsului în timpul ciocnirilor

Să considerăm acum o ciocnire între două particule, ca cele arătate în figura 10-3, de mase m_1 și m_2 . În timpul ciocnirii aceste particule exercită forțe mari una asupra celeilalte. În fiecare moment \vec{F}_1 este forța exercitată asupra particulei 1 de către particula 2, și \vec{F}_2 este forța exercitată asupra particulei 2 de către particula 1. În virtutea legii a treia a lui Newton, aceste forțe în fiecare moment sînt egale în modul și opuse ca sens.

Variația impulsului particulei 1 care rezultă datorită ciocnirii este

$$\Delta \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1 dt = \vec{\bar{F}}_1 \Delta t,$$

în care $\vec{\bar{F}}_1$ este valoarea medie a forței \vec{F}_1 în decursul intervalului de timp în care are loc ciocnirea $\Delta t = t_f - t_i$.

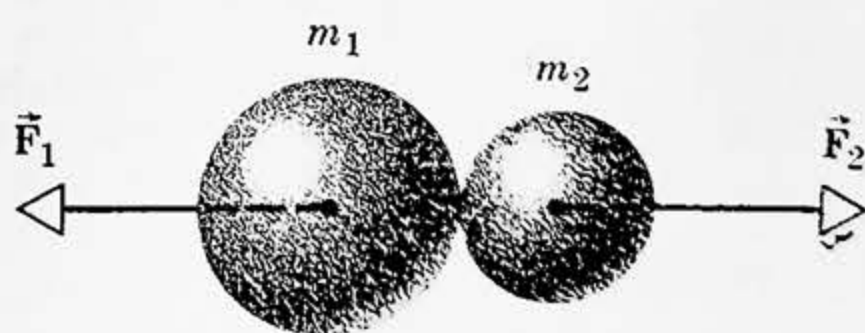
Variația impulsului particulei 2 care rezultă datorită ciocnirii este

$$\Delta \vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_2 dt = \vec{\bar{F}}_2 \Delta t$$

în care $\vec{\bar{F}}_2$ este valoarea medie a forței \vec{F}_2 în decursul intervalului de timp al ciocnirii $\Delta t = t_f - t_i$.

Dacă asupra particulelor nu acționează nici un fel de alte forțe, $\Delta \vec{p}_1$ și $\Delta \vec{p}_2$ dau variația totală a impulsului fiecărei particule. Am văzut însă

Figura 10-3. Două „particule” m_1 și m_2 în timpul ciocnirii suferă forțe egale în modul și opuse ca sens de-a lungul liniei centrelor lor, conform legii a treia a lui Newton; $\vec{F}_2(t) = -\vec{F}_1(t)$.



¹ Impulsul forței \vec{J} , definit prin ecuația (10-2), nu depinde în mod critic de valorile precise ale lui t_i și t_f atîta timp cît acești timpi sînt suficient de depărtați între ei pentru a include aria hașurată din figura 10-2. Pentru motive care vor apare mai tîrziu, alegem de obicei pe t_i și t_f separați îndeajuns pentru a face clară distincția dintre „ciocnire” și „intervale înainte și după ciocnire”.

că în fiecare moment $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, astfel încît $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ și deci

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Dacă considerăm cele două particule ca un sistem izolat, momentul total al sistemului este

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

și variația totală a impulsului sistemului ca rezultat al ciocnirii este zero, adică

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0.$$

Prin urmare, dacă nu există forțe externe, impulsul total al sistemului nu se schimbă prin ciocnire. Forțele impulsive care acționează în timpul ciocnirii sînt forțe interne care n-au nici un efect asupra impulsului total al sistemului.

Am definit o ciocnire ca o interacțiune care se produce într-un timp Δt , neglijabil în comparație cu timpul în care observăm sistemul. Putem caracteriza de asemenea o ciocnire ca un eveniment în care forțele externe care pot acționa asupra sistemului sînt neglijabile în comparație cu forțele impulsive de ciocnire. Cînd un baston lovește o minge de baseball sau o minge de golf, sau cînd o bilă de biliard lovește o altă bilă, asupra sistemului acționează forțe externe. Gravitația sau frecările exercită forțe asupra acestor corpuri, de exemplu; aceste forțe externe pot să nu fie aceleași asupra fiecărui corp care se ciocnește și nici nu trebuie neapărat să fie echilibrate sau compensate de alte forțe externe.

Chiar și așa este legitim să neglijăm aceste forțe externe în timpul ciocnirii și să presupunem că conservarea impulsului este asigurată deoarece aproape totdeauna este adevărat faptul că forțele externe sînt neglijabile în comparație cu forțele impulsive de ciocnire. Ca rezultat, variația impulsului unei particule în timpul unei ciocniri determinată de o forță externă este neglijabilă în comparație cu variația impulsului acelei particule determinată de forța impulsivă de ciocnire (fig. 10-4).

De exemplu, cînd un baston lovește o minge de baseball, ciocnirea durează doar o fracțiune mică dintr-o secundă. Deoarece variația impulsului este mare și timpul de ciocnire este mic, rezultă din

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$$

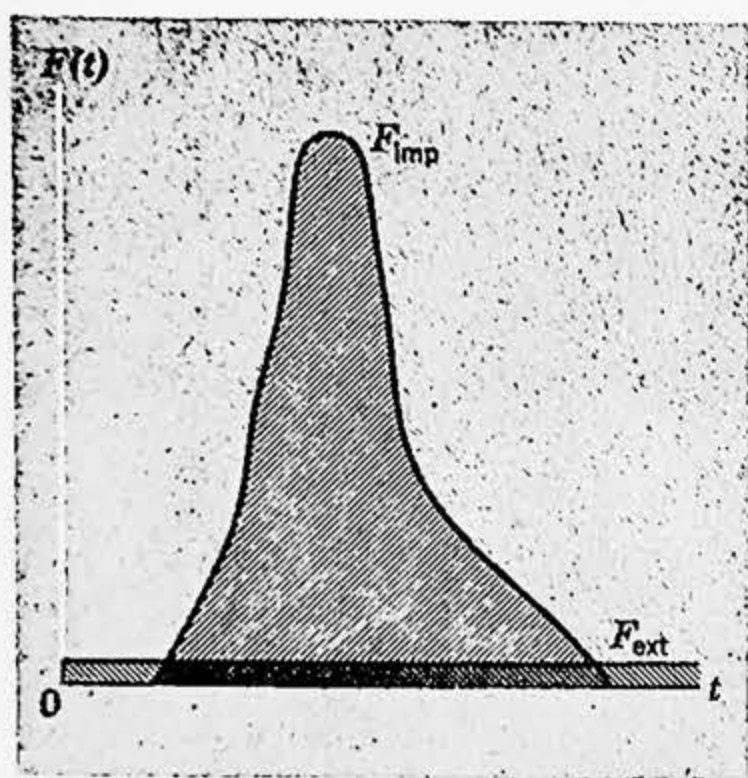


Figura 10-4. În timpul unei ciocniri forța impulsivă F_{imp} este în general mult mai mare decît oricare forță externă F_{ext} ce ar putea acționa asupra sistemului.

că forța impulsivă medie \bar{F} este relativ mare. Comparată cu această forță, forța externă de gravitație este neglijabilă. În timpul ciocnirii putem neglija, cu siguranță, această forță externă în determinarea variației mișcării mingii; cu cât durata ciocnirii este mai scurtă, cu atât aceasta este mai adevărat.

De aceea, în practică, putem aplica principiul conservării impulsului în timpul ciocnirilor dacă timpul de ciocnire este suficient de scurt. Putem spune atunci că impulsul unui sistem de particule imediat înainte de ciocnirea particulelor este egal cu impulsul sistemului imediat după ciocnirea particulelor.

10-4. Ciocnirile în cazul unidimensional

Putem totdeauna calcula mișcările corpurilor după ciocnire din mișcările lor înainte de ciocnire dacă cunoaștem forțele care acționează în timpul ciocnirii și dacă putem rezolva ecuațiile mișcării. Adesea nu cunoaștem însă aceste forțe. Cu toate acestea, principiul conservării impulsului trebuie să fie valabil în timpul ciocnirii. Știm deja că principiul conservării energiei totale este valabil. Deși s-ar putea să nu cunoaștem detaliile interacțiunii, putem folosi aceste principii în multe cazuri pentru a prezice rezultatele ciocnirii.

Ciocnirile sînt clasificate de obicei după cum *energia cinetică* se conservă sau nu în timpul ciocnirii. Dacă energia cinetică se conservă, ciocnirea se numește *elastică*. Altfel, ciocnirea se numește *inelastică*. Ciocnirile dintre particulele atomice, nucleare sau fundamentale sînt uneori elastice. Acestea sînt de fapt singurele ciocniri veritabil elastice cunoscute. Ciocnirile dintre corpuri obișnuite (macroscopice) sînt totdeauna inelastice într-o anumită măsură. Putem însă adesea trata astfel de ciocniri ca fiind aproximativ elastice, ca de exemplu ciocnirile dintre bile de fildeș sau de sticlă. Dacă două corpuri se lipesc după ciocnire, ciocnirea se numește *complet inelastică* (plastică). De exemplu ciocnirea dintre un glonte și ținta sa este complet inelastică dacă glonteale rămîine înfipt în țintă. Termenul complet inelastic *nu* înseamnă că toată energia cinetică inițială se pierde; după cum vom vedea, el înseamnă mai degrabă că pierderea este maximă posibilă, compatibilă cu conservarea impulsului.

Chiar dacă forțele de ciocnire nu sînt cunoscute, putem afla mișcările particulelor după ciocnire din mișcările lor dinainte de ciocnire, dacă ciocnirea este complet inelastică, sau, dacă ciocnirea este elastică, cu condiția ca ciocnirea să fie unidimensională. Pentru o ciocnire unidimensională mișcarea relativă după ciocnire are loc de-a lungul aceleiași drepte ca și mișcarea relativă înainte de ciocnire. Pentru moment, ne restrîngem la mișcarea unidimensională.

Să considerăm întîi o ciocnire unidimensională *elastică*. Ne putem imagina două sfere netede fără rotație care se mișcă inițial de-a lungul drepte care unește centrele lor, apoi se ciocnesc și se mișcă de-a lungul aceleiași drepte, fără rotație, după ciocnire (vezi fig. 10-5). Aceste corpuri

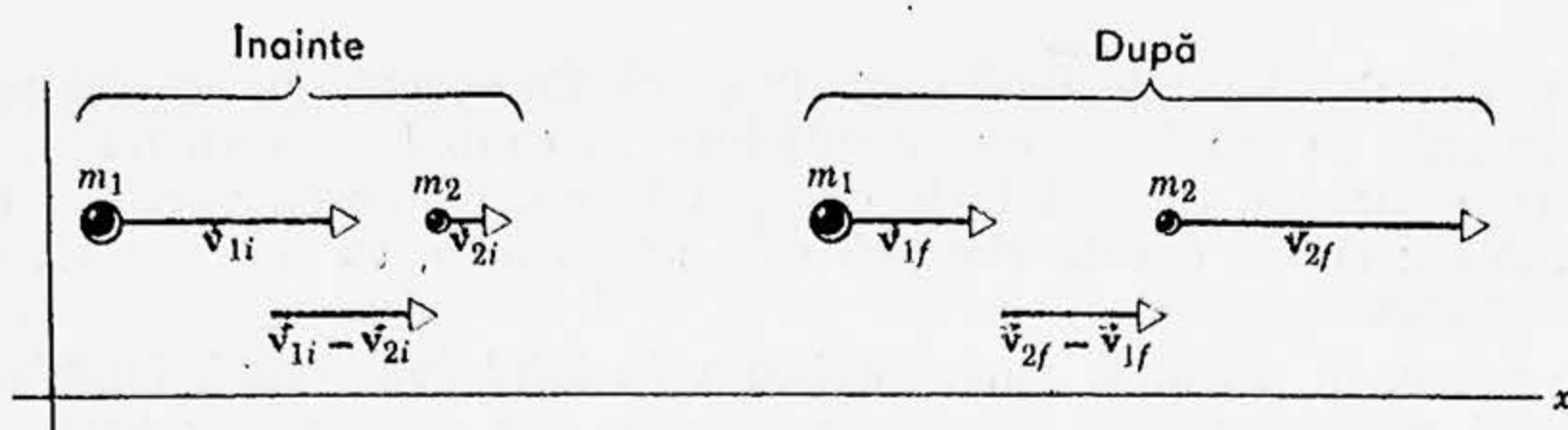


Figura 10-5. Două sfere înainte și după o ciocnire elastică. Viteza $\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}$ a lui m_1 față de m_2 înainte de ciocnire este egală cu viteza $\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}$ a lui m_2 față de m_1 după ciocnire.

exercită forțe unul asupra celuilalt în timpul ciocnirii, dirijate de-a lungul dreptei inițiale a mișcării, astfel încât mișcarea finală are loc de asemenea de-a lungul aceleiași drepte.

Masele sferelor sînt m_1 și m_2 , componentele (scalare ale) vitezei sînt v_{1i} și v_{2i} înainte de ciocnire, și v_{1f} și v_{2f} după ciocnire¹. Alegem direcția pozitivă a impulsului și vitezei spre dreapta. Presupunem, dacă nu se specifică contrariul, că vitezele particulelor ce se ciocnesc sînt suficient de mici pentru a nu fi nevoie să folosim expresiile relativiste ale impulsului și energiei cinetice. Atunci, din conservarea impulsului obținem

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

Deoarece ciocnirea este elastică, energia cinetică se conservă și obținem

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Este clar dintr-odată că, dacă cunoaștem masele și vitezele inițiale, putem calcula cele două viteze finale v_{1f} și v_{2f} din aceste două ecuații.

Ecuatia de conservare a impulsului poate fi scrisă astfel

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (10-3)$$

și ecuația de conservare a energiei cinetice poate fi scrisă astfel

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2), \quad (10-4)$$

Împărțind ecuația (10-4) la ecuația (10-3) și presupunînd că $v_{2f} \neq v_{2i}$ și $v_{1f} \neq v_{1i}$ (vezi întrebarea 5), obținem

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

și după rearanjarea termenilor,

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}. \quad (10-5)$$

¹ Notăția folosită este ușor de interpretat și de memorat și relevă multe informații într-o formă compactă și simplă. Indicii numerici, cum sînt 1 și 2, specifică particula, iar indicii literali, i și f , indică valoarea inițială (înainte de ciocnire) și respectiv valoarea finală (după ciocnire).

Aceasta ne spune că într-o ciocnire unidimensională elastică, viteza relativă de apropiere înainte de ciocnire este egală cu viteza relativă de separare după ciocnire.

Pentru a găsi componentele vitezei v_{1f} și v_{2f} după ciocnire din componentele vitezei v_{1i} și v_{2i} înainte de ciocnire, putem folosi oricare două din cele trei ecuații precedente numerotate. Astfel din ecuația (10-5) obținem:

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}.$$

Introducând aceasta în ecuația (10-3) și rezolvând în raport cu v_{1f} , găsim că

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

Analog, introducând $v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$ (din ecuația 10-5) în ecuația (10-3) și rezolvând în raport cu v_{2f} , obținem

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

Există mai multe cazuri particulare de deosebit interes. De exemplu, dacă particulele ce se ciocnesc au aceeași masă, m_1 este egal cu m_2 , astfel încât cele două ecuații de mai sus devin

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{și} \quad v_{2f} = v_{1i}.$$

Adică, într-o ciocnire elastică unidimensională a două particule de masă egală, particulele pur și simplu schimbă vitezele între ele, în timpul ciocnirii.

Un alt caz care prezintă interes este acela în care o particulă m_2 este inițial în repaus. Atunci v_{2i} este egal cu zero și

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}, \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}.$$

Desigur, dacă $m_1 = m_2$ atunci $v_{1f} = 0$ și $v_{2f} = v_{1i}$ după cum era de așteptat. Prima particulă este „oprită” iar cea de-a doua „zboară” cu viteza pe care a avut-o inițial prima particulă. Dacă însă m_2 este mult mai mare decât m_1 obținem

$$v_{1f} \cong -v_{1i} \quad \text{și} \quad v_{2f} \cong 0.$$

Adică, dacă o particulă ușoară se ciocnește cu o particulă mult mai masivă, aflată în repaus, viteza particulei ușoare este aproximativ îndreptată în sens invers în timp ce particula masivă rămâne aproximativ în repaus. De exemplu, să presupunem că lăsăm să cadă vertical o minge pe o suprafață orizontală fixată de sol. Aceasta reprezintă de fapt o ciocnire dintre minge și pământ. Dacă ciocnirea este elastică mingea va ricoșa având viteza îndreptată în sens invers și va atinge aceeași înălțime ca cea de la care a căzut.

Dacă, în sfârșit, m_2 este mult mai mic decât m_1 , obținem

$$v_{1f} \cong v_{1i}, \quad v_{2f} \cong 2v_{1i}$$

Aceasta înseamnă că viteza particulei incidente masive este practic ne-schimbată prin ciocnirea cu o particulă ușoară aflată în repaus, în schimb particula ușoară ricoșează cu o viteză aproximativ dublă față de viteza particulei incidente. Mișcarea unei bile de popice abia dacă este afectată de ciocnirea cu o minge de plajă umflată, de aceeași dimensiune, dar mingea din urmă ricoșează cu viteză mare.

Neutronii produși într-un reactor prin fisiunea atomilor de uraniu se mișcă foarte iute și trebuie încetiniți dacă vrem ca ei să producă mai multe fisiuni. Presupunând că ei suferă ciocniri elastice cu nucleele aflate în repaus, ce material trebuie ales pentru a modera neutronii într-un reactor? Putem răspunde la această întrebare pe baza considerațiilor discutate mai sus. Dacă țintele în repaus ar fi nuclee masive, precum plumbul, neutronii ar ricoșa înapoi cu o viteză practic egală cu viteza lor inițială. Dacă țintele ar fi mult mai ușoare decât neutronii, precum electronii, neutronii s-ar mișca practic cu aceeași viteză pe care au avut-o inițial. Dacă însă țintele în repaus sînt particule de masă aproximativ egală cu masa neutronilor, neutronii vor fi aproape opriți într-o ciocnire (frontală) cu aceștia. Prin urmare hidrogenul al cărui nucleu (proton) are aproape aceeași masă ca neutronul, ar fi cel mai eficient. Alte considerații influențează alegerea unui moderator pentru neutroni, însă considerațiile privind impulsul și energia limitează alegerea la elementele ușoare.

Dacă o ciocnire este *neelastică* atunci, prin definiție, energia cinetică nu se conservă. Energia cinetică finală poate fi mai mică decât valoarea inițială, diferența fiind converită în ultimă instanță, de exemplu, în căldură sau în energia potențială de deformare în timpul ciocnirii sau energia cinetică finală poate excede valoarea inițială ca și cum s-ar elibera o energie potențială în timpul ciocnirii. În orice caz, conservarea impulsului este încă valabilă, la fel ca și conservarea energiei *totale*.

Să considerăm în sfîrșit o ciocnire *complet neelastică* (plastică). Cele două particule fuzionează sau se lipesc împreună după ciocnire, astfel încît vor avea o viteză finală comună \vec{v}_f . Nu este necesar să restrîngem discuția la mișcarea unidimensională. Folosind doar principiul conservării impulsului, găsim

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f. \quad (10-6)$$

Aceasta determină pe \vec{v}_f dacă \vec{v}_{1i} și \vec{v}_{2i} sînt cunoscute.

Exemplul 1. O minge de baseball avînd greutatea de 1,47 N este lovită de un baston în timp ce zboară orizontal cu o viteză de 30 m/s. După lovire mingea zboară cu o viteză de 40 m/s într-o direcție opusă mișcării sale inițiale. Să se determine impulsul forței de ciocnire (percuția).

Nu putem calcula impulsul forței din definiția $\vec{J} = \int \vec{F} dt$ deoarece nu cunoaștem forța exercitată asupra mingii în funcție de timp. Totuși, am văzut (ecuația 10-2) că variația impulsului unei particule asupra căreia acționează o forță impulsivă, este egală cu impulsul forței. Prin urmare

$$\vec{J} = \text{variația impulsului} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \left(\frac{G}{g}\right) (\vec{v}_f - \vec{v}_i).$$

Presupunând în mod arbitrar că direcția lui \vec{v}_i este pozitivă, impulsul forței este

$$\vec{J} = \left(\frac{1,47 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2} \right) (-40 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}) = -10,5 \text{ N}\cdot\text{s}.$$

Semnul minus arată că direcția impulsului forței care acționează asupra mingii este opusă vitezei inițiale a mingii.

Nu putem determina forța de ciocnire din datele problemei. În adevăr, orice forță al cărei impuls este de $-10,5 \text{ N}\cdot\text{s}$ va produce aceeași variație a impulsului particulei. De exemplu, dacă bastonul și mingea erau în contact timp de $0,0010 \text{ s}$, forța medie în timpul acestui interval ar fi

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-10,5 \text{ N}\cdot\text{s}}{0,010 \text{ s}} = -1,05 \text{ kN}.$$

Pentru un timp de contact mai scurt forța medie ar fi mai mare. Forța actuală poate avea o valoare maximă mai mare decât această valoare medie.

Cît de departe va cădea mingea datorită gravitației în decursul timpului de ciocnire?

Exemplul 2. (a) Cu ce fracțiune descrește energia cinetică a unui neutron (de masă m_1) într-o ciocnire elastică frontală cu un nucleu atomic (de masă m_2) inițial în repaus?

Energia cinetică inițială a neutronului E_{ci} este $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$. Energia sa cinetică finală E_{cf} este $\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2$. Descreșterea relativă a energiei cinetice este

$$\frac{E_{ci} - E_{cf}}{E_{ci}} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}.$$

Dar pentru o astfel de ciocnire

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

astfel încît

$$\frac{E_{ci} - E_{cf}}{E_{ci}} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

(b) Să se afle descreșterea relativă a energiei cinetice a unui neutron atunci cînd el ciocnește în modul acesta un nucleu de plumb, un nucleu de carbon și un nucleu de hidrogen. Raportul dintre masa nucleului și masa neutronului ($-m_2/m_1$) este 206 pentru plumb, 12 pentru carbon și 1 pentru hidrogen.

Pentru plumb, $m_2 = 206 m_1$,

$$\frac{E_{ci} - E_{cf}}{E_{ci}} = \frac{4 \cdot 206}{207^2} = 0,02 \text{ sau } 2\%.$$

Pentru carbon, $m_2 = 12 m_1$,

$$\frac{E_{ci} - E_{cf}}{E_{ci}} = \frac{4 \cdot 12}{13^2} = 0,28 \text{ sau } 28\%$$

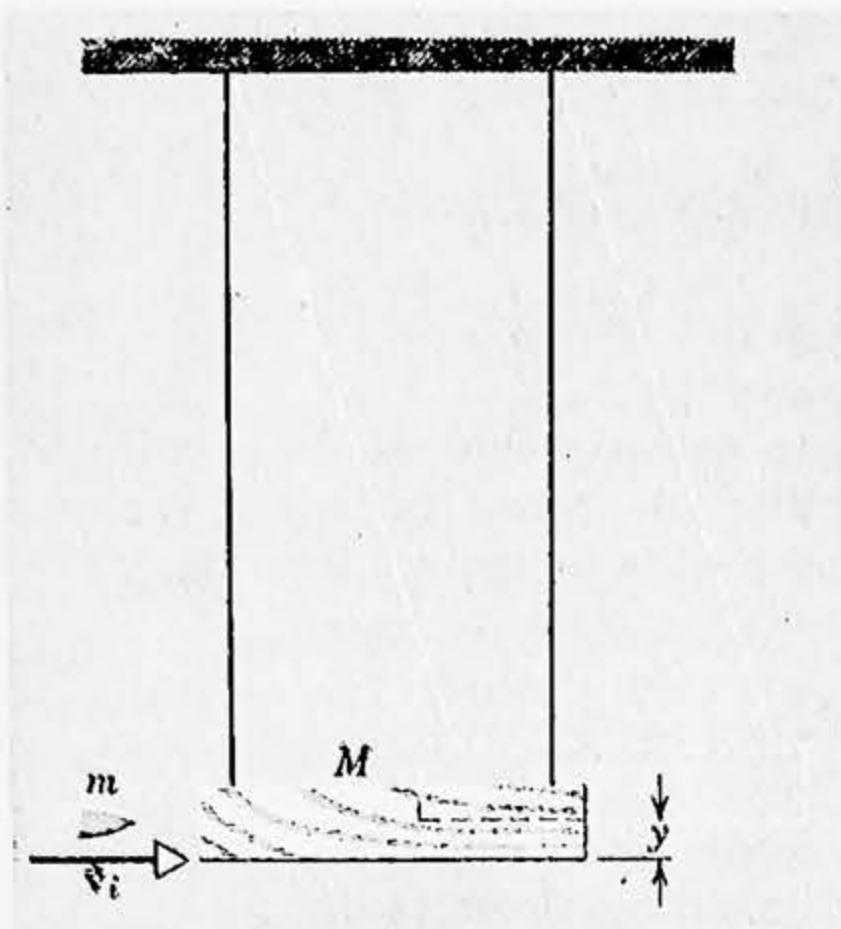


Figura 10-6. Exemplul 3. Un pendul balistic constind dintr-un bloc mare de lemn de masă M suspendat cu ajutorul a două fire. Atunci cînd un glonte de masă m și viteză \vec{v}_i intră în el, blocul deviază atîngînd o înălțime maximă y .

nirii și componenta orizontală a impulsului se conservă. Viteza sistemului după ciocnire v_f este mult mai mică decît viteza glontelui înainte de ciocnire. Această viteză finală poate fi ușor determinată, astfel încît viteza inițială a glontelui poate fi calculată din conservarea impulsului.

Impulsul inițial al sistemului este cel al glontelui, mv_i , și impulsul sistemului imediat după ciocnire este $(m+M)v_f$, astfel încît

$$mv_i = (m+M)v_f.$$

După terminarea ciocnirii, pendulul și glonte deviază pînă la o înălțime maximă y , unde energia cinetică rămasă după ciocnire este convertită în energie potențială gravitațională. Atunci folosind conservarea energiei mecanice pentru această parte a mișcării, obținem

$$\frac{1}{2} (m+M)v_f^2 = (m+M)gy.$$

Rezolvînd aceste două ecuații în raport cu v_f , obținem

$$v_i = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gy}.$$

Prin urmare, putem afla viteza inițială a glontelui măsurînd pe m , M și y .

Pentru hidrogen, $m_2 = m_1$,

$$\frac{E_{ef} - E_{ef}}{E_{ef}} = \frac{4 \cdot 1}{2^2} = 1 \text{ sau } 100\%.$$

Aceste rezultate explică de ce parafina, care este bogată în hidrogen, este mult mai eficientă în frînarea electronilor decît plumbul.

Exemplul 3. Pendulul balistic. Pendulul balistic este folosit pentru măsurarea vitezei gloanțelor. Pendulul reprezintă un bloc mare de lemn, de masă M , atîrnat vertical cu ajutorul a două fire. Un glonte de masă m , mișcîndu-se cu o viteză orizontală v_i , lovește pendulul și rămîne înfipt în el (fig. 10-6). Dacă timpul de ciocnire (timpul necesar glontelui pentru a se opri față de bloc) este foarte mic în comparație cu timpul de deviere al pendulului, firele de suspensie rămîn aproximativ verticale în timpul ciocnirii. De aceea, nu acționează vreo forță externă orizontală asupra sistemului (glonte+pendul) în timpul cioc-

Energia cinetică a glontelui este inițial $\frac{1}{2}mv_i^2$ și energia cinetică a sistemului (glonte+pendul) imediat după ciocnire este $\frac{1}{2}(m+M)v_f^2$. Raportul este

$$\frac{\frac{1}{2}(m+M)v_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2} = \frac{m}{m+M}.$$

De exemplu, dacă glonte are o masă $m=5$ g și blocul are o masă $M=2,0$ kg, rămâne doar aproximativ un sfert dintr-un procent din energia cinetică inițială; peste 99% este convertit în alte forme de energie, cum este căldura.

Viteza centrului de masă a două particule nu se schimbă prin ciocnirea lor, deoarece ciocnirea nu schimbă impulsul total al sistemului format din cele două particule, ci numai distribuția impulsului între cele două particule. Impulsul sistemului poate fi scris (ecuația 9-15) astfel: $\vec{P}=(m_1+m_2)\vec{v}_{cm}$. Dacă asupra sistemului nu acționează nici un fel de forțe externe, \vec{P} va fi constant atât înainte cât și după ciocnire și centrul de masă se va mișca cu viteză constantă.

Dacă alegem un sistem de referință legat de centrul de masă, atunci în acel sistem al centrului de masă (SCM), $\vec{v}_{cm}=0$ și $\vec{P}=0$. Există o mare simplitate și simetrie în descrierea ciocnirilor în raport cu centrul de masă și de obicei se procedează în acest fel în fizica nucleară. Indiferent dacă ciocnirile sînt elastice sau inelastice, impulsul se conservă, și în sistemul centrului de masă (SCM) impulsul total este zero. Aceste rezultate sînt valabile în cazul bi- sau tridimensional, la fel ca și în cazul unidimensional deoarece impulsul este o mărime vectorială.

Ca un exemplu să considerăm o ciocnire elastică frontală între două particule de mase m_1 și m_2 . Fie $m_2=3m_1$ și fie m_2 în repaus astfel încît $v_{2i}=0$ în sistemul laboratorului (SL). Impulsul total al celor două particule este chiar impulsul particulei incidente m_1v_{1i} , astfel încît

$$m_1v_{1i}=(m_1+m_2)v_{cm}$$

sau

$$v_{cm}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i}=\frac{1}{4}v_{1i}.$$

După ciocnire, m_1 are o viteză $v_{1f}=-\frac{1}{2}v_{1i}$ și m_2 are o viteză $v_{2f}=\frac{1}{2}v_{1i}$. Impulsul total al celor două particule ($m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$) este același ca și înaintea ciocnirii, și mișcarea centrului de masă nu se schimbă (verificați aceasta). În figura 10-7, a, se arată o serie de „instantanee” ale ciocnirii luate la intervale de timp egale, așa cum sînt văzute în sistemul de referință al laboratorului (SL). În figura 10-7, b, se arată aceeași situație așa cum este văzută în sistemul de referință al centrului de masă (SCM), în care v_{cm} este zero. Observăm simetria mișcărilor particulelor în ultimul caz. Particula care vine din stînga are o viteză $\frac{3}{4}v_{1i}$ față de centrul de masă (în care v_{1i} este viteza lui m_1 din sistemul laboratorului) și se întoarce înapoi cu aceeași viteză. Particula care vine din dreapta are o viteză $\frac{1}{4}v_{1i}$ față de centrul de masă și se întoarce înapoi cu aceeași viteză.

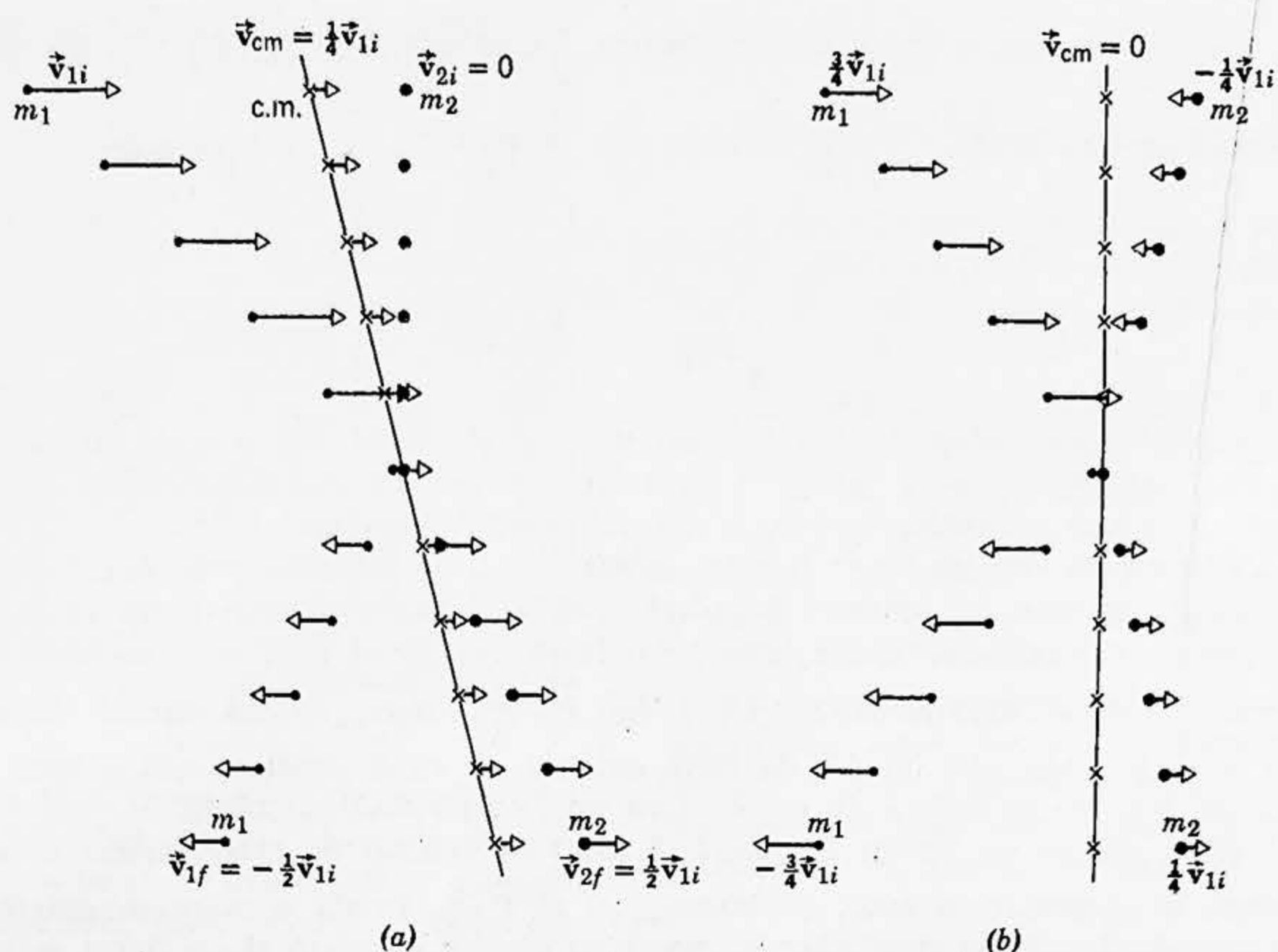


Figura 10-7. (a) O ciocnire elastică în sistemul de referință al laboratorului (SL). (b) Aceeași ciocnire elastică în sistemul de referință al centrului de masă (SCM).

Dacă ciocnirea este complet neelastică, mișcarea după ciocnire este pur și simplu mișcarea a două particule care se mișcă cuplate împreună în centrul de masă. În figurile 10-8, a și 10-8, b se arată cum ar fi descrisă ciocnirea din figura 10-7, — presupusă acum complet neelastică, — în sistemul laboratorului și respectiv în sistemul centrului de masă. Aceste figuri sînt analoge celor precedente pînă la producerea ciocnirii; după ciocnire însă mișcarea centrului de masă descrie mișcarea întregului sistem.

10-5. „Adevărata” măsură a unei forțe

Distincția dintre energia cinetică și impuls și legătura acestor concepte cu forța nu au fost clar înțelese pînă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Oamenii de știință disputau faptul dacă energia cinetică sau dacă impulsul ar fi „adevărata” măsură a efectului unei forțe asupra unui corp. Descartes susținea că atunci cînd corpurile interacționează, singurul lucru ce se poate produce este transferul impulsului de la un corp la altul, deoarece impulsul total al universului rămîne constant; prin urmare singura măsură „adevărată” a unei forțe este variația impulsului pe care ea o produce într-un timp dat. Leibniz a atacat această concepție

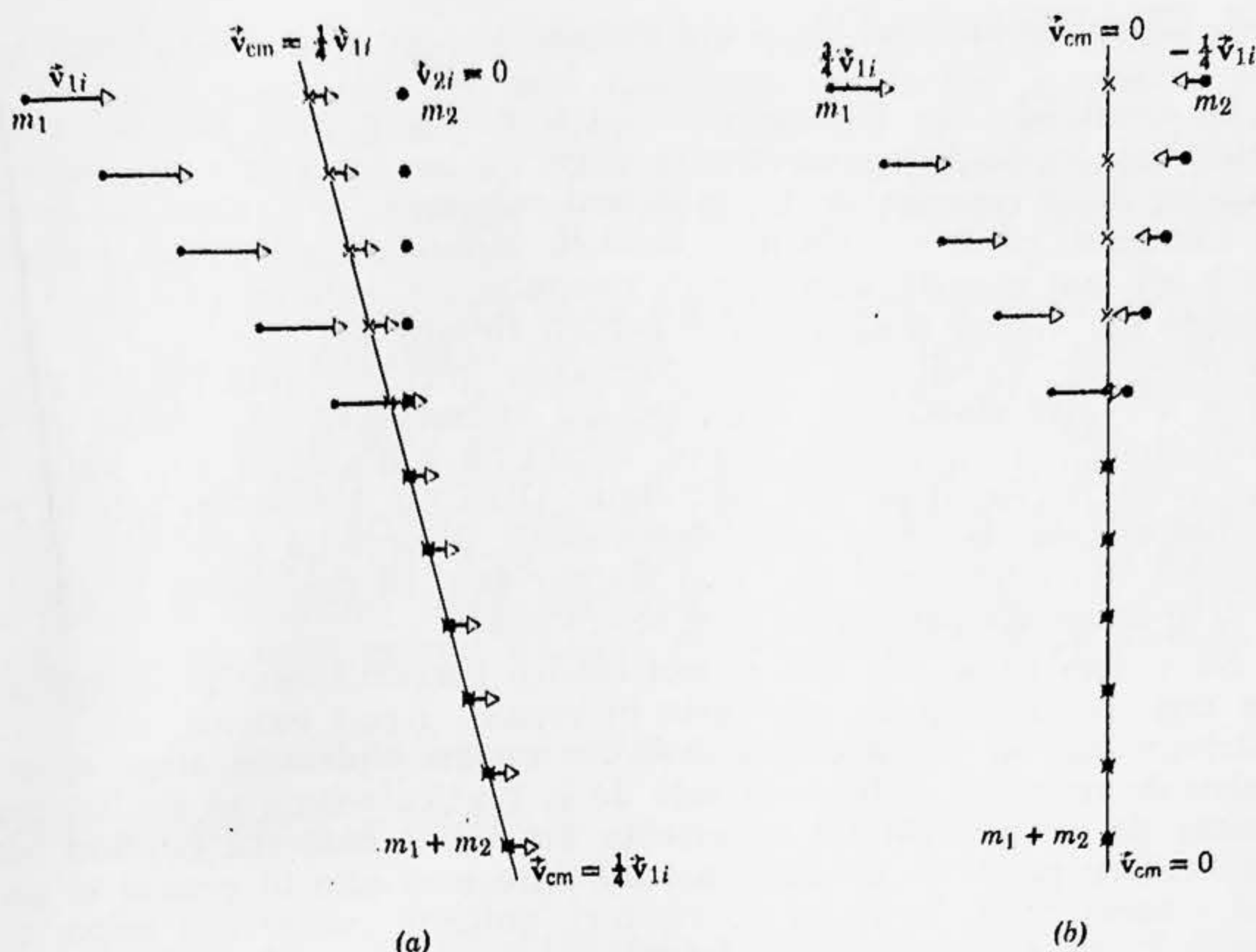


Figura 10-8. (a) O ciocnire complet neelastică în sistemul laboratorului. (b) Aceeași ciocnire complet neelastică în sistemul centrului de masă. În fiecare caz mișcarea înainte de ciocnire este aceeași ca cea din figura 10-7.

și a susținut că „adevărata” măsură a acțiunii unei forțe este variația energiei cinetice pe care ea o produce (numită de acesta *vis viva* sau forță vie, luată dublu față de ceea ce noi numim astăzi energie cinetică).

În tratatul său de mecanică (1743) D'Alembert a respins discuțiile ca fiind fără sens și provenind dintr-o confuzie de terminologie. Efectul cumulativ al unei forțe poate fi măsurat prin efectul său integrat în timp, $\int F dt$, care produce o variație a impulsului, sau prin efectul său integrat în spațiu, $\int F dx$, care produce o variație a energiei cinetice. Ambele concepte sînt utile și valabile, deși diferite. Pe care din ele îl folosim depinde de ce sîntem interesați sau ce este mai convenabil. După cum ilustrează studiul ciocnirilor, noi folosim frecvent ambele concepte în aceeași problemă.

O concepție mai modernă este de a căuta mărimi ale mișcării care să fie invariante în loc de a insista asupra conceptului de forță. Problema dacă energia sau impulsul este mărimea „reală” a mișcării devine fără sens deoarece nu există o „mărime de mișcare” unică. În schimb, atât energia cît și impulsul pot fi privite ca mărimi invariante ale mișcării în sensul că pentru un sistem izolat, totalul fiecăreia din aceste mărimi, sumat peste toate părțile sistemului, rămîne constant în timp. Poate avea loc un schimb de energie și de impuls între diferitele părți ale unui sistem izolat, însă totalul fiecăreia mărime se conservă.

10-6. Ciocnirile în cazul bi- și tridimensional

În cazul bi- sau tridimensional (cu excepția unei ciocniri complet inelastice), legile de conservare singure nu ne pot relata mișcarea particulelor după ciocnire dacă cunoaștem mișcarea lor înainte de ciocnire. De exemplu, pentru o ciocnire elastică bidimensională, care reprezintă cazul cel mai simplu, avem patru necunoscute, anume: cele două componente ale vitezei după ciocnire pentru fiecare din cele două particule; dar noi avem numai trei relații cunoscute între ele, una pentru conservarea energiei cinetice și două pentru conservarea impulsului în cele două direcții. Prin urmare numai condițiile inițiale nu sînt suficiente, deci avem nevoie și de alte informații. Dacă nu cunoaștem forțele reale de interacțiune, așa cum este adesea cazul, informația adițională trebuie obținută din experiență. Cel mai simplu este să specificăm unghiul de recul al uneia din particulele care se ciocnesc.

Să vedem ce se întîmplă atunci cînd o particulă este proiectată asupra unei particule-țintă, care este în repaus. Acest caz nu este atît de restrictiv cum ar putea părea, deoarece putem totdeauna alege sistemul nostru de referință astfel încît față de el particula-țintă să fie în repaus înainte de ciocnire. Multe experiențe din fizica nucleară cuprind bombardarea cu particule nucleare a unei ținte care este în repaus în sistemul laboratorului. În astfel de ciocniri, datorită conservării impulsului, mișcarea are loc într-un plan determinat de dreptele de recul ale particulelor care se ciocnesc. Mișcarea inițială nu trebuie să fie neapărat de-a

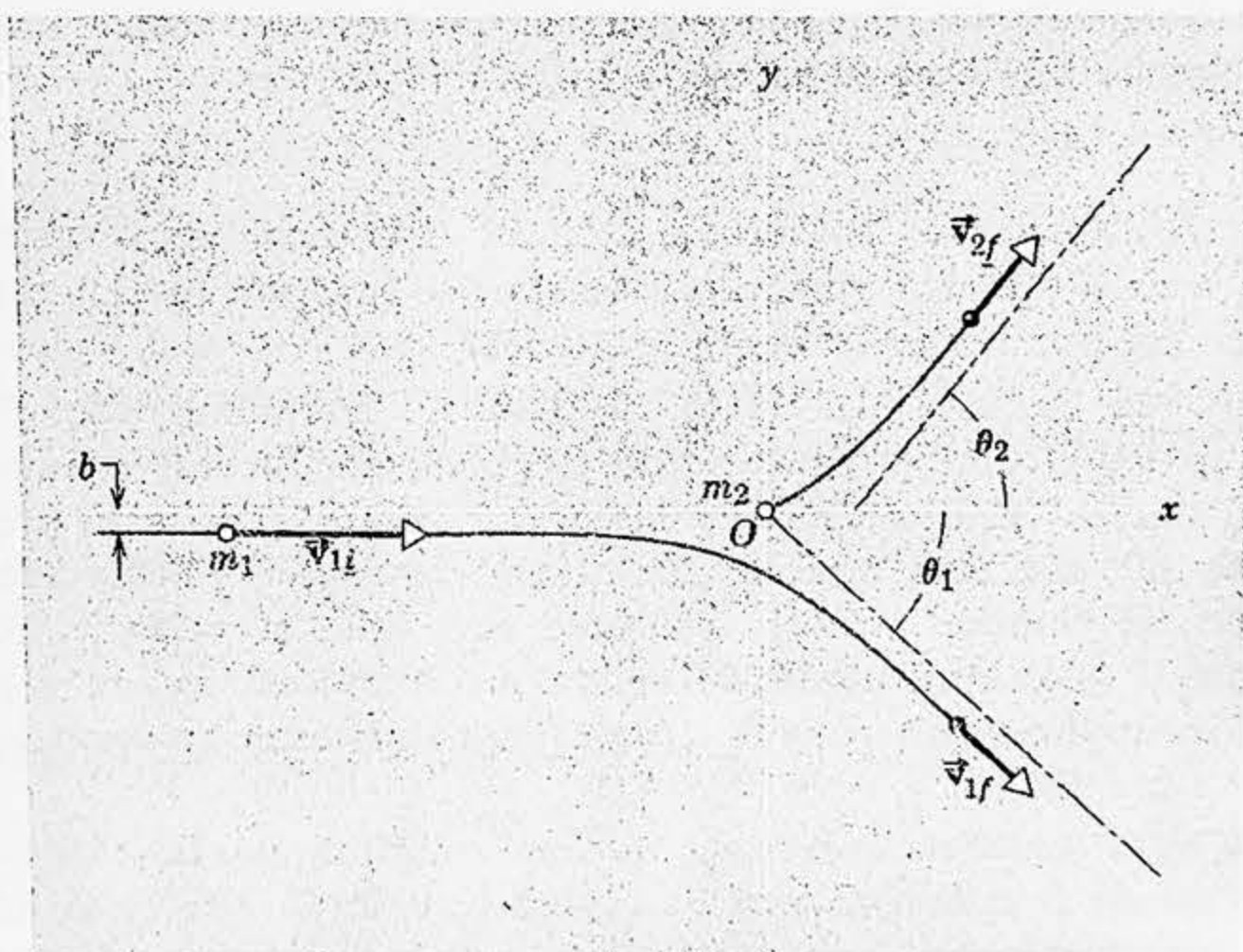


Figura 10-9. Două particule m_1 și m_2 care suferă o ciocnire. Cerculețele albe indică pozițiile lor înainte de ciocnire, cele negre după ciocnire. Inițial m_2 este în repaus. Parametrul de șoc b este distanța la care ar trece particula incidentă dacă n-ar exista forțe de interacțiune.

lungul liniei care unește centrele celor două particule. Forța de interacție poate fi electromagnetică (în care includem forțele de „contact”; vezi pag. 137), gravitațională sau nucleară. Particulele nu trebuie neapărat să se „atingă”; forțe puternice care acționează la distanțe relativ mici și un timp scurt în comparație cu timpul de observație, deviază particulele de la direcția lor inițială.

O situație tipică este arătată în figura 10-9. Distanța b dintre dreapta inițială de mișcare și dreapta paralelă cu aceasta trecând prin centrul particulei-țintă se numește *parametru de șoc*. Aceasta este o măsură a „oblicității” ciocnirii; $b=0$ corespunde unei ciocniri frontale. Direcția de mișcare a particulei incidente m_1 după ciocnire face un unghi θ_1 cu direcția inițială, iar particula-țintă m_2 , inițial în repaus, se mișcă după ciocnire într-o direcție care face un unghi θ_2 cu direcția inițială a particulei incidente. Aplicând conservarea impulsului, care este o relație vectorială, obținem două ecuații scalare; pentru componenta pe direcția x a mișcării avem

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

și pentru componenta pe direcția y :

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2.$$

Să presupunem acum că ciocnirea este elastică. În acest caz se aplică conservarea energiei cinetice și obținem o a treia ecuație

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Dacă cunoaștem condițiile inițiale (m_1 , m_2 și v_{1i}) rămânem cu patru necunoscute (v_{1f} , v_{2f} , θ_1 și θ_2) și numai cu trei ecuații care le leagă între ele. Putem determina mișcarea după ciocnire numai dacă specificăm valoarea uneia din aceste patru mărimi cum ar fi θ_1 .

Exemplul 4. O moleculă de gaz avînd o viteză de 300 m/s lovește elastic o altă moleculă de aceeași masă care este inițial în repaus. După ciocnire, prima moleculă se mișcă sub un unghi de 30° față de direcția sa inițială. Să se afle viteza fiecărei molecule după ciocnire și unghiul făcut cu direcția incidentă de către molecula-țintă care capătă recul.

Acest exemplu corespunde exact situației discutate mai sus, cu $m_1 = m_2$; $v_{1i} = 300$ m/s și $\theta_1 = 30^\circ$. Punînd m_1 egal cu m_2 avem relațiile

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \theta_1 + v_{2f} \cos \theta_2,$$

$$v_{1f} \sin \theta_1 = v_{2f} \sin \theta_2$$

și

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2.$$

Trebuie să rezolvăm în raport cu v_{1f} , v_{2f} și θ_2 . Pentru a face aceasta ridicăm la pătrat prima ecuație (transcriind-o sub forma $v_{1i} = v_{1f} \cos \theta_1 + v_{2f} \cos \theta_2$) și adunăm rezultatul la ecuația a doua ridicată la pătrat (ținînd seamă că $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$); obținem

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1 = v_{2f}^2.$$

Combinând aceasta cu ecuația a treia, obținem

$$2v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1$$

sau (deoarece $v_{1f} \neq 0$)

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \theta_1 = (300 \text{ m/s}) \cdot \cos 30^\circ$$

sau

$$v_{1f} = 260 \text{ m/s.}$$

Din ecuația a treia

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (300 \text{ m/s})^2 - (260 \text{ m/s})^2$$

sau

$$v_{2f} = 150 \text{ m/s.}$$

În sfârșit, din ecuația a doua

$$\sin \theta_2 = (v_{1f}/v_{2f}) \sin \theta_1 = (260/150) \cdot \sin 30^\circ = 0,866$$

sau

$$\theta_2 = 60^\circ.$$

Cele două molecule se mișcă sub un unghi drept una față de cealaltă ($\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ în fig. 10-9).

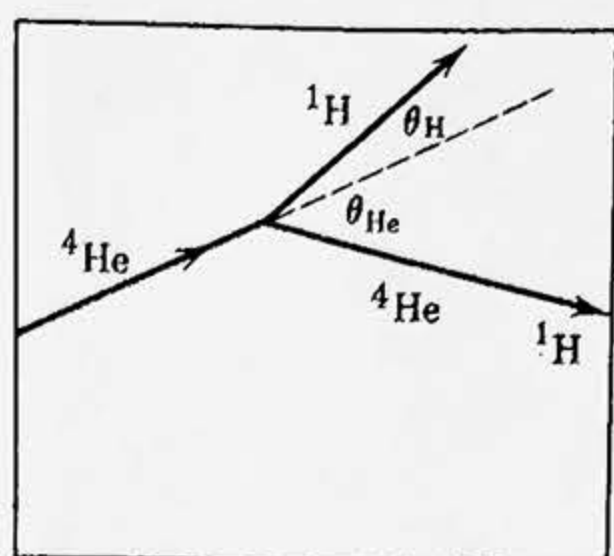
Studentul trebuie să fie în stare să arate că într-o ciocnire elastică între particule de mase egale dintre care una este inițial în repaus, particulele după ciocnire se mișcă totdeauna sub un unghi drept una față de cealaltă.

În figura 10-10 se arată fotografiile a patru ciocniri nucleare elastice care au loc într-o cameră Wilson cu ceață¹. Traietoriile particulelor sînt făcute vizibile prin urmele picăturilor lăsate pe parcursul lor. În fiecare caz particula incidentă este o particulă α (He^4) și nucleul-țintă este practic în repaus înainte de ciocnire. Observăm că pe măsură ce masa țintei crește, unghiul dintre particulele ricoșate crește (vezi problema 26). În cazul (b) cînd ținta este de asemenea o particulă α fotografiile stereoscopice arată că particulele ricoșate se deplasează sub un unghi drept; unghiul nu este chiar un unghi drept în figură deoarece particulele nu se află în planul figurii.

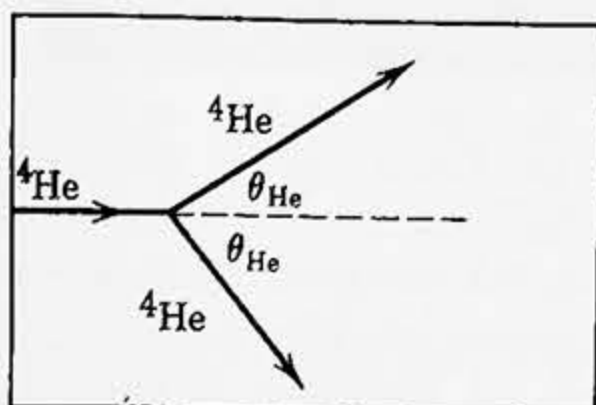
Figura 10-11 arată o serie de patru ciocniri elastice succesive între protoni produse atunci cînd un proton de mare energie pătrunde într-o cameră cu bule², umplută cu hidrogen lichid, care furnizează protonii-țintă. Traietoriile particulelor sînt făcute vizibile în acest caz prin șirul de bule lăsate în urma lor. Deoarece particulele care interacționează au mase egale și ciocnirile sînt elastice, particulele ricoșează sub un unghi drept între ele; aceasta este evident atunci cînd traietoriile din figura 10-11, a sînt văzute stereoscopic.

¹ În 1927 fizicianul englez C. T. R. Wilson, a primit premiul Nobel pentru inventarea camerei cu ceață; investigațiile sale au pornit pe o direcție complet diferită și anume a încercat să producă în laborator un anumit fenomen atmosferic observat pe muntele Ben Nevis din Scoția.

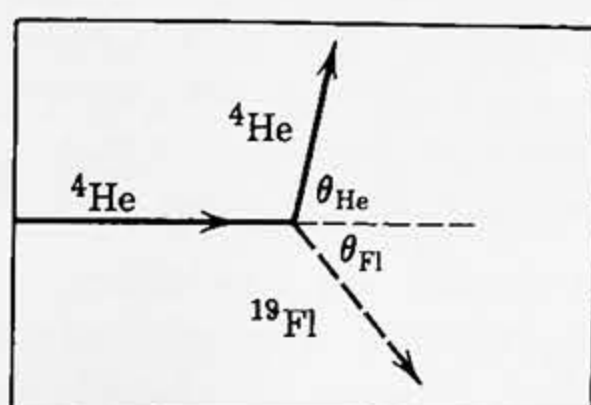
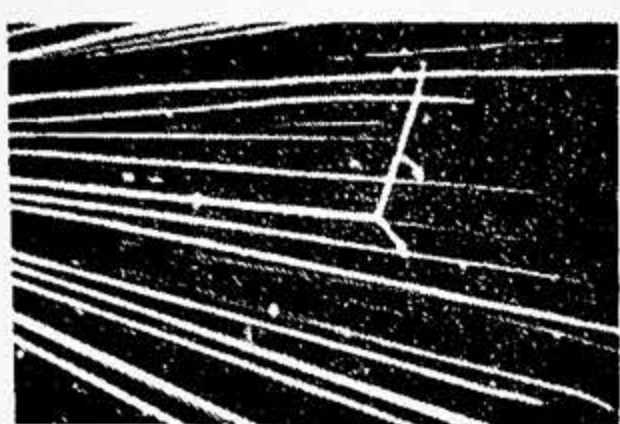
² În 1960 fizicianul american Donald Glaser, a primit premiul Nobel pentru inventarea camerei cu bule; se spune că ideea i-a venit în timp ce urmărea bulele dintr-un pahar cu bere.



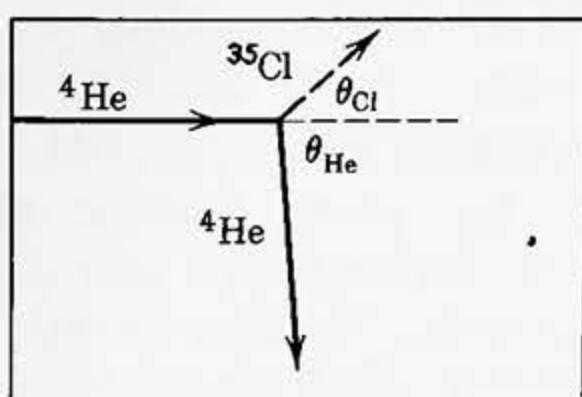
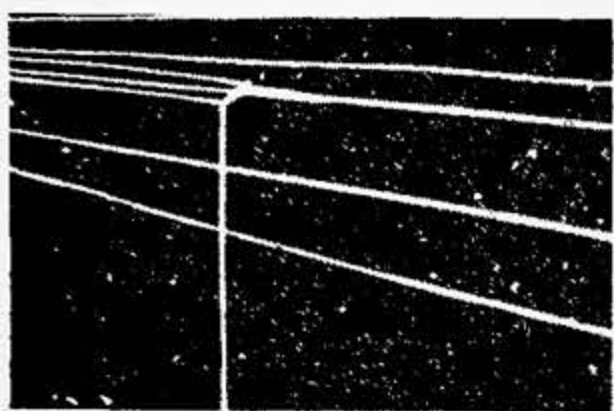
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10-10. Fotografii ale traiectoriilor particulelor care suferă ciocniri într-o cameră cu ceață, dispozitiv care face aceste traiectorii vizibile. Camera conține vapori de apă saturați. Dacă vaporii sînt ușor comprimați și apoi lăsați să se destindă rapid, vaporii de apă se vor condensa sub formă de picături de-a lungul traiectoriei. Particula incidentă în toate cele patru cazuri este un nucleu de heliu (^4He sau α). În (a) ținta este un nucleu de hidrogen (^1H sau p). Celelalte urme sînt analoge cu excepția că în (b) ținta este un alt nucleu de ^4He , în timp ce în (c) și (d) țintele sînt respectiv nucleul de fluor și nucleul de clor. În general, particulele nu se află în planul fotografiei. Pentru o analiză completă sînt necesare fotografii stereoscopice.

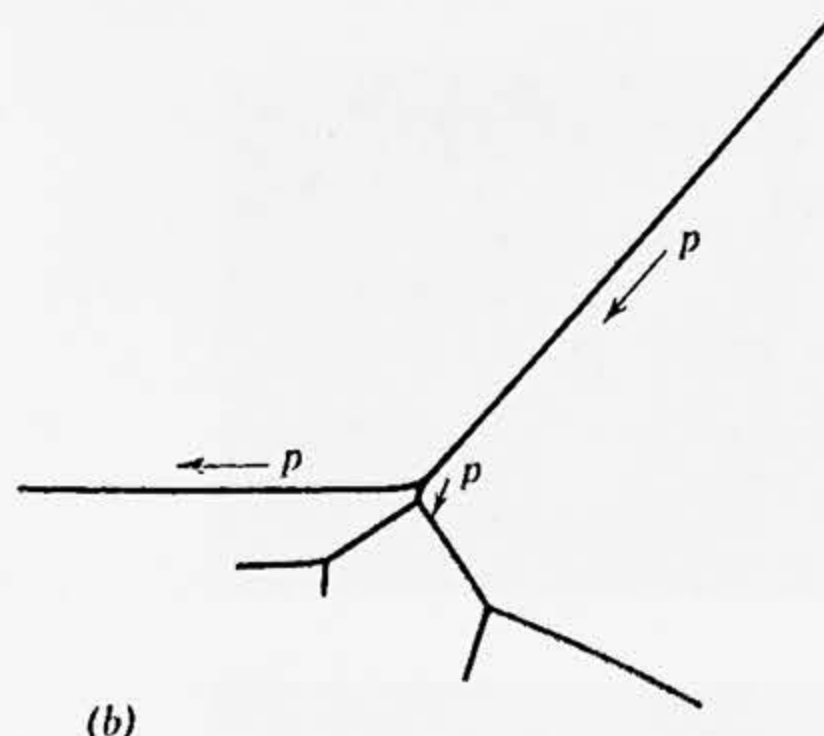
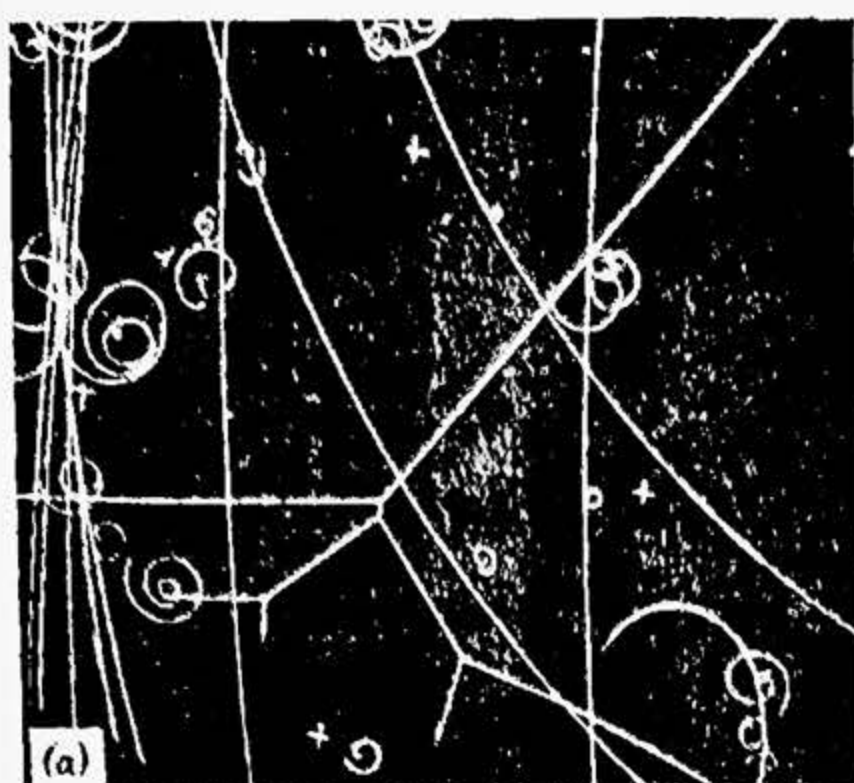


Figura 10-11. (a) Patru ciocniri proton-proton într-o cameră cu bule cu diametrul de 25,4 cm. Protonul inițial de mare energie intră din dreapta sus. Traiectoriile spiralate reprezintă electroni de energie joasă. Celelalte traiectorii care trec prin cameră sînt mezoni de diferite tipuri. Această fotografie poate fi văzută stereoscopic folosind un dispozitiv furnizat împreună cu cartea explicativă *Introducere în detecția particulelor nucleare în camera cu bule*, Ealing Press, 1964 (prin amabilitatea lui Lawrence Radiation Laboratory). O astfel de examinare stereoscopică arată că unghiul dintre urmele emergente în fiecare caz este de 90° . Aceasta nu apare în figură deoarece urmele nu se află în planul figurii. (b) O reprezentare schematică a urmelor protonului de la (a).

10-7. Secțiunea de ciocnire

Deși am introdus conceptul de parametru de șoc b pentru a descrie ciocnirile (vezi fig. 10-9), trebuie să fie clar că, atunci cînd ne ocupăm cu particule de dimensiuni atomice sau subatomice, nu putem defini traectoria particulei incidente sau poziția particulei-țintă suficient de precis. În practică, cînd bombardăm o foiță-țintă subțire cu un fascicul de deuteroni accelerați de un ciclotron, trebuie să utilizăm metoda statistică deci să realizăm un număr mare de ciocniri între deuteron și nucleeele din țintă; parametrii de șoc pentru ciocnirile individuale nu pot fi determinați.

Situația este aproape aceeași ca și cum am trage cu o mitralieră la întîmplare (de exemplu noaptea) înspre o magazie depărtată, de arie A , pe care cineva a atîrnat, la întîmplare (dar fără să se suprapună), un mare număr de farfurii, fiecare de arie σ . Dacă numărul farfuriilor este q și dacă frecvența cu care gloanțele lovesc magazia este R_0 , care va fi frecvența R cu care vor fi sparte farfuriile? În baza caracterului întîmplător al evenimentelor, avem

$$R = R_0(\sigma q/A), \quad (10-7, a)$$

unde σq este aria totală a tuturor farfuriilor. Am putea de fapt să folosim această relație pentru a măsura pe σ , aria geometrică a unei farfurii individuale. Rezolvând în raport cu σ găsim,

$$\sigma = R\Lambda/R_0 q \quad (10-7, b)$$

care ne permite să-l aflăm pe σ din valorile măsurate ale lui R , Λ , R_0 și q . Putem numi pe σ *secțiune de ciocnire* pentru evenimentul care constă din lovirea de către glonte a unei farfurii.

Să considerăm acum o clasă mai restrictivă de evenimente și anume aceea în care lovirea de către un glonte a unei farfurii duce la spargerea ei exact în 5 cioburi (de exemplu). Frecvența R_5 cu care se produc astfel de evenimente, este mult mai mică decât frecvența R cu care se produc evenimentele descrise mai sus. Putem atribui o *secțiune de ciocnire* σ_5 acestor evenimente restrinse și o putem măsura, prin analogie cu ecuația (10-7), din

$$\sigma_5 = R_5 \Lambda / R_0 q. \quad (10-8)$$

Putem considera alte moduri de a sparge farfuriile, cum ar fi spargerea unei farfurii în 13 cioburi, spargerea farfuriei astfel încât un fragment să aibă o arie egală sau mai mare decât jumătatea farfuriei, spargerea farfuriei astfel ca un fragment să zboare vertical în sus etc. Fiecărui din aceste evenimente îi putem atribui o secțiune de ciocnire proprie σ_x măsurând frecvența R_x cu care se produc evenimentele. *Nici una din aceste secțiuni de ciocnire nu are neapărat vreo legătură cu aria geometrică a farfuriei; toate măsoară probabilitatea de apariție a evenimentelor la care ele se referă.* Secțiunile de ciocnire sînt importante, deoarece ele sînt legate de evenimentele individuale și sînt independente de detaliile organizării experimentale particulare. De exemplu, în ecuația (10-8) am găsi aceeași valoare pentru σ_5 indiferent cît de mare ar fi magazia (Λ), cît de multe ar fi farfuriile (q) sau cît de rapid am trage cu mitraliera (R_0); valoarea măsurată a lui R_5 ar fi totdeauna astfel încît să dea aceeași valoare măsurată pentru σ_5 .

În mod analog, în fizica nucleară noi bombardăm adesea ținte cu proiectile nucleare, măsurăm frecvența cu care se produc evenimente de un anumit tip ales și atribuim acestor evenimente o secțiune de ciocnire. De exemplu, să bombardăm o foiță subțire de aur (^{197}Au) cu deuteroni (^2H sau d) a căror energie este de exemplu 30 MeV. Se pot produce multe evenimente, printre care: (1) împrăștierea elastică a deuteronilor în emisfera anterioară, (2) împrăștierea elastică a deuteronilor în emisfera posterioară, (3) împrăștierea neelastică a deuteronilor, între unghiurile de 30° și 60° față de direcția fascicului incident; (4) reacția nucleară $d + ^{197}\text{Au} \rightarrow p + ^{198}\text{Au}$ și (5) reacția nucleară $d + ^{197}\text{Au} \rightarrow n + ^{198}\text{Hg}$, în care n reprezintă un neutron. Fiecare din aceste evenimente (și multe altele care ar putea fi scrise aici) are propria sa secțiune de ciocnire σ_x care ne permite să calculăm frecvența R_x cu care se produc aceste evenimente dacă cunoaștem detaliile aranjamentului experimental. Ultimul scop al tuturor experiențelor este de a înțelege natura forțelor nucleare.

Fie A aria foiței expusă fascicului și x grosimea foiței. Dacă avem n particule-țintă pe unitatea de volum în foiță, numărul total al parti-

culelor-țintă disponibile este nAx . Dacă *aria efectivă* (adică secțiunea de ciocnire) pentru evenimentul studiat este σ_x , *aria efectivă* totală a tuturor nucleelor este $nAx\sigma_x$. Dacă R_0 este frecvența cu care proiectilele lovesc ținta și R_x este frecvența cu care se produc evenimentele ce ne interesează, avem, în virtutea caracterului aleator al evenimentelor (vezi ecuația 10-7, a),

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{nAx\sigma_x}{A}$$

sau

$$R_x = R_0 n x \sigma_x. \quad (10-9)$$

În modul acesta, putem măsura pe σ_x pentru evenimentul considerat, măsurînd pe R_x , R_0 , n și x și substituind în ecuația (10-9). Secțiunile de ciocnire sînt exprimate de obicei în barni sau submultipli acestora; 1 barn = 10^{-28} m^2 .

Secțiunile de ciocnire depind aproape totdeauna de energia particulei incidente, manifestînd adesea maxime ascuțite în funcție de energie. Aceasta înseamnă că pentru anumite energii caracteristice, destul de precis definite, reacția este mult mai probabilă decît pentru alte energii.

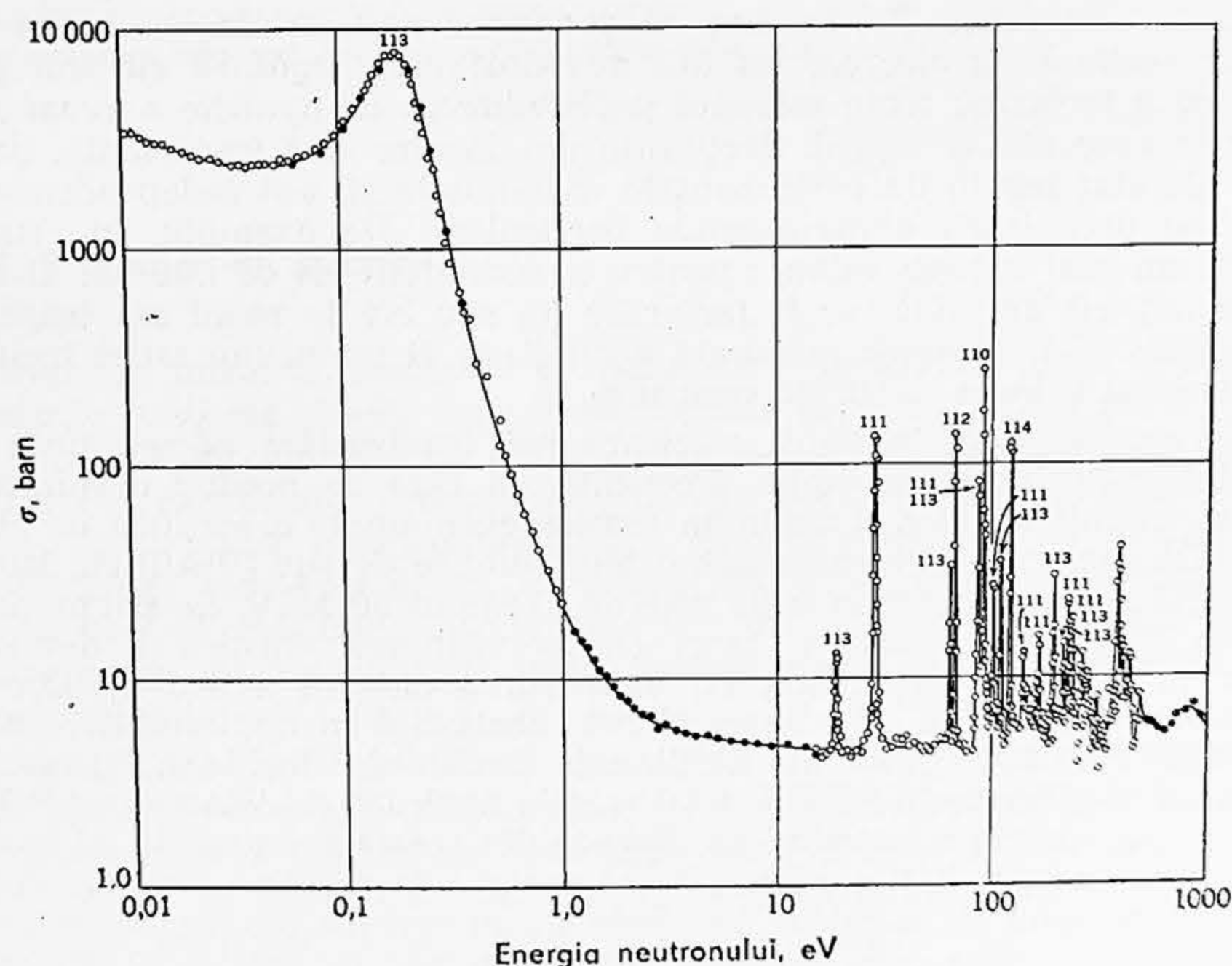


Figura 10-12. Secțiunea de ciocnire în funcție de energie pentru procese care împrăștie neutronii dintr-un fascicul colimat atunci cînd el trec prin cadmiu. Observăm că ambele scări sînt logaritmice.

În același mod o farfurie de oțel va vibra cu o amplitudine mare la o serie de frecvențe caracteristice, destul de precis definite. Vom studia astfel de „rezonanțe” în capitolul 20 și în altă parte.

Figura 10-12 arată una dintre miile de curbe ale secțiunii de ciocnire care au fost măsurate pentru diferite procese atomice și nucleare. Să considerăm un fascicul de neutroni de energie cinetică E_n , puternic colimat, care cade pe o foiță subțire de cadmiu. Procesul la care se referă secțiunea de ciocnire σ din figura 10-12 este oricare proces (absorbție, împrăștiere elastică sau împrăștiere neelastică), care are ca rezultat îndepărtarea unui neutron din fasciculul colimat. Numerele în dreptul diferitelor maxime arată izotopul particular responsabil pentru acel maxim. Acesta poate fi aflat din alte experiențe folosind foițe confecționate din izotopi separați. Maximul ascuțit notat cu „113” care apare la 0,17 eV, se datorește reacției



în care γ reprezintă un proton gama. Această reacție care are o secțiune de ciocnire de 7 600 barni este responsabilă pentru puterea de absorbție foarte mare a cadmiului față de neutronii lenți. Observăm că ambele scări din figura 10-12 sînt logaritmice.

Exemplul 5. (a) Prin anul 1910 Geiger și Marsden, lucrînd sub conducerea lui Rutherford la Universitatea din Manchester, au efectuat o serie de experiențe clasice care au stabilit faptul că atomii constau dintr-un nucleu mic înconjurat de un nor de electroni și nu dintr-o sferă cu sarcini pozitive și negative distribuite, așa cum sugerase mai înainte Thomson.

Această experiență era în esență cea arătată în figura 10-13. Aici particulele α de la o sursă de poloniu erau lăsate să lovească o foiță de aur de $4,0 \cdot 10^{-7}$ m grosime. S-a găsit că marea majoritate a particulelor α trec prin foiță (împrăștierea înainte), aproximativ 1 la $6,17 \cdot 10^4$ sînt împrăștiate înapoi, adică sînt deviate cu un unghi mai mare de 90° . Numărul de atomi de aur pe unitatea de volum din foiță este $5,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Care este secțiunea eficace de ciocnire în barni pentru împrăștierea înapoi (1 barn = 10^{-28} m^2)?

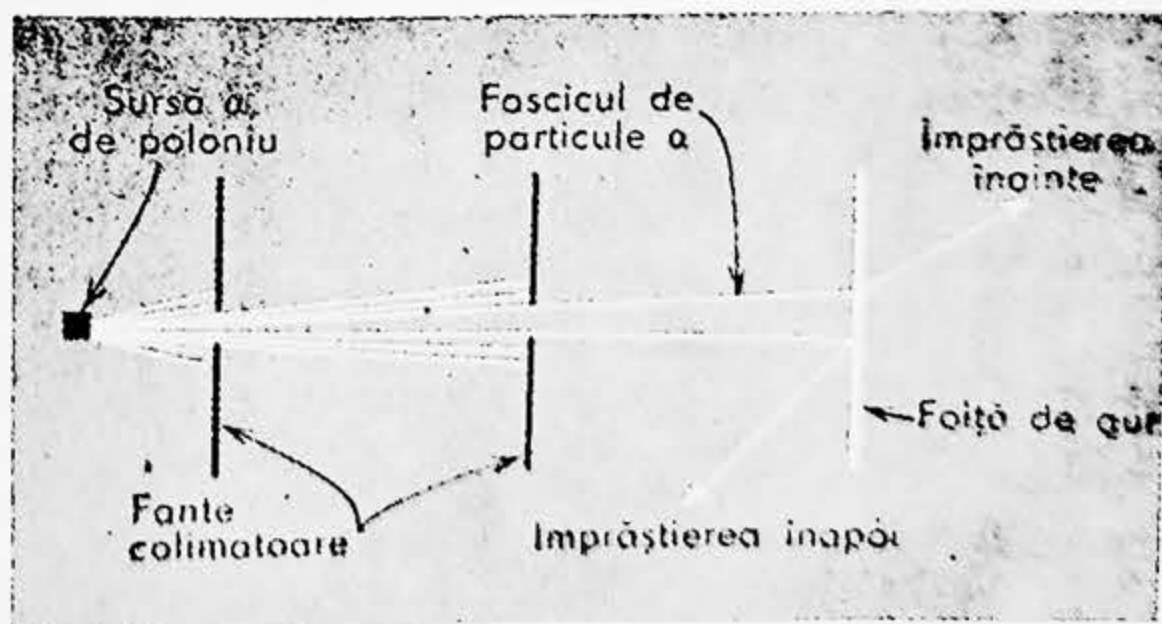
Din

$n x \sigma$ = fracțiunea împrăștiată înapoi,

avem

$$(5,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(4,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}) \sigma = 1/(6,17 \cdot 10^4)$$

Figura 10-13. Exemplul 5. Un flux de particule α este emis de o sursă de poloniu și un fascicul este format de fantele colimatoare. Unele particule α sînt împrăștiate înapoi de către o țintă formată dintr-o foiță de aur; restul trece prin foiță.



sau

$$\sigma = 6,9 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 = 6,9 \text{ barni.}$$

Aceasta este secțiunea de ciocnire pentru împrăștierea înapoi.

(b) Rutherford a conchis că împrăștierea înapoi nu poate fi produsă de către electronii din atom; particulele α sînt atît de masive față de electroni încît cu greu ar putea fi deviate de aceștia, și cu atît mai mult împrăștiate înapoi. El a sugerat atunci modelul nuclear al atomului, atribuind împrăștierea ciocnirilor dintre particulele α și sîmburele pozitiv masiv al atomului, nucleul.

Presupunînd că secțiunea de ciocnire pentru împrăștierea înapoi este aproximativ egală cu aria oferită de un nucleu de aur pentru ciocnirea directă, să se estimeze dimensiunea efectivă a unui nucleu de aur.

Dacă raza efectivă a nucleului de aur este r , avem

$$\sigma = \pi r^2,$$

$$r^2 = \sigma / \pi = 6,9 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 / \pi$$

sau

$$r = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ m.}$$

Aceasta este raza aproximativă a unui nucleu de aur care trebuie comparată cu valoarea de aproximativ $1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ pentru atomul de aur. Prin urmare, nucleul masiv este concentrat într-o regiune foarte mică din atom (aproximativ 1 la 10^{12} din volum).

10-8. Reacțiile și procesele de dezintegrare

Am stabilit în paragraful 10-1 că reacțiile și procesele de dezintegrare radioactivă pentru atomi, nuclee și particule elementare, pot fi tratate prin aceleași metode, folosite în studiile de ciocnire, anume: putem aplica principiile de conservare a impulsului și energiei celor două perioade (bine definite) „înainte de eveniment” și „după eveniment”. Pentru aceste procese trebuie să folosim conservarea energiei *totale*, deoarece energia cinetică *nu* se conservă. În această secțiune vom considera numai exemple în care vitezele particulelor sînt neglijabile în comparație cu viteza luminii. Aceasta înseamnă că putem folosi expresiile clasice pentru impuls și energie și nu avem nevoie să folosim expresiile relativiste.

Exemplul 6. *Reacțiile nucleare.* Un film subțire conținînd un compus al fluorului (^{19}F) este bombardat cu un fascicul de protoni (p) care au fost accelerați pînă la o energie de 1,85 MeV (milioane electroni-volți; $1 \text{ MeV} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}$) într-un accelerator Van de Graaff. Unii protoni interacționează cu nucleele de fluor producînd următoarea reacție nucleară:



Se observă că particulele α (care sînt nuclee de heliu) care sînt emise sub unghiuri drepte față de fasciculul incident de protoni (vezi fig. 10-14), au viteze de $1,95 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. Ce putem afla despre reacție prin aplicarea legilor de conservare a

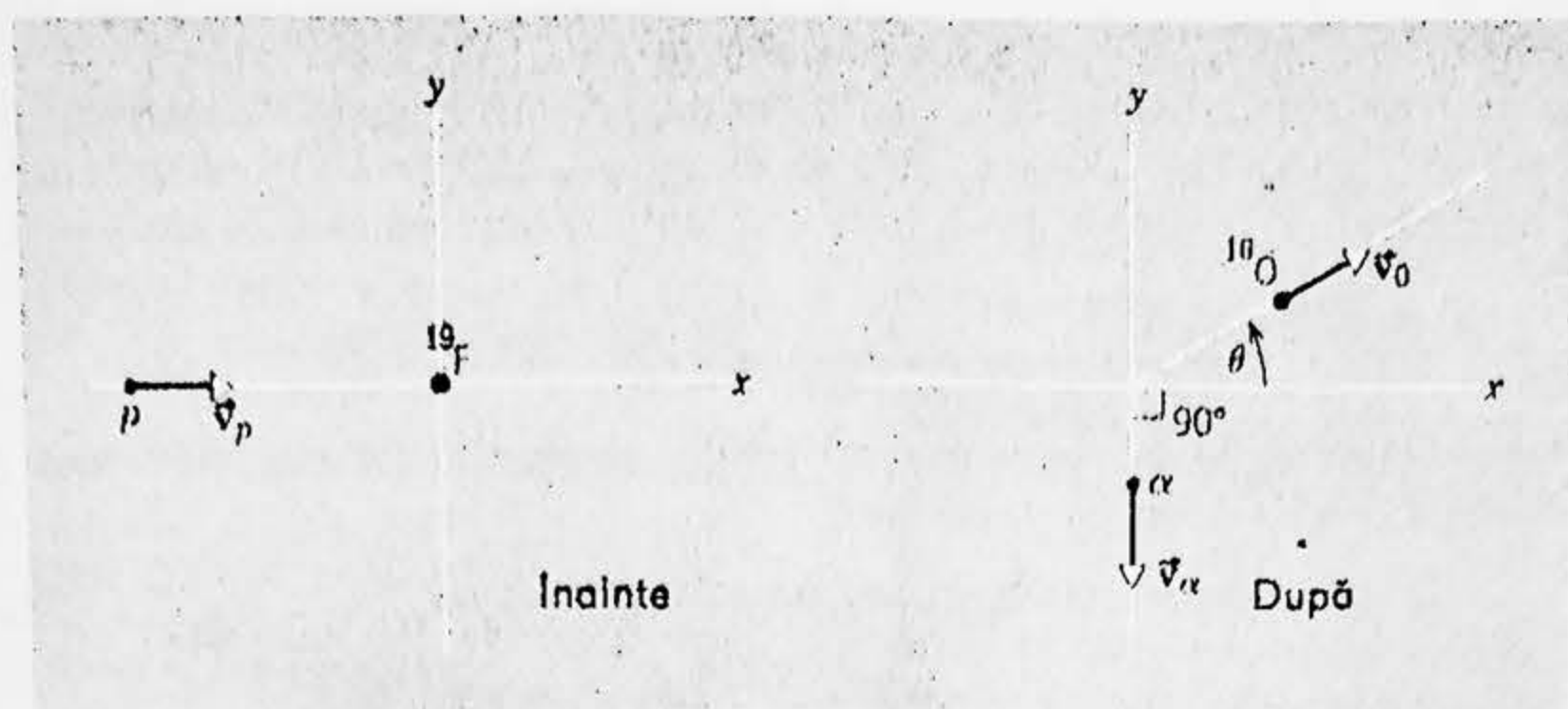


Figura 10-14. Reacția nucleară $p + {}^{19}\text{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\text{O}$ care arată situația înainte și după eveniment în sistemul laboratorului.

impulsului și a energiei totale? Masele particulelor sînt, cu o precizie suficient de bună pentru scopurile noastre următoare:

$$m_p = 1,01 \text{ u}; \quad m_O = 16,0 \text{ u}$$

$$m_F = 19,0 \text{ u}; \quad m_\alpha = 4,00 \text{ u}$$

în care 1 u (unitate atomică de masă) = $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Componentele pe direcțiile x și y ale impulsului se conservă, ceea ce înseamnă că ele au aceleași valori înainte și după reacție. În sistemul laboratorului din figura 10-14, rezultă

$$m_p v_p = m_O v_0 \cos \theta \quad (\text{componenta pe direcția } x) \quad (10-10)$$

și

$$0 = m_\alpha v_\alpha - m_O v_0 \sin \theta \quad (\text{componenta pe direcția } y) \quad (10-11)$$

Pentru conservarea energiei totale scriem

$$Q + \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_O v_0^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2, \quad (10-12)$$

în care este clar că Q reprezintă cantitatea cu care energia cinetică a sistemului după reacție depășește energia cinetică a sistemului înainte de reacție. Observăm că am presupus că particulele se mișcă suficient de lent astfel încît putem folosi expresia clasică pentru energia cinetică $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ în locul celei relativiste $(m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2})$. Dacă Q este pozitiv, energia cinetică trebuie să fie generată prin reacție.

Energia reprezentată de Q poate proveni numai din diferențele în energiile de repaus ale particulelor înainte și după reacție, conform binecunoscutei relații a lui Einstein $E = \Delta m c^2$ (vezi paragraful 8-9). Astfel (dacă Q este pozitiv), ne așteptăm ca masa de repaus a sistemului după reacție să fie ceva mai mică decît masa sa de repaus înainte de reacție și Q va fi într-adevăr dat de relația lui Einstein

$$Q = \Delta m c^2 = [(m_p + m_F) - (m_\alpha + m_O)] c^2. \quad (10-13)$$

Observăm că ecuațiile (10-12) și (10-13) nu sînt relații independente pentru Q , fiind legate prin relația masă-energie a lui Einstein.

Cele trei ecuații de conservare conțin exact cele trei necunoscute v_0 , θ și Q . Pentru a-l găsi pe Q din aceste relații, să eliminăm întâi pe θ între primele două ecuații prin ridicare la pătrat și adunare (reamintindu-ne că $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$). Obținem

$$m_p^2 v_p^2 + m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_O^2 v_O^2.$$

Putem acum elimina pe v_O între această relație și ecuația (10-12). Studentul poate arăta că, după o mică regroupare, obținem

$$Q = E_{ca}(1 + m_\alpha/m_O) - E_{cp}(1 - m_p/m_O). \quad (10-14)$$

Din datele problemei știm că $E_{cp} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 = 1,85 \text{ MeV}$ și

$$\begin{aligned} E_{ca} &= \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} (4,00 \text{ u} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}) (1,95 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2 = \\ &= (1,26 \cdot 10^{-12} \text{ J}) (1 \text{ MeV} / 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}) = 7,88 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Putem calcula acum pe Q din ecuația (10-14)

$$Q = (7,88 \text{ MeV}) (1 + 4,00/16,0) - (1,85 \text{ MeV}) (1 - 1,01/16,0) = 8,13 \text{ MeV}.$$

În modul acesta, folosind principiile de conservare a impulsului și energiei totale, putem calcula pe Q pentru reacție fără a face vreo observație asupra nucleului de recul ^{16}O . Dacă vrem să cunoaștem pe v_0 și θ pentru acest nucleu, le putem calcula ușor din ecuațiile (10-10) și (10-11).

Rezultatul $Q = 8,13 \text{ MeV}$ constituie o cantitate importantă de informație relativ la reacție. Din ecuația (10-13) care constituie o relație pentru Q independentă de ecuația (10-14), putem calcula acum că descreșterea masei de repaus în procesul reacției este dată de

$$\begin{aligned} \Delta m &= Q/c^2 = \\ &= (8,13 \text{ MeV} \cdot 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV}) / (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = \\ &= (1,44 \cdot 10^{-29} \text{ kg}) (1 \text{ u} / 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) = 0,00873 \text{ u}. \end{aligned}$$

Putem verifica acest rezultat calculînd pe $\Delta m = (m_p + m_F) - (m_\alpha + m_O)$ din măsurătorile foarte precise ale celor patru mase individuale, efectuate într-un spectrometru de mase (vezi problema 37). Concordanța excelentă pe care o obținem ne arată încă o dată valabilitatea esențială a relației lui Einstein dintre masă și energie.

Întrebări

1. Să se explice cum se aplică conservarea impulsului unei mingi de handbal care ricoșează de la un perete.

2. Cum se poate împăca plutirea unei bărci cu pinze împotriva vîntului cu principiul conservării impulsului?

3. O clepsidră cu nisip este cîntărită pe o balanță sensibilă, înălți cînd nisipul curge sub forma unui curent staționar de la partea superioară spre cea inferioară și apoi din nou după ce partea superioară este goală. Sînt cele două greutăți aceleași sau nu? Să se explice răspunsul dat.

4. Paletele unei turbine sînt de obicei curbate și nu plate ca formă, astfel încît fluidul care le lovește urmează o traiectorie ce seamănă cu litera U. Să se descrie mișcarea fluidului și să se explice avantajul formei curbate față de cea plată.

5. Din examinarea ecuațiilor (10-3) și (10-4) reiese evident că o soluție valabilă a problemei determinării vitezelor finale a două particule într-o ciocnire elastică unidimensională este $v_{1f} = v_{1i}$ și $v_{2f} = v_{2i}$. Ce înseamnă aceasta din punct de vedere fizic? Să se explice.

6. Să considerăm o ciocnire elastică unidimensională între un corp incident dat A și un corp B aflat inițial în repaus. Cum trebuie aleasă masa lui B, în comparație cu masa lui A, dacă vrem ca B să capete un recul cu: (a) viteza maximă, (b) impuls maxim și (c) energie cinetică maximă?

7. În ciocnirea a două corpuri în sistemul centrului de masă (SCM) impulsurile particulelor sînt egale în modul și opuse ca sens atât înainte cît și după ciocnire. Este dreapta mișcării relative neapărat aceeași după ciocnire ca și înainte? În ce condiții mărimile vitezelor vor crește? Vor descrește? Vor rămîne aceleași în urma ciocnirii?

8. Atunci cînd avem de a face cu atomi, nuclee sau particule elementare, ce înseamnă afirmația că astfel de corpuri „se ating” în timpul ciocnirii?

9. Atunci cînd forțele de interacție între două particule au o rază de acțiune infinită, așa cum este atracția gravitațională reciprocă între două corpuri, poate fi secțiunea eficace de „ciocnire” infinită? Este util de considerat această interacție ca o ciocnire?

10. De ce calculul razei nucleului de aur din exemplul 5 dă numai un răspuns aproximativ?

11. S-ar putea determina în principiu secțiunea de ciocnire folosind numai o singură particulă de bombardament și o singură particulă țintă? Dar în practică?

Probleme

1. Un tac lovește o bilă de billard, exercitînd o forță medie de 50 N într-un timp de 10 ms. Dacă bila are masa de 0,20 kg, ce viteză va avea după ciocnire?

2. O bilă cu masa de 1,0 kg cade vertical pe o podea cu o viteză de 25 m/s. Ea ricoșează cu o viteză inițială de 10 m/s. (a) Ce impuls al forței acționează asupra bilei în timpul contactului? (b) Dacă bila este în contact timp de 0,20 s, care este forța medie exercitată asupra podelei?

3. O minge de crochet (cu masa de 0,50 kg) este lovită de un ciocan, și capătă un impuls al forței arătat în graficul din figura 10-15. Care este viteza mingii imediat după ce forța devine zero?

4. Un jucător de golf lovește o minge de golf imprimîndu-i o viteză inițială de $5,0 \cdot 10^3$ cm/s dirijată sub 30° față de orizontală. Presupunînd că masa mingii este de 25 g și că bastonul și mingea sînt în contact 0,010 s, să se afle: (a) impulsul forței transmis

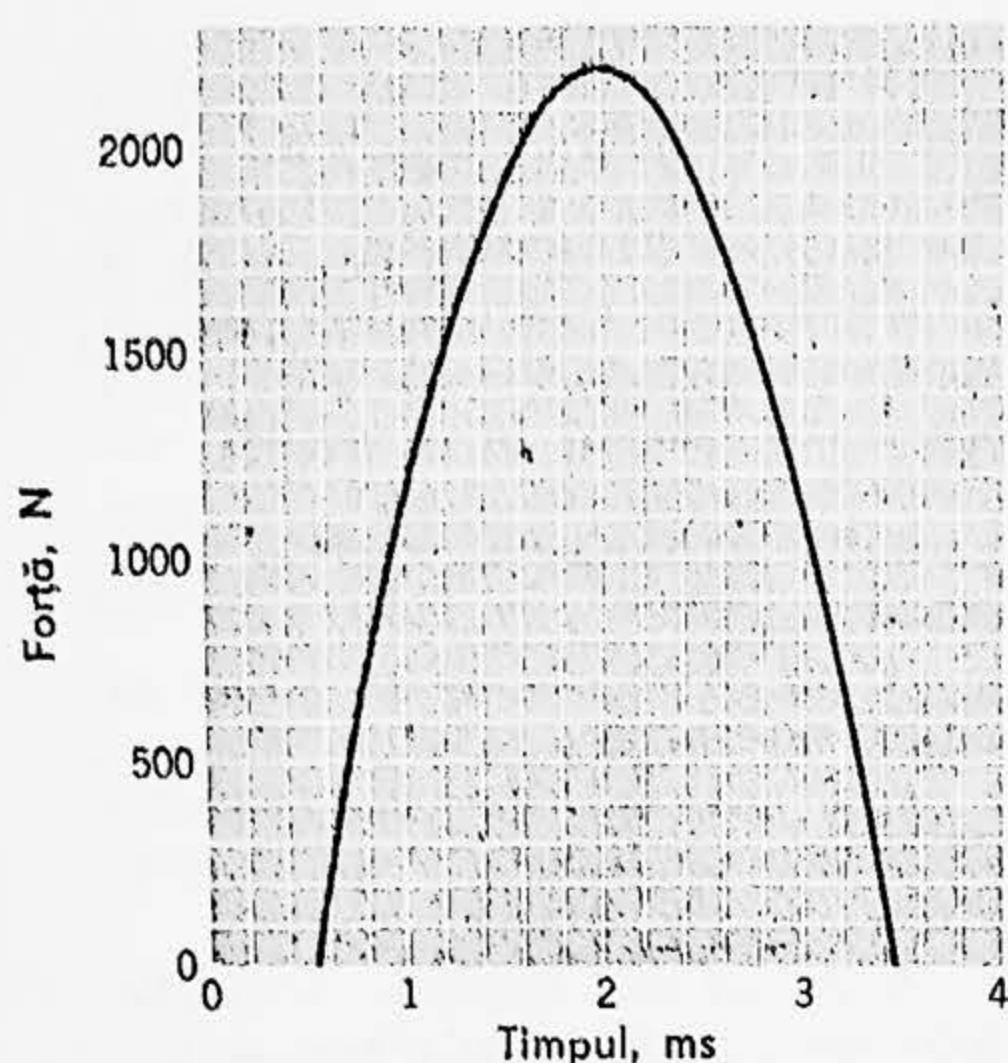


Figura 10-15.

mingii; (b) impulsul forței transmis bastonului; (c) forța medie exercitată asupra mingii de către baston; (d) lucrul mecanic efectuat asupra mingii.

5. O bilă de masă m și viteză v lovește un perete perpendicular și ricoșează cu o viteză nemicșorată. Dacă timpul de ciocnire este t , care este forța medie exercitată de bilă asupra peretelui?

6. Un curent de apă lovește o paletă de turbină în formă de „farfurie” aflată în repaus, așa cum se arată în figura 10-16. Viteza apei este u , atât înainte cât și după ce lovește suprafața curbată a paletelor și masa de apă

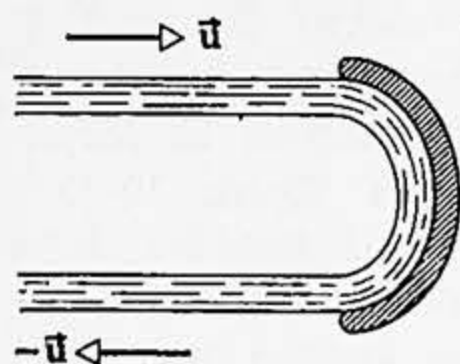


Figura 10-16.

care lovește paleta în unitatea de timp are valoarea constantă μ . Să se afle forța exercitată de apă asupra paletelor.

7. O sanie cu masa de 6,0 kg alunecă pe gheață cu o viteză de 9,0 m/s în timp ce un pachet cu masa de 12 kg cade vertical în cutia saniei. Să se descrie mișcarea ulterioară a saniei.

8. Un corp cu masa de 2,0 kg suferă o ciocnire elastică cu un alt corp aflat în repaus și după aceea continuă să se miște în direcția inițială dar cu o viteză egală cu un sfert din viteza sa inițială. Care este masa corpului lovit?

9. Un bloc cu masa de $m_1 = 100$ kg este în repaus pe o masă foarte lungă fără frecări. Un capăt al mesei se termină cu un perete. Un alt bloc de masă m_2 este așezat între primul bloc și perete și pus în mișcare spre stânga cu viteza constantă v_{2i} , ca în figura 10-17. Presupunând că toate ciocnirile sînt complet elastice, să se afle valoarea lui m_2 pentru care ambele blocuri se vor mișca cu aceeași viteză după ce m_2 lovește o singură dată pe m_1 și o singură dată peretele. Peretele are masă infinită.

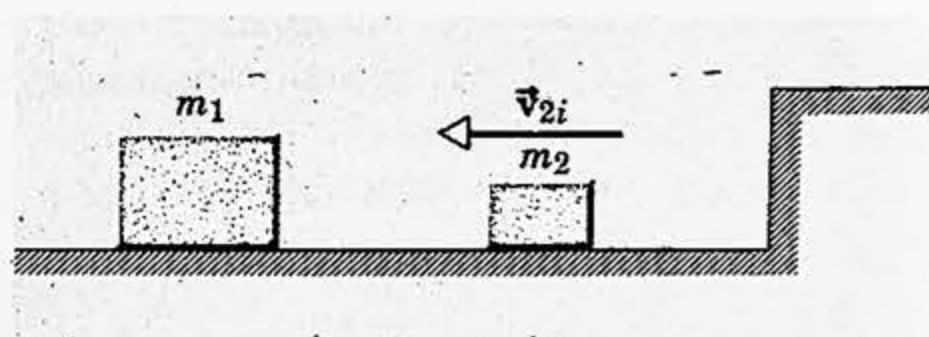


Figura 10-17.

10. Un glonte cu masa de 10 g este tras orizontal într-un bloc de lemn de 4,0 kg aflat în repaus pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare cinetică între bloc și suprafață este 0,20. Glonte rămîne înfipt în bloc care parcurge 2,0 m. Să se afle viteza glontelui.

11. Un glonte cu masa de 10 g lovește un pendul balistic de masă 2,0 kg. Centrul de masă al pendulului arcă pe verticală cu o distanță de 12 cm.

Presupunând că glonte rămân înfipt în pendul, să se calculeze viteza sa inițială.

12. Într-o armă cu încărcare automată de fabricație mai veche mecanismul de reîncărcare de la spatele țevii este pus în acțiune atunci când capacul (piesa) de închidere care ricoșează după ce glonte este tras, comprimă un resort cu o cantitate determinată d . (a) Să se arate că viteza v a glontelui de masă m trebuie să fie cel puțin $d \sqrt{kM/m}$ la ieșire pentru a produce încărcarea automată, unde k este constanta elastică a resortului și M masa capacului de închidere. (b) În ce sens poate fi privit acest proces ca o ciocnire (dacă este astfel)?

13. O bilă de oțel cântărind 0,452 kg este legată de un fir de 68,5 cm lungime și lăsată liber când firul este orizontal. La capătul inferior al traiectoriei sale bila lovește un bloc de oțel de 2,26 kg, inițial în repaus pe o suprafață fără frecări (fig. 10-18). Ciocnirea este elastică. Să se afle viteza bilei și viteza blocului imediat după ciocnire.

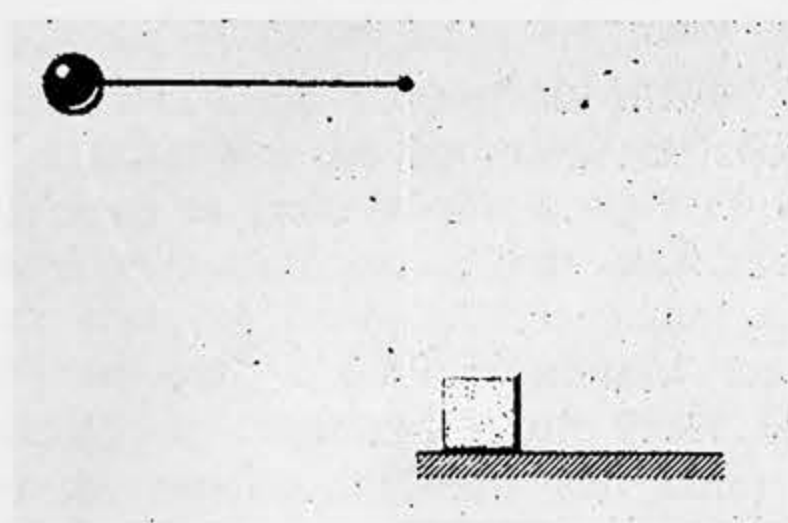


Figura 10-18.

14. Două pendule fiecare de lungime l sînt inițial dispuse ca în figura 10-19. Primul pendul este lăsat liber și lovește pe cel de-al doilea. Se presupune că ciocnirea este complet inelastică și se neglijează masa firelor și efectele frecărilor. Cît de sus urcă centrul de masă după ciocnire?

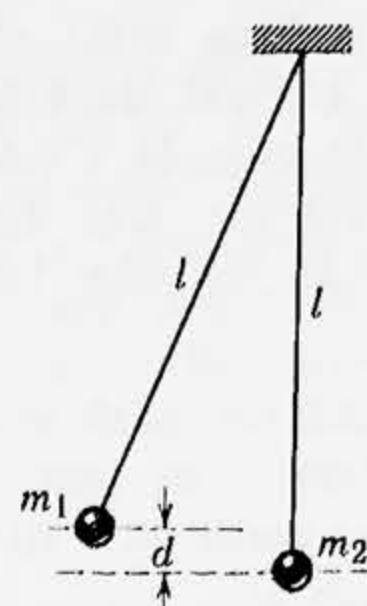


Figura 10-19.

15. Un vagon de marfă cîntărind 32 t și mișcîndu-se cu 5,0 m/s ajunge din urmă un alt vagon care cîntărește 24 t și se mișcă cu 3,0 m/s în același sens. (a) Să se afle viteza vagoanelor după ciocnire și pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii dacă vagoanele se cuplează între ele. (b) Dacă ciocnirea este elastică, vagoanele nu se cuplează ci se separă după ciocnire. Care sînt vitezele lor?

16. Un lift se mișcă în sus cu 2,0 m/s. În momentul în care liftul este la 20 m de capătul superior, o bilă cade din capătul superior al puțului liftului. Bila ricoșează elastic de tavanul liftului. Pînă la ce înălțime poate urca bila față de punctul superior al puțului de lift? Să se rezolve aceeași problemă presupunînd că liftul se mișcă în jos cu o viteză de 2,0 m/s.

17. Cele două corpuri din dreapta figurii 10-20 sînt puțin separate între ele și aflate inițial în repaus; corpul din stînga lovește cu viteza v_0 . Presupunînd că ciocnirile sînt elastice și

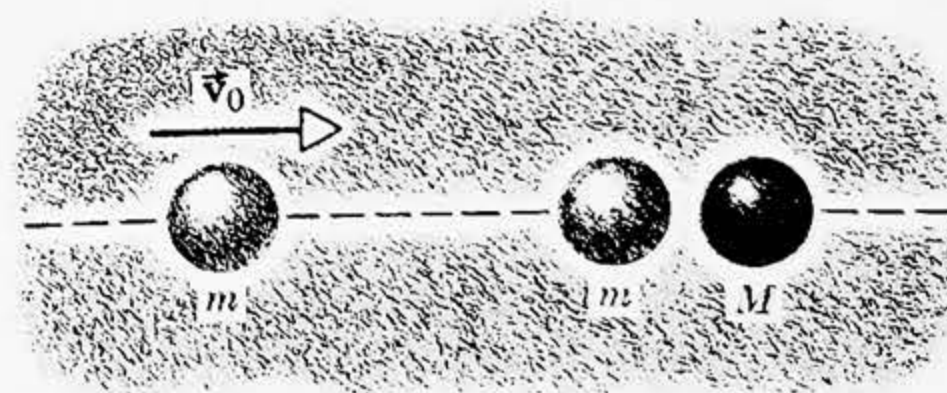


Figura 10-20.

frontale, (a) să se arate că se produc exact două ciocniri dacă $M \leq m$ și să se afle toate vitezele finale; (b) să se arate că au loc trei ciocniri dacă $M > m$, și să se afle toate vitezele finale.

18. O bilă de masă m este proiectată cu viteza v_i în țeava unui pistol cu resort de masă M , inițial în repaus pe o suprafață fără frecări (vezi fig. 10-21). Bila m înțepenește în țeavă în punctul de maximă comprimare a resortului. Nu se pierde nici o energie prin frecare. Ce fracțiune din energia cinetică inițială a bilei este înmagazinată în resort?

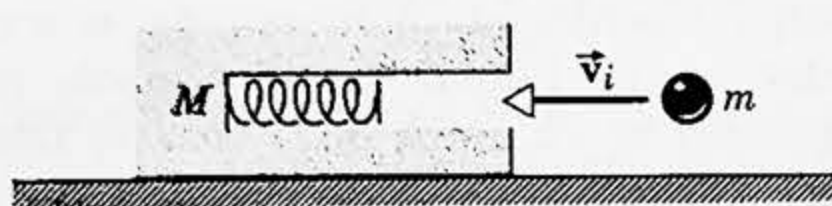


Figura 10-21.

19. Un bloc de masă $m_1 = 2,0$ kg alunecă pe o masă fără frecări cu o viteză de 10 m/s. Exact în fața lui există un alt bloc de masă $m_2 = 5,0$ kg care se mișcă în același sens cu o viteză de 3,0 m/s. Un resort de masă neglijabilă cu constanta elastică $k = 1120$ N/m este legat de fața posterioară a masei m_2 așa cum se arată în figura 10-22. Când blocurile se ciocnesc, care este comprimarea maximă a resortului? Se presupune că resortul

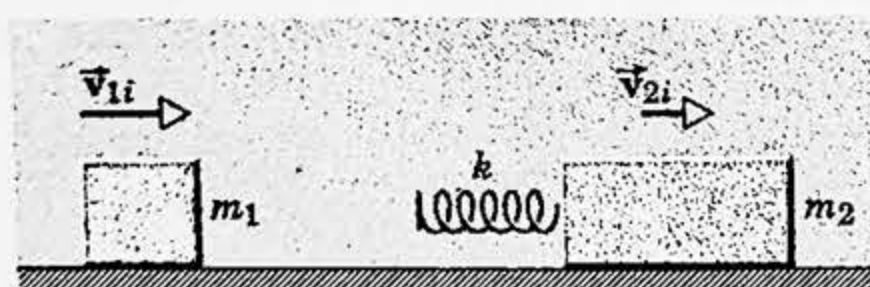


Figura 10-22.

nu se încovoale lateral ci se supune tot timpul legii lui Hooke.

20. O cutie este pusă pe un cântar care este potrivit să indice zero când

cutia este goală. O vînă de pietricele este turnată apoi în cutie de la o înălțime h deasupra fundului cutiei cu o viteză de μ pietricele pe secundă. Fiecare pietricică are o masă m . Dacă ciocnirile dintre pietricele și cutie sînt complet neelastice, să se afle indicația cântarului la momentul t după ce pietricele încep să umple cutia. Aplicație numerică: $\mu = 100$ s⁻¹, $h = 8,0$ m, $mg = 40$ N și $t = 10$ s.

21. O balanță este aranjată să indice zero. De la o înălțime de 2,7 m cad particule peste talerul balanței; ciocnirile sînt elastice, adică particulele ricoșează în sus cu aceeași viteză. Dacă fiecare particulă are o masă de 113 g și ciocnirile se produc cu o frecvență de 32 particule/s, care va fi indicația balanței în kgf?

22. Un electron se ciocnește elastic cu un atom de hidrogen aflat inițial în repaus. Mișcările inițială și finală au loc de-a lungul aceleiași linii drepte. Ce fracțiune din energia cinetică inițială a electronului este transferată atomului de hidrogen? Masa atomului de hidrogen este de 1840 de ori mai mare decît masa unui electron.

23. Un electron de masă m lovește frontal un atom de masă M aflat inițial în repaus. Ca rezultat al ciocnirii o cantitate caracteristică de energie E este înmagazinată intern în atom. Ce viteză inițială minimă v_0 trebuie să aibă electronul? (Indicație: principiile de conservare duc la o ecuație pătratică pentru viteza finală v a electronului și la o ecuație pătratică pentru viteza finală V a atomului. Valoarea minimă v_0 rezultă din condiția ca radicalul în soluțiile pentru v și V să fie real.)

24. (a) Să se arate că într-o ciocnire elastică unidimensională viteza centrului de masă a două particule, m_1 mișcîndu-se cu viteza inițială v_{1i} și

m_2 mișcându-se cu viteza inițială v_{2i} , este

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

(b) Să se folosească expresiile obținute pentru vitezele particulelor după ciocnire, v_{1f} și v_{2f} , pentru a deduce același rezultat pentru v_{cm} după ciocnire.

25. Un corp de masă m_1 se ciocnește frontal cu un corp de masă m_2 inițial în repaus, într-o ciocnire complet neelastică. (a) Care este energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire? (b) Care este energia cinetică a sistemului după ciocnire? (c) Ce fracțiune din energia cinetică inițială este convertită în căldură? (d) Fie \vec{v}_{cm} viteza centrului de masă al sistemului. Să se considere ciocnirea dintr-un sistem de referință „prim” care se mișcă odată cu centrul de masă, astfel încât $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$, $v'_{2i} = -v_{cm}$. Să se răspundă la întrebările de la punctele (a), (b) și (c), considerând un observator în acest sistem de referință. Este energia mecanică convertită în căldură aceeași în fiecare caz? Să se explice.

26. Să se arate că, în cazul unei ciocniri elastice între o particulă de masă m_1 și o particulă de masă m_2 inițial în repaus, (a) unghiul maxim θ_m cu care poate fi deviată particula de masă m_1 prin ciocnire este dat de $\cos^2 \theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$, astfel încât $0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$ dacă $m_1 > m_2$; (b) $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, dacă $m_1 = m_2$; (c) θ_1 poate lua toate valorile cuprinse între 0 și π , dacă $m_1 < m_2$.

27. O bilă de biliard care se mișcă cu o viteză de 2,2 m/s lovește oblic o altă bilă identică aflată în repaus. După ciocnire o bilă se mișcă cu viteza de 1,1 m/s într-o direcție care face un unghi de 60° cu direcția mișcării inițiale. Să se afle viteza celeilalte bile. Poate fi ciocnirea neelastică pentru aceste date ale problemei?

28. O particulă α se ciocnește cu un nucleu de oxigen aflat inițial în repaus. Particula α este împrăștiată sub un unghi de 64° față de direcția mișcării sale inițiale, iar nucleul de oxigen capătă un recul sub un unghi de 51° de cealaltă parte a direcției sale inițiale. Care este raportul vitezelor acestor particule? Masa nucleului de oxigen este de patru ori mai mare decât masa particulei α .

29. Două bile A și B având mase diferite și necunoscute se ciocnesc. Bila A este inițial în repaus, în timp ce bila B are o viteză v . După ciocnire B are o viteză $v/2$ și se mișcă sub un unghi drept față de mișcarea sa inițială. Să se afle direcția în care se va mișca bila A după ciocnire. Se poate determina viteza lui A din informațiile date? Să se explice.

30. Două vehicule A și B se mișcă spre vest respectiv spre sud către o aceeași intersecție unde ele se ciocnesc și se cuplează împreună. Înainte de ciocnire, A (de greutate totală 450 kgf) se mișcă cu o viteză de 60 km/h, iar B (greutatea totală 600 kgf) are o viteză de 90 km/h. Să se afle mărimea și direcția vitezei vehiculelor cuplate imediat după ciocnire.

31. Deuteronul este o particulă nucleară formată dintr-un proton și un neutron. Masa sa este de aproximativ $4 \cdot 10^{-27}$ kg. Un deuteron accelerat de un ciclotron pînă la o viteză de 10^7 m/s se ciocnește de un alt deuteron aflat în repaus. (a) Dacă cele două particule fuzionează pentru a forma un nucleu de heliu, să se afle viteza nucleului. (b) Nucleul de heliu fisionează apoi într-un neutron cu o masă de aproximativ $2 \cdot 10^{-27}$ kg și un izotop al heliului cu masa de $6 \cdot 10^{-27}$ kg. Dacă neutronul este emis sub un unghi drept față de direcția vitezei inițiale, cu o viteză de $5 \cdot 10^6$ m/s, să se afle mărimea și direcția vitezei izotopului de heliu.

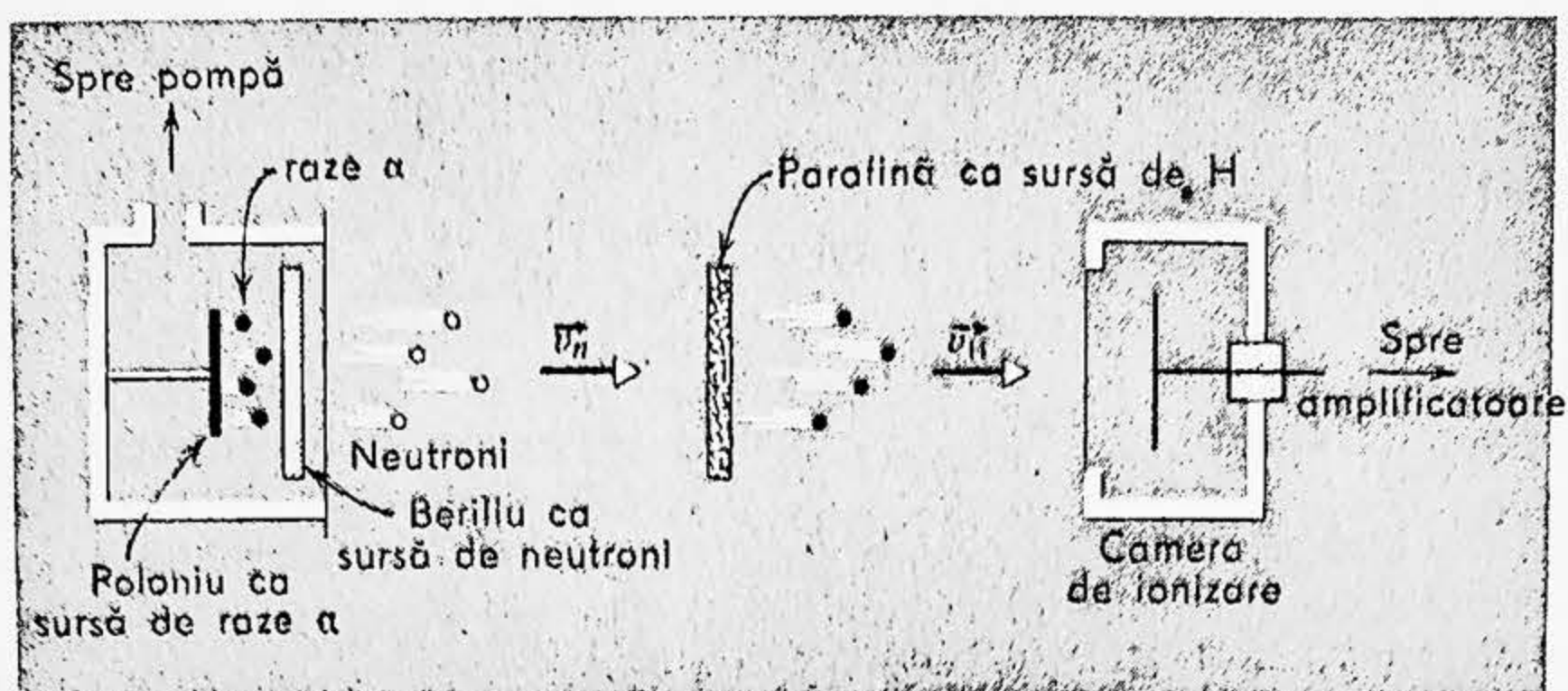


Figura 10-23.

32. În 1932 Chadwick din Anglia a demonstrat existența și proprietățile neutronului (una din particulele fundamentale care constituie atomul) cu ajutorul instalației arătate în figura 10-23. Într-o cameră vidată, o probă de poloniu radioactiv se dezintegrează emițând raze α (nuclee de heliu). Aceste nuclee lovesc un bloc de beriliu inducând un proces în care sînt emiși neutroni. (Reacția este: He și Be se combină pentru a forma carbon radioactiv, care se dezintegrează în carbon stabil+neutroni.) Neutronii lovesc o peliculă de parafină (CH_4), eliberînd nuclee de hidrogen care sînt detectate într-o cameră de ionizare. Cu alte cuvinte, are loc o ciocnire elastică în care impulsul neutronului este parțial transferat nucleului de hidrogen.

(a) Să se afle o expresie pentru viteza maximă v_H pe care o poate atinge nucleul de hidrogen (de masă m_H). Se presupune că neutronii incidenți au masa m_n și viteza v_n . (Indicație: se va transfera mai multă energie într-o ciocnire frontală sau într-o ciocnire oblică?)

(b) Unul din scopurile lui Chadwick era de a găsi masa acestei noi particule. Examinarea expresiei de la punctul (a) care conține acest para-

metru arată însă că figurează două necunoscute: v_n și m_n (v_H este cunoscut; el poate fi măsurat cu ajutorul camerei de ionizare). Pentru a elimina necunoscuta v_n , el a înlocuit parafina cu un bloc de paracyanogen (CN). Neutronii au suferit atunci ciocniri elastice cu nuclee de azot în locul nucleelor de hidrogen. Desigur, expresia de la punctul (a) este încă valabilă dacă în locul lui v_H scriem v_N și în locul lui m_H punem m_N .

Prin urmare, dacă v_H și v_N sînt măsurate în experiențe separate, v_n poate fi eliminat din cele două expresii pentru hidrogen și azot, dînd o valoare a lui m_n . Valorile găsite de Chadwick au fost

$$v_H = 3,3 \cdot 10^7 \text{ m/s,}$$

$$v_N = 0,47 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Care a fost valoarea determinată de el pentru masa m_n ? Cum este această valoare în comparație cu valoarea stabilită astăzi $m_n = 1,00867 \text{ u}$? (Se va lua $m_H = 1,0 \text{ u}$, $m_N = 14 \text{ u}$.)

33. O sferă de rază r_1 lovește o sferă de rază r_2 . Care este secțiunea eficace pentru o ciocnire de contact?

34. Un fascicul de neutroni rapizi cade pe o probă de $5,0 \text{ g } ^{65}\text{Cu}$ care este un izotop stabil al cuprului.

Există o posibilitate ca nucleul de cupru să capteze un neutron pentru a forma ^{66}Cu care este radioactiv și dezintegrează în ^{66}Zn care este iarăși stabil. Dacă un studiu al emisiei de electroni de către proba de cupru arată că în fiecare secundă se produc $4,6 \cdot 10^{11}$ captări de neutroni, care este secțiunea eficace pentru captarea de neutroni în acest proces, exprimată în barni? Intensitatea fascicului de neutroni este de $1,1 \cdot 10^{18}$ neutroni/m²·s.

35. Un fascicul de neutroni lenți cade pe o foiță de aluminiu de $1,0 \cdot 10^{-5}$ m grosime. Unii neutroni sînt captați de aluminiu care devine radioactiv și se dezintegrează emițînd un electron (β^-) și formînd siliciu:



Se va presupune că fluxul de neutroni este de $3,0 \cdot 10^{16}$ neutroni/m²·s și că secțiunea de captare a neutronilor este de 0,23 barni. Cîte transmutații se vor produce pe metru pătrat în fiecare secundă?

36. Într-o foiță groasă există un mare număr de straturi de particule-tîntă, astfel încît numărul particulelor proiectil care ating un strat va depinde de numărul particulelor împrăștiat de straturile precedente. Fie N numărul particulelor care ating un strat la o adîncime s și fie $-dN$ numărul de particule pierdute prin împrăștiere pe acel strat; să se arate atunci că

$$-\frac{dN}{N} = n\sigma ds$$

și

$$N = N_0 e^{-n\sigma s}$$

unde N_0 este numărul particulelor incidente pe fața foliei ($s=0$).

37. Masele precise din reacția



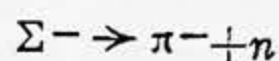
au fost determinate prin măsurători cu spectrometre de mase și sînt

$$m_p = 1,00783 \text{ u}, \quad m_\alpha = 4,00260 \text{ u},$$

$$m_F = 18,99840 \text{ u}, \quad m_O = 15,99491 \text{ u}.$$

Să se calculeze Q al reacției din aceste date și să se compare cu Q calculat în exemplul 6 din studiul reacției.

38. O particulă elementară numită Σ^- , aflată în repaus într-un anumit sistem de referință, se dezintegrează spontan în două alte particule potrivit schemei



Masele sînt

$$m_{\Sigma^-} = 2\,340,5 \, m_e$$

$$m_{\pi^-} = 273,2 \, m_e$$

$$m_n = 1\,838,65 \, m_e$$

unde m_e este masa electronului. (a) Cîtă energie cinetică este generată în acest proces? (b) Care din produsele dezintegrării (π^- sau n) capătă o fracțiune mai mare din această energie cinetică? Dar din impuls?

Cinematica mișcării de rotație

11-1. Mișcarea de rotație

Până acum ne-am ocupat în special cu mișcarea de translație a particulelor individuale sau a corpurilor rigide, adică a corpurilor ale căror părți au distanțe reciproce fixe. În realitate nici un corp real nu este rigid, dar multe corpuri, cum sînt moleculele, barele de oțel și planetele sînt destul de rigide astfel încît în multe probleme putem ignora faptul că ele se strîmbă, se încovoie sau vibrează. După cum arată figura 3-1, *un corp rigid efectuează o mișcare de translație pură dacă fiecare particulă a corpului descrie o aceeași deplasare ca oricare altă particulă în fiecare interval de timp dat.*

În acest capitol ne interesează *rotația*. Pentru moment ne restrîngem din nou la particule individuale și la corpurile rigide, ceea ce înseamnă că nu vom considera acele mișcări de rotație cum ar fi ale sistemului solar sau ale apei dintr-un vas care se rotește. Ne vom ocupa de asemenea numai cu rotația în jurul unor axe care rămîn fixe în sistemul nostru de referință în care observăm rotația.

Figura 11-1 arată mișcarea de rotație a unui corp rigid în jurul unei axe fixe, aleasă în acest caz drept axa z a sistemului nostru de referință. Să presupunem că P reprezintă o particulă din corpul rigid, aleasă arbitrar și descrisă de vectorul de poziție \vec{r} . Spunem atunci că: *Un corp rigid execută o rotație pură dacă fiecare particulă a corpului (cum este P din fig. 11-1) se mișcă pe un cerc; centrele acestor cercuri se află pe o dreaptă numită axă de rotație (axa z din fig. 11-1). Dacă ducem o perpendiculară din orice punct al corpului pe axă, fiecare astfel de linie va mătura un același unghi în fiecare interval de timp dat, ca și oricare altă linie de acest fel. În modul acesta, putem descrie rotația pură a unui corp rigid considerînd mișcarea uneia din particulele (cum este P) care formează corpul. (Trebuie să excludem totuși particulele care se află pe axa de rotație. De ce?)*

Mișcarea generală a unui corp rigid este o mișcare compusă dintr-o translație și o rotație, și nu o rotație pură. Putem determina poziția unui corp rigid care se mișcă prin translație pură dând cele trei coordonate x, y, z ale oricărui punct al său (de exemplu centrul său de masă) într-un anumit sistem de referință. Pentru un corp care se rotește, în timp ce se mișcă prin translație, avem nevoie în cazul cel mai general de trei coordonate în plus, cum sînt unghiurile, pentru a specifica orientarea corpului în raport cu sistemul de referință. Figura 11-2 (vezi

de asemenea fig. 9-1) arată un caz particular al mișcării unui corp rigid reprezentînd o translație și o rotație. Figura este o extindere a figurii 3-1 în care acum corpul se rotește în timpul mișcării de translație. Pentru a caracteriza poziția acestui corp trebuie să localizăm nu numai punctul O din corp în reperul xy , ci trebuie de asemenea să precizăm cum este orientat reperul $x'y'$ fixat de corp, față de reperul xy .

După cum am văzut în capitolul 9, putem descrie mișcarea de translație a oricărui sistem de particule, — fie el rigid sau nu — fie în rotație sau nu — imaginîndu-ne că întreaga masă M a corpului este concentrată în centrul de masă și că F_{ext} , rezultanta forțelor externe care

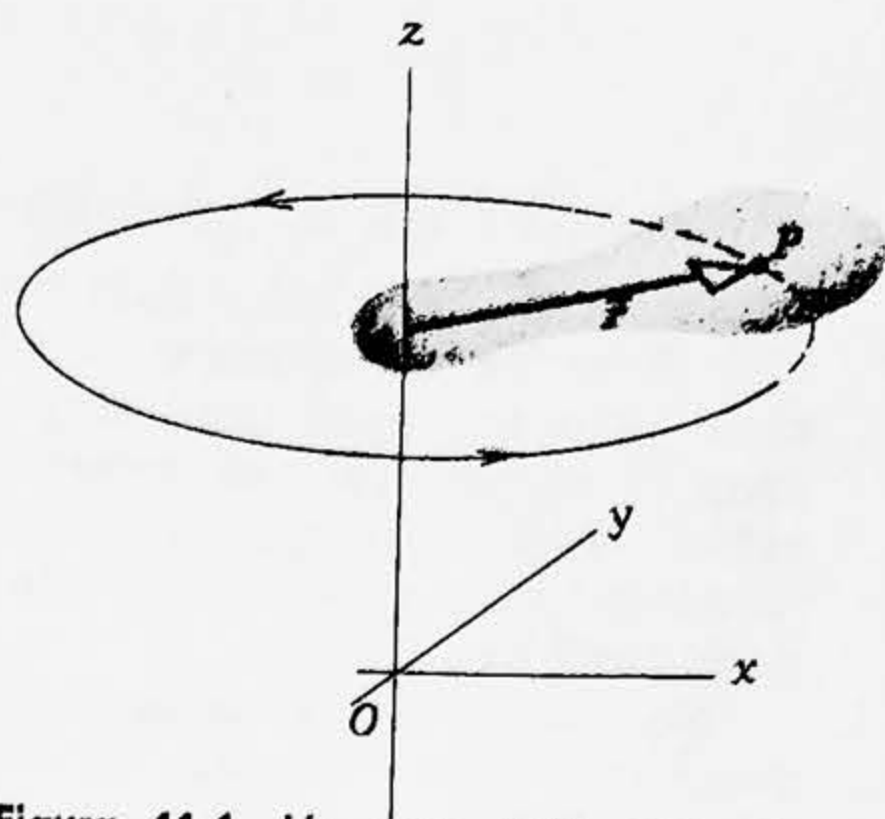


Figura 11-1. Un corp rigid care se rotește în jurul axei z . Fiecare punct al corpului, cum este P , descrie un cerc în jurul acestei axe.

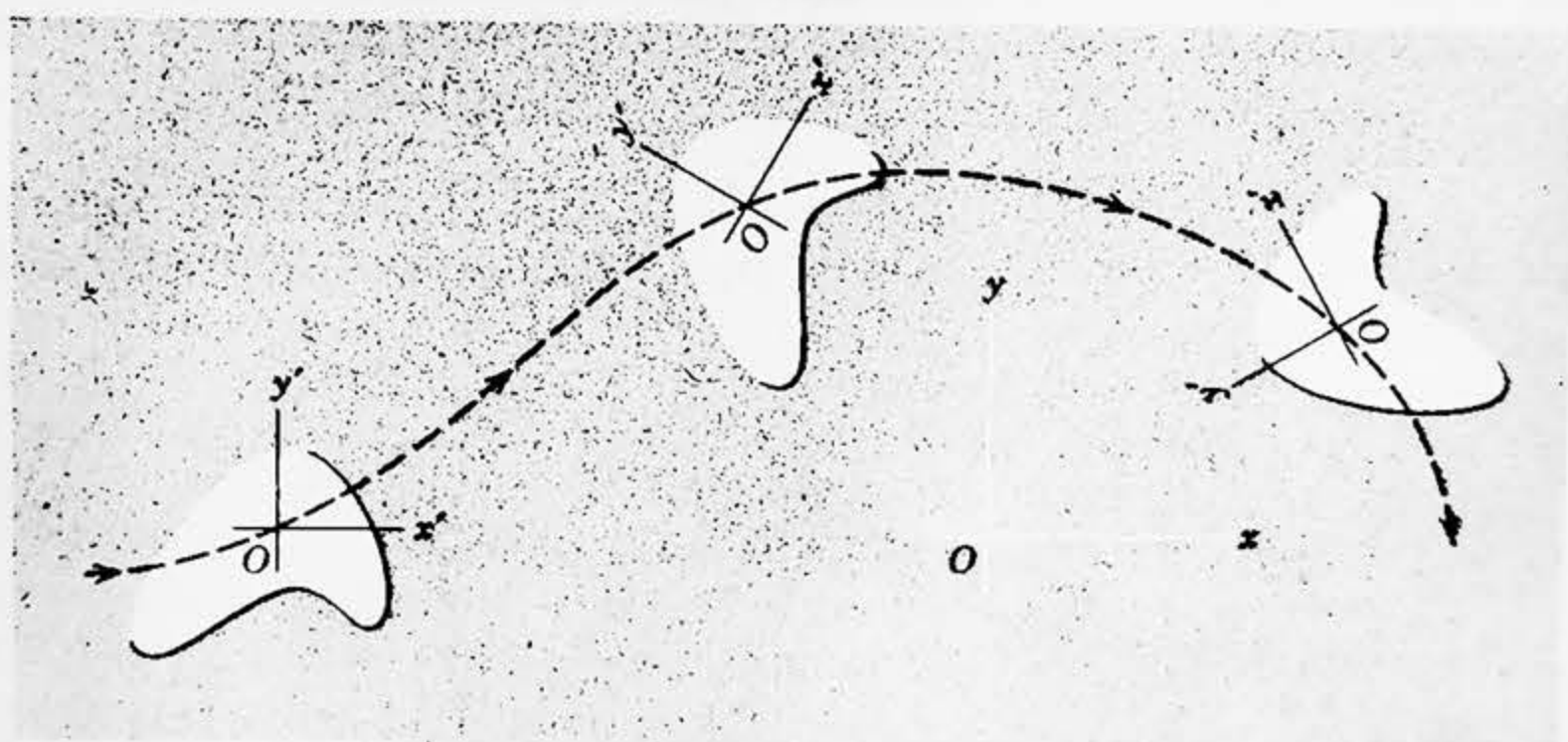


Figura 11-2. Un corp rigid care se mișcă prin translație și rotație combinate, așa cum este văzut dintr-un sistem de referință x, y . Observăm că sistemul de referință fixat de corp (x', y') își schimbă orientarea față de x, y în timpul mișcării. A se compara cu figurile 3-1 și 9-1. Această figură prezintă un caz particular în sensul că mișcarea de translație are loc numai într-un plan (planul xy) și mișcarea de rotație se face în jurul unei axe care păstrează o direcție fixă (axa z').

acționează asupra corpului, acționează în acel punct. Accelerația centrului de masă este atunci dată de ecuația (9-10) sau $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$. Este foarte util să putem fi în stare să reprezentăm mișcarea de translație a unui rigid prin mișcarea unui singur punct — a centrului său de masă; tot ceea ce rămâne este să determinăm mișcarea sa de rotație. Vom discuta astfel despre mișcare compusă, de translație și de rotație, în capitolul următor. Aceasta va fi ușor de făcut după ce am studiat rotația pură în jurul unei axe fixe.

Ne întoarcem de aceea acum la rotația pură a unui corp rigid în jurul unei axe fixe (fig. 11-1). Întâi trebuie să descriem mișcarea de rotație. Numim această descriere cinematica mișcării de rotație; trebuie să definim variabilele mișcării unghiulare și să stabilim o legătură între ele, așa cum în cinematica punctului material am definit variabilele mișcării de translație și relația dintre ele. Partea următoare a programului nostru este de a lega mișcarea de rotație a corpului de proprietățile corpului și ale mediului său. Aceasta reprezintă dinamica mișcării de rotație. În acest capitol studiem cinematica rotației. Vom dezvolta dinamica rotației în capitolul următor.

11-2. Cinematica mișcării de rotație. Variabilele

În figura 11-1 să ducem prin P un plan perpendicular pe axa de rotație. Acest plan, care trece prin corpul în rotație, conține cercul pe care se mișcă particula P . Figura 11-3 arată acest plan, privit de sus în jos, de-a lungul axei z în figura 11-1.

Putem spune exact unde se află întregul corp care se rotește în reperul nostru dacă cunoaștem poziția unei particule individuale (P) a corpului în acest reper. În modul acesta, pentru cinematica acestei probleme avem nevoie să considerăm doar mișcarea (bidimensională) a unei particule pe un cerc.

Unghiul θ din figura 11-3 reprezintă poziția (coordonata) unghiulară a particulei P față de poziția de referință. Alegem arbitrar sensul pozitiv

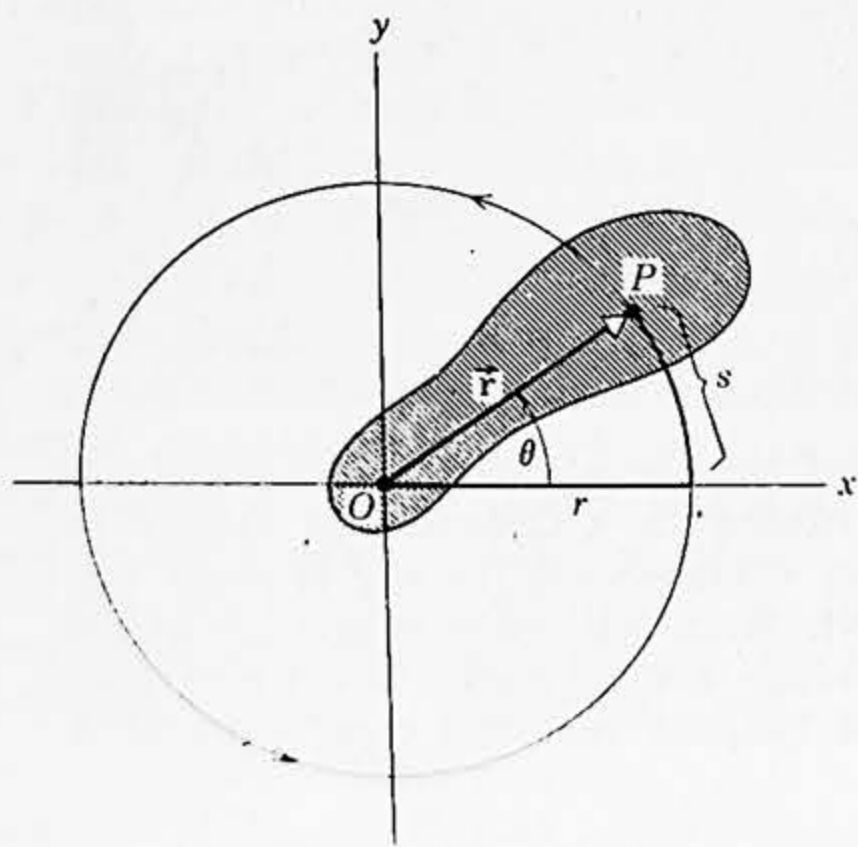


Figura 11-3. Vedere a unei secțiuni transversale a corpului rigid din figura 11-1, care arată punctul P și vectorul \vec{r} din acea figură. Punctul P care este fix în corp se rotește în sens trigonometric în jurul originii pe un cerc de rază r .

al rotației din figura 11-3 în sensul trigonometric (antiorar) astfel încât θ crește în cazul rotației în sens trigonometric și descrește în cazul rotației în sens contrar.

Este convenabil să măsurăm pe θ în radiani¹ și nu în grade. Prin definiție θ este dat în radiani prin relația

$$\theta = s/r,$$

în care s este lungimea arcului arătat în figura 11-3.

Fie corpul din figura 11-3 care se rotește în sens trigonometric (antiorar). La timpul t_1 poziția unghiulară a lui P este θ_1 și la un timp ulterior t_2 poziția sa unghiulară este θ_2 . Aceasta este arătat, în figura 11-4 care dă pozițiile

lui P și ale vectorului de poziție \vec{r} în aceste momente; conturul corpului însuși a fost omis în această figură pentru simplitate. Deplasarea unghiulară a lui P va fi $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ în intervalul de timp $t_2 - t_1 = \Delta t$. Viteza unghiulară medie $\bar{\omega}$ a particulei P în acest interval de timp este definită prin

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Viteza unghiulară instantanee ω este definită ca limita către care tinde acest raport atunci când Δt tinde către zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11-1)$$

Pentru un corp rigid toate liniile radiale ce pornesc din el și sînt perpendiculare pe axa de rotație, se rotesc cu același unghi în același timp, astfel încît viteza unghiulară ω în jurul acestei axe este aceeași pentru fiecare particulă a corpului. Astfel, ω este o caracteristică a corpului ca un întreg. Viteza unghiulară are dimensiunile inversului timpului (T^{-1}). unitățile ei se aleg de obicei ca fiind rad/s sau rot/s.

Dacă viteza unghiulară a lui P nu este constantă, particula are o accelerație unghiulară. Fie ω_1 și ω_2 vitezele unghiulare instantanee la momentele t_1 respectiv t_2 ; atunci accelerația unghiulară medie $\bar{\alpha}$ a particulei P se definește astfel:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

¹ Radianul este un număr pur, care nu are nici o dimensiune fizică deoarece el este raportul a două lungimi. Deoarece circumferința unui cerc de rază r este $2\pi r$, există 2π radianți într-un cerc complet, adică $0 - 2\pi r/r - 2\pi$. Prin urmare, $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ și $1 \text{ rad} \cong 57,3^\circ$.

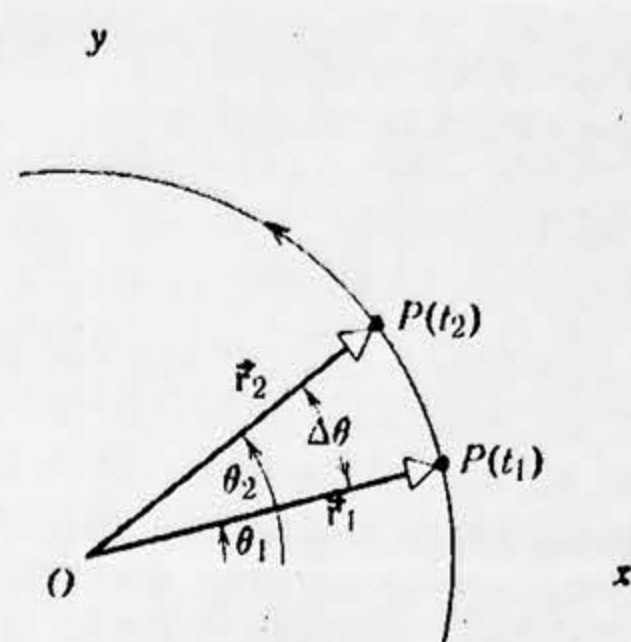


Figura 11-4. Linia de referință r ($=OP$) fixă în corpul din figurile 11-1 și 11-3, se rotește cu un unghi $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$ în timpul $\Delta t (= t_2 - t_1)$.

Accelerația unghiulară instantanee este limita acestui raport cînd Δt tinde către zero, adică

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11-2)$$

Deoarece ω este același pentru toate particulele corpului rigid, rezultă din ecuația (11-2) că α trebuie să fie același pentru fiecare particulă și deci α , la fel ca și ω , este o caracteristică a corpului ca un întreg. Accelerația unghiulară are dimensiunile inversului unui timp la pătrat (T^{-2}); unitățile sale se aleg de obicei rad/s^2 sau rot/s^2 .

Rotația unei particule (sau a unui corp rigid) în jurul unei axe fixe are o corespondență formală cu mișcarea de translație a unei particule (sau corp rigid) de-a lungul unei direcții fixe. Variabilele cinematice sînt θ , ω și α în primul caz și x , v și a în al doilea. Aceste mărimi sînt corespondente două cîte două: θ cu x , ω cu v și α cu a . Observăm că mărimile unghiulare diferă ca dimensiuni de mărimile liniare corespunzătoare printr-un factor de dimensiunea lungimii. Observăm de asemenea că toate cele șase mărimi pot fi tratate ca scalari în acest caz particular. De exemplu, o particulă se poate mișca în fiecare moment într-un sens sau altul de-a lungul drepte sale de mișcare, corespunzător valorii pozitive sau negative a lui v . Analog o particulă se poate roti în fiecare moment într-un sens sau altul în jurul axei sale fixe corespunzător valorii pozitive sau negative a lui ω .

Dacă în mișcarea de translație înlăturăm restricția ca mișcarea să aibă loc de-a lungul unei linii drepte și considerăm cazul general al mișcării în spațiul cu trei dimensiuni de-a lungul unei traiectorii curbe, variabilele liniare x , v și a se dovedesc a fi componentele scalare ale vectorilor cinematici \vec{r} , \vec{v} și \vec{a} . În paragraful 11-4, vom vedea în ce măsură variabilele din cinematica rotației se dovedesc a fi vectori dacă înlăturăm restricția ca axa de rotație să fie fixă.

11-3. Rotația cu accelerație unghiulară constantă

Pentru mișcarea de translație a unei particule sau a unui corp rigid de-a lungul unei axe fixe, cum ar fi axa x , am văzut (în capitolul 3) că cel mai simplu tip de mișcare este acela în care accelerația a este nulă. Tipul simplu următor corespunde lui $a = \text{const}$ (diferit de zero); pentru această mișcare am dedus ecuațiile din tabela 3-1, care leagă variabilele cinematice x , v , a și t în toate combinațiile posibile.

Pentru mișcarea de rotație a unei particule sau a unui corp rigid în jurul unei axe fixe cel mai simplu tip de mișcare este acela în care accelerația unghiulară α este nulă (cum este mișcarea circulară uniformă). Tipul simplu următor al mișcării, în care $\alpha = \text{const}$ (diferit de zero) corespunde exact mișcării liniare cu $a = \text{const}$ (diferit de zero). Ca și înainte, putem deduce patru ecuații care leagă cele patru variabile cinematice θ , ω , α și t în toate combinațiile posibile. Studentul poate deduce aceste ecuații unghiulare fie cu ajutorul metodelor folosite la

deducerea ecuațiilor liniare (vezi exemplul 2) sau le poate scrie dintr-odată substituind mărimile unghiulare corespunzătoare în locul mărimilor liniare în acele ecuații liniare.

Prezentăm ambele serii de ecuații în tabela 11-1, alegând $x_0=0$ și $\theta_0=0$ în aceste relații pentru simplitate. Aici ω_0 este viteza unghiulară la momentul $t=0$. Studentul trebuie să verifice aceste ecuații din punctul de vedere dimensional înainte de a le deduce. Ambele serii de ecuații sînt valabile nu numai pentru particule dar și pentru corpuri rigide.

Tabela 11-1

MIȘCAREA CU ACCELERAȚIE LINIARĂ SAU UNGHIULARĂ CONSTANTĂ

Mișcarea de translație (direcție fixă)		Mișcarea de rotație (axă fixă)	
(3-12)	$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\alpha t$	(11-3)
(3-14)	$x=\frac{v_0+v}{2}t$	$\theta=\frac{\omega_0+\omega}{2}t$	(11-4)
(3-15)	$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	(11-5)
(3-16)	$v^2=v_0^2+2ax$	$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$	(11-6)

Pentru mărimile unghiulare alegem arbitrar unul din cele două sensuri posibile de rotație în jurul axei fixe ca fiind sensul în care θ crește. Din ecuația (11-1) ($\omega=d\theta/dt$) vedem că dacă θ crește în timp atunci ω este pozitiv. Analog, din ecuația (11-2) ($\alpha=d\omega/dt$), vedem că dacă ω crește în timp, α este pozitiv. Există convenții corespunzătoare de semn pentru mărimile liniare.

Exemplul 1. O piatră (disc) de polizor are o accelerație unghiulară constantă α de $3,0 \text{ rad/s}^2$. În poziția de plecare linia OP din figura 11-5 este orizontală. Să se afle: (a) deplasarea unghiulară a liniei OP (și deci a discului) și (b) viteza unghiulară a discului $2,0 \text{ s}$ mai târziu.

(a) α și t sînt date; vrem să aflăm pe θ . Prin urmare, vom folosi ecuația (11-5):

$$\theta=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2.$$

La $t=0$, avem $\omega=\omega_0=0$ și $\alpha=3,0 \text{ rad/s}^2$. Prin urmare, după $2,0 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}\theta &= (0) \cdot (2,0 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot (3,0 \text{ rad/s}^2) \cdot (2,0 \text{ s})^2 = \\ &= 6,0 \text{ rad} = 0,96 \text{ rot.}\end{aligned}$$

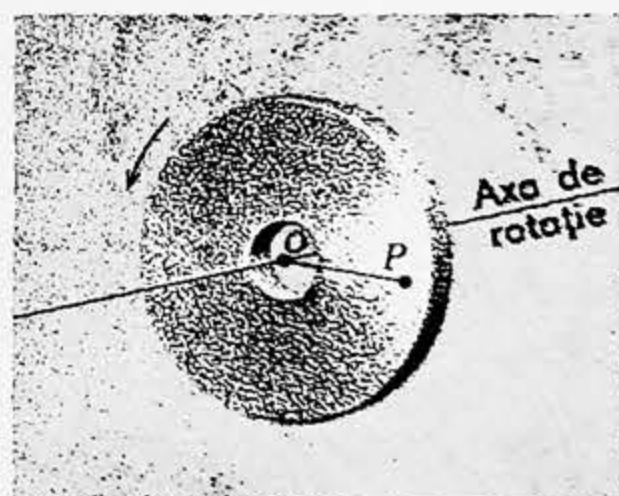


Figura 11-5. Exemplul 1. Linia OP este legată de o piatră de polizor ce se rotește în jurul unei axe care trece prin O și este fixă în reperul observatorului.

(b) α și t sînt date; vrem să aflăm pe ω . Prin urmare vom folosi ecuația (11-3):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

și

$$\omega = 0 + (3,0 \text{ rad/s}^2) (2,0 \text{ s}) = 6,0 \text{ rad/s}.$$

Folosind ecuația (11-6) ca verificare, avem:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta.$$

$$\omega^2 = 0 + 2 \cdot (3,0 \text{ rad/s}^2) (6,0 \text{ rad}) = 36 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$

$$\omega = 6,0 \text{ rad/s}.$$

Exemplul 2. Să se deducă ecuația $\omega = \omega_0 + \alpha t$ pentru o accelerație unghiulară constantă.

(a) Plecînd de la definiția accelerației unghiulare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

avem

$$\alpha dt = d\omega$$

sau

$$\int \alpha dt = \int d\omega.$$

Dar α este o constantă, astfel încît

$$\alpha \int dt = \int d\omega.$$

Dacă la $t=0$ notăm viteza unghiulară cu ω_0 , avem

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

sau

$$\alpha t = \omega - \omega_0$$

și

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

(b) Putem deduce de asemenea rezultatul folosind faptul că accelerația medie este egală cu accelerația instantanee atunci cînd accelerația este constantă. Accelerația medie este

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0};$$

Pentru accelerație constantă avem $\alpha = \bar{\alpha}$. Punînd $t_0 = 0$, obținem

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

sau

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Studentul trebuie să compare această deducție cu cea a relației liniare corespunzătoare $v = v_0 + at$ din paragraful 3-8.

11-4. Mărimile mișcării de rotație ca vectori

Deplasarea liniară, viteza și accelerația sînt vectori. Mărimile unghiulare corespunzătoare pot fi de asemenea vectori, deoarece în completare la mărimea sau intensitatea lor, putem specifica de asemenea o direcție și un sens pentru ele, anume direcția axei de rotație în spațiu. Deoarece am considerat rotația numai în jurul unei axe fixe, am fost în stare să tratăm pe θ , ω și α ca mărimi scalare. Dacă direcția axei variază însă, nu mai putem evita întrebarea „sînt mărimile de rotație vectori?” Putem hotărî numai verificînd dacă ele satisfac sau nu legile compunerii vectoriale.

Să discutăm mai întîi deplasarea unghiulară θ . Mărimea deplasării unghiulare a unui corp este unghiul cu care se rotește corpul. Deplasările unghiulare *nu* sînt însă vectori deoarece ele *nu* se adună ca vectori. De exemplu, să imprimăm două rotații succesive θ_1 și θ_2 unei cărți care inițial se află pe o masă plană. Fie rotația de unghi θ_1 egal cu 90° în sens orar în jurul unei axe verticale care trece prin centrul cărții dacă privim de sus. Fie θ_2 o rotație de 90° în sens orar în jurul unei axe nord-sud care trece prin centrul cărții dacă privim spre nord. În primul caz, să aplicăm întîi operația θ_1 și apoi θ_2 . În al doilea caz să aplicăm întîi operația θ_2 și apoi θ_1 . Studentul trebuie să încerce aceste operații singur. Acum, dacă deplasările unghiulare ar fi mărimi vectoriale, ele ar trebui să se compună ca vectori. În particular ele ar trebui să verifice legea adunării vectoriale $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$, care ne spune că ordinea în care adunăm vectorii nu afectează suma lor. Această lege nu se respectă pentru deplasări unghiulare finite (vezi exercițiul de mai sus și de asemenea fig. 11-6, a). Prin urmare, deplasările unghiulare finite nu sînt mărimi vectoriale.

Să presupunem că în locul rotațiilor de 90° am efectuat rotații de 3° . Rezultatul sumei $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2$ va diferi din nou de rezultatul sumei $\vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$, însă diferența va fi mult mai mică. De fapt, pe măsură ce cele două deplasări unghiulare devin mai mici, diferența dintre cele două sume dispare repede (fig. 11-6, b, c). Dacă deplasările unghiulare sînt infinitezimale, ordinea adunării nu mai afectează rezultatul. Prin urmare, *deplasările unghiulare infinitezimale sînt vectori*.

Mărimile definite prin intermediul deplasărilor unghiulare infinitezimale pot fi ele însele vectori. De exemplu, viteza unghiulară este $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$. Deoarece $d\vec{\theta}$ este un vector iar dt un scalar, raportul lor este un vector. Prin urmare, viteza unghiulară este un vector. În figura 11-7, a, de exemplu, reprezentăm viteza unghiulară ω a corpului rigid aflat în rotație printr-o săgeată dusă de-a lungul axei de rotație; în figura 11-7, b reprezentăm rotația unei particule (cum este P din fig. 11-7, a) în jurul unei axe fixe în același mod. Lungimea săgeții este proporțională cu mărimea sau modulul vitezei unghiulare. Sensul rotației determină sensul în care este îndreptată săgeata de-a lungul axei. Prin convenție, dacă degetele *mîinii drepte* înconjură axa în sensul de rotație a corpului, degetul mare ridicat va arăta direcția și sensul vectorului viteză unghiulară. Pentru corpul rigid din figura 11-1

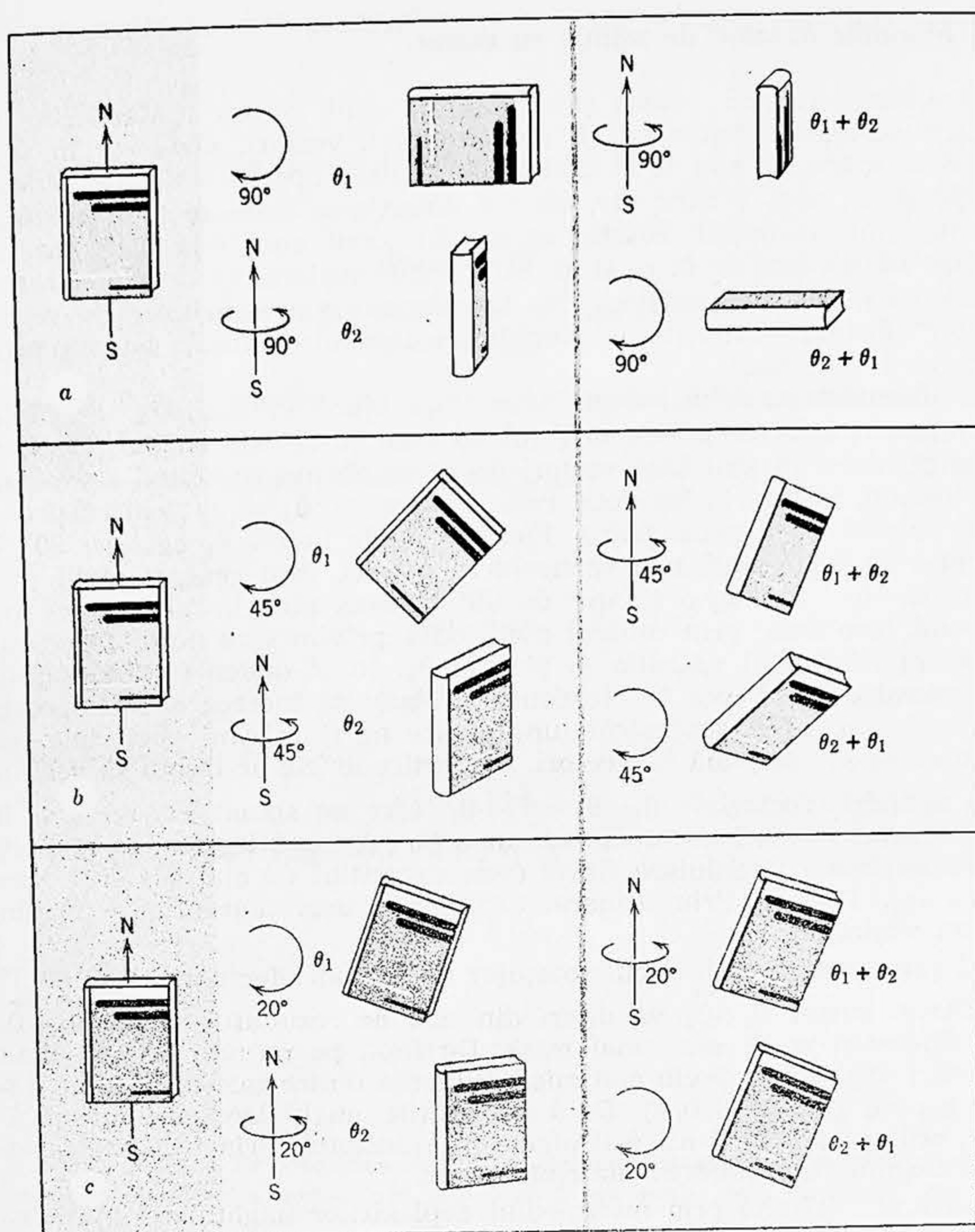


Figura 11-6. (a) O carte rotită cu θ_1 (90° în jurul unei axe verticale, așa cum este arătat) și apoi cu θ_2 (90° în jurul unei axe N-S) așa cum este arătat, are o orientare finală diferită decât în cazul când este rotită întâi cu θ_2 și apoi cu θ_1 . Această proprietate se numește necomutativitatea unghiurilor finite față de adunare: $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. (b) Grupul de la mijloc reprezintă același lucru cu excepția faptului că unghiurile de rotație sînt mai mici, anume 45° . Deși orientările finale mai diferă încă, ele sînt mult mai apropiate între ele. (c) Grupul de jos repetă experiența pentru rotații de 20° . Vedem aici că $\theta_1 + \theta_2 \cong \theta_2 + \theta_1$. Când $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$, pozițiile finale tind una către cealaltă. Unghiurile finite tind să comute față de adunare, pe măsură ce unghiurile devin foarte mici. Unghiurile infinitesimale comută față de adunare, ceea ce face posibilă tratarea lor ca vectori.

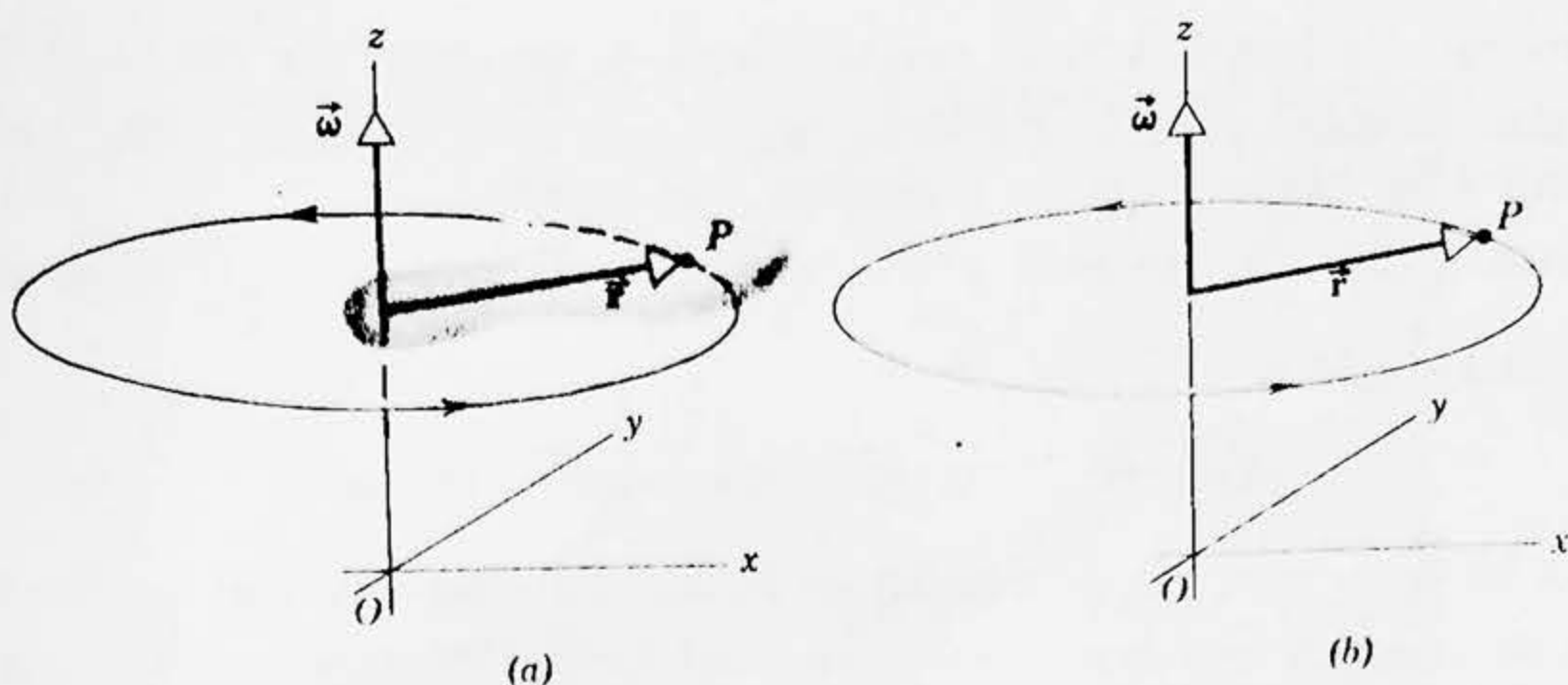


Figura 11-7. Viteza unghiulară ω (a) a unui corp rigid care se rotește și (b) a unei particule care se rotește în jurul unei axe fixe.

vectorul viteză unghiulară va fi deci în sensul pozitiv al axei z . În figura 11-3, $\vec{\omega}$ va fi perpendicular pe pagină și va avea sensul în sus spre noi, corespunzător rotației în sensul trigonometric. Viteza unghiulară a discului unui patefon este un vector îndreptat în jos. Observăm că nimic nu se mișcă în direcția și în sensul vectorului viteză unghiulară. Vectorul reprezintă viteza unghiulară a mișcării de rotație care are loc în planul perpendicular pe el.

Accelerația unghiulară este de asemenea o mărime vectorială. Aceasta rezultă din definiția $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$, în care $d\vec{\omega}$ este un vector, iar dt un scalar. Mai târziu vom întâlni alte mărimi ale mișcării de rotație care sînt vectori, cum este momentul forței și momentul cinetic.

Exemplul 3. Un disc se rotește pe un ax orizontal montat în lagăre, cu o viteză unghiulară ω_1 de 100 rad/s ca în figura 11-8, a. Întregul ansamblu format din disc și ax este plasat pe un disc turnant care se rotește în jurul unei axe verticale cu $\omega_2 = 30,0$ rad/s, în sens trigonometric dacă este privit de sus. Să se descrie rotația discului așa cum este văzută de un observator aflat în cameră.

Discul este supus simultan la două viteze unghiulare; putem descrie mișcarea sa rezultantă prin suma vectorială a acestor vectori. Viteza unghiulară $\vec{\omega}_1$ asociată cu rotația în jurul axului are o intensitate de 100 rad/s și se produce în jurul unei

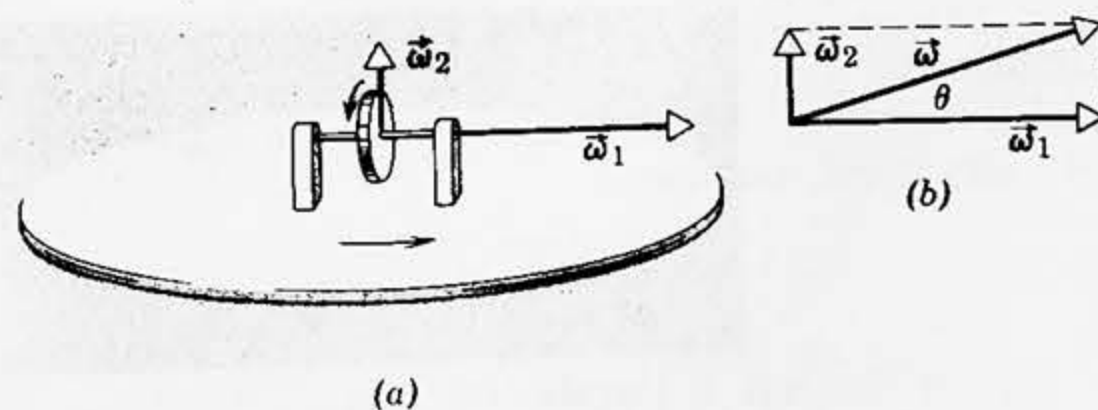


Figura 11-8. (a) Un disc care se învîrtește pe un alt disc rotitor. (b) Vitezele unghiulare se adună ca vectori.

axe care nu este însă fixă ci se rotește, văzută de un observator din cameră, într-un plan orizontal cu 30 rad/s. Viteza unghiulară $\vec{\omega}_2$ asociată de discul turnant este dirijată vertical în sus și are o intensitate de 30 rad/s.

Viteza unghiulară rezultantă a discului $\vec{\omega}$ este suma vectorială a lui $\vec{\omega}_1$ și $\vec{\omega}_2$.

Modulul lui $\vec{\omega}$ este

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(100 \text{ rad/s})^2 + (30,0 \text{ rad/s})^2} = 104 \text{ rad/s}.$$

Direcția lui $\vec{\omega}$ nu este fixă în sistemul de referință al observatorului nostru ci se rotește cu aceeași viteză unghiulară ca și discul turnant. Vectorul $\vec{\omega}$ nu se află în planul orizontal ci este îndreptat sub un unghi θ față de planul orizontal (vezi fig. 11-8, b), unde

$$\theta = \arctg \omega_2/\omega_1 = \arctg (30,0 \text{ rad/s})/(100 \text{ rad/s}) = \arctg 0,300 = 16,7^\circ$$

Putem descrie mișcarea discului ca o simplă rotație în jurul acestei noi axe (a cărei direcție în sistemul de referință al observatorului nostru variază în timp așa cum s-a descris mai sus) cu o viteză unghiulară de 104 rad/s. Cum s-ar schimba situația dacă sensul de rotație al discului sau al discului turnant s-ar schimba?

11-5. Relația dintre cinematica mișcării liniare și cinematica mișcării unghiulare pentru o particulă în mișcare circulară. Forma scalară

În paragrafele 4-4 și 4-5 am discutat viteza liniară și accelerația unei particule care se mișcă pe un cerc. Atunci când un corp rigid se rotește în jurul unei axe fixe, fiecare particulă a corpului se mișcă pe un cerc. Prin urmare putem descrie mișcarea unei astfel de particule fie cu ajutorul variabilelor liniare fie cu ajutorul variabilelor unghiulare. Relația dintre variabilele liniare și cele unghiulare ne permite să trecem de la o descriere la alta și este foarte utilă.

Să considerăm o particulă a corpului rigid situată în P la o distanță r de axa de rotație care trece prin O . Această particulă se mișcă pe un cerc de rază r atunci când corpul se rotește, ca în figura 11-9. Poziția de referință este Ox . Particula se deplasează cu o distanță s de-a lungul arcului atunci când corpul se rotește cu un unghi θ astfel încât

$$s = \theta r \quad (11-7)$$

unde θ este în radiani.

Derivând ambii membri ai acestei ecuații în raport cu timpul și observând că r este constant, obținem

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Dar ds/dt este viteza liniară a particulei din P , și $d\theta/dt$ este viteza unghiulară ω a corpului aflat în rotație astfel încât

$$v = \omega r. \quad (11-8)$$

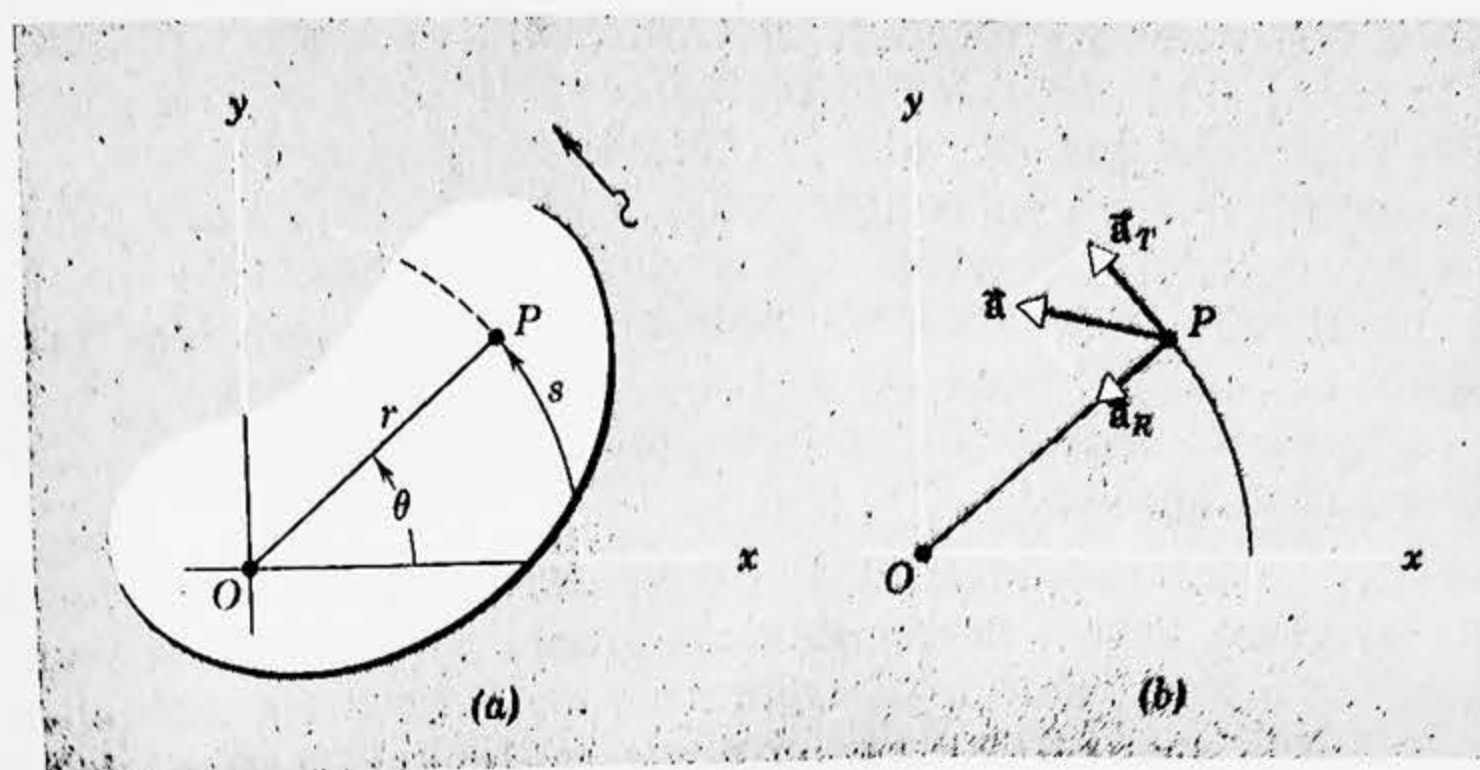


Figura 11-9. (a) Un corp rigid se rotește în jurul unei axe fixe care trece prin O perpendicular pe planul figurii. Punctul P descrie un arc s care subîntinde un unghi θ . (b) Accelerația \vec{a} a punctului P are o componentă tangențială \vec{a}_T unde $a_T = \alpha r$ și o componentă radială \vec{a}_R unde $a_R = v^2/r = \omega^2 r$ (ω = viteza unghiulară).

Aceasta este relația dintre *mărimea vitezei liniare* și *mărimea vitezei unghiulare*; viteza liniară a unei particule în mișcare circulară este egală cu produsul dintre viteza unghiulară și distanța r a particulei pînă la axa de rotație.

Derivînd ecuația (11-8) în raport cu timpul, avem

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

Dar dv/dt este mărimea componentei *tangențiale* a accelerației particulei (vezi paragraful 4-5) și $d\omega/dt$ este mărimea accelerației unghiulare a corpului în rotație, astfel încît

$$a_T = \alpha r. \quad (11-9)$$

Prin urmare modulul componentei tangențiale a accelerației liniare a unei particule în mișcare circulară, este egal cu produsul dintre modulul accelerației unghiulare și distanța r a particulei pînă la axa de rotație.

Am văzut că componenta *radială* a accelerației este v^2/r pentru o particulă care se mișcă pe un cerc. Acest raport poate fi exprimat cu ajutorul vitezei unghiulare, folosind ecuația (11-8). Avem

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (11-10)$$

Accelerația rezultantă a punctului P este arătată în figura 11-9, b.

Ecuațiile (11-7)—(11-10) ne permit să descriem mișcarea unui punct al rigidului aflat în rotație în jurul unei axe fixe fie prin variabilele unghiulare, fie prin variabilele liniare. Ne putem întreba de ce avem

nevoie de variabilele unghiulare cînd sîntem deja familiarizați cu variabilele liniare echivalente? Răspunsul este acela că descrierea unghiulară oferă un avantaj distinct față de descrierea liniară atunci cînd trebuie considerate diferitele puncte ale aceluiași rigid în rotație. Diferitele puncte ale aceluiași corp în rotație nu au aceeași deplasare liniară, aceeași viteză sau aceeași accelerație în schimb toate punctele unui rigid în rotație în jurul unei axe fixe au aceeași *deplasare unghiulară*, aceeași viteză unghiulară sau aceeași accelerație unghiulară în fiecare moment. Folosind variabilele unghiulare putem descrie mișcarea corpului ca un întreg într-un mod simplu.

Exemplul 4. Dacă raza discului de polizor din exemplul 1 este de 0,50 m, să se calculeze: (a) viteza liniară sau tangențială a unei particule de la periferia discului, (b) accelerația tangențială a unei particule de la periferia discului și (c) accelerația centripetă a unei particule de la periferia discului, la sfîrșitul a 2,0 s.

Avem $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$, $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$ după 2,0 s și $r = 0,50 \text{ m}$. Atunci

$$(a) \quad v = \omega r =$$

$$= (6,0 \text{ rad/s}) (0,50 \text{ m}) = 3,0 \text{ m/s} \quad (\text{viteza liniară});$$

$$(b) \quad a_T = \alpha r =$$

$$= (3,0 \text{ rad/s}^2) (0,50 \text{ m}) = 1,5 \text{ m/s}^2 \quad (\text{accelerația tangențială});$$

$$(c) \quad a_R = v^2/r = \omega^2 r =$$

$$= (6,0 \text{ rad/s})^2 (0,50 \text{ m}) = 18 \text{ m/s}^2 \quad (\text{accelerația centripetă}).$$

(d) Sînt rezultatele aceleași pentru o particulă situată la jumătatea razei discului adică la $r = 0,25 \text{ m}$?

Variabilele *unghiulare* sînt aceleași pentru acest punct ca pentru oricare alt punct de pe periferia discului. Adică, iarăși

$$\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega = 6,0 \text{ rad/s}.$$

Dar acum, $r = 0,25 \text{ m}$, astfel încît pentru această particulă

$$v = 1,5 \text{ m/s}, \quad a_T = 0,75 \text{ m/s}^2, \quad a_R = 9,0 \text{ m/s}^2.$$

11-6. Relația dintre cinematica mișcării liniare și cinematica mișcării unghiulare pentru o particulă în mișcare circulară. Forma vectorială

Studentul trebuie să observe că relațiile deduse în paragraful precedent sînt relații între mărimi *scalare*, atît variabilele liniare cît și cele unghiulare fiind exprimate în formă scalară. Să folosim acum metodele vectoriale, făcînd practic aceeași analiză ca în paragraful 4-5 cu excepția faptului că acum introducem variabilele unghiulare. Aceasta va ilustra, pentru un caz familiar tratarea mai generală și va pregăti calea pentru situațiile în care metodele vectoriale sînt esențiale.

Figura 11-10, *a* arată o particulă *P* care se rotește în jurul unei axe fixe care trece prin origină, la momentele t și $t + \Delta t$. Particula se mișcă pe un cerc de rază constantă r ; în afară de aceasta nu există nici o restricție asupra mișcării sale și

în general $\vec{\omega}$ și \vec{a} pot avea valori care să varieze în timpul mișcării particulei. Putem exprima restricția ca raza să fie constantă prin

$$\vec{r} = \vec{u}_r r, \quad (11-11)$$

în care \vec{u}_r este un versor în direcția lui \vec{r} .

Derivând ecuația (11-11) și ținând seama că r (nu însă \vec{r} sau \vec{u}_r , deoarece direcțiile lor variază) este constant, avem

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{dt} r. \quad (11-12)$$

Dar $d\vec{r}/dt$ este \vec{v} , viteza liniară a particulei. Pentru a evalua pe $d\vec{u}_r/dt$, să considerăm figura 11-10, b care arată versorul \vec{u}_r în două poziții diferite ale lui P , corespunzător unei rotații cu un unghi (mic) $\Delta\theta$. Folosind definiția măsurii unghiulare în radiani, obținem modulul variației (vectoriale) $\Delta\vec{u}_r$ a lui \vec{u}_r sub forma

$$|\Delta\vec{u}_r| = (1)\Delta\theta$$

în care factorul 1 ne amintește că cei doi versori din figura 11-10, b au lungime egală cu 1. Ecuația de mai sus va fi corectă dacă $\Delta\theta$ va fi suficient de mic, astfel încât să putem neglija diferența dintre coardă și arc în triunghiul mic din figura 11-10, b. Variația lui \vec{u}_r este un vector $\Delta\vec{u}_r$ al cărui modul este dat de ecuația de mai sus; direcția și sensul său, presupunând iarăși că $\Delta\theta$ este suficient de mic, sînt date de versorul \vec{u}_θ . Aceasta rezultă din cauză că, dacă $\Delta\vec{u}_r$ din figura 11-10, b este deplasat prin translație în punctul P din figura 11-10, a, vedem că, atunci cînd $\Delta\theta \rightarrow 0$, el este îndreptat în direcția și sensul lui \vec{u}_θ . În modul acesta găsim

$$\Delta\vec{u}_r \cong \vec{u}_\theta \Delta\theta.$$

Împărțind cu Δt și făcînd ca Δt să tindă către zero, avem

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \omega. \quad (11-13)$$

Substituind aceste rezultate în ecuația (11-12) obținem atunci

$$\vec{v} = \vec{u}_\theta \omega r. \quad (11-14, a)$$

Relația scalară care corespunde acestei relații vectoriale este

$$v = \omega r \quad (11-14, b)$$

și este una din relațiile obținute mai înainte care leagă viteza liniară v a unei particule în mișcarea circulară de viteza sa unghiulară ω .

Pentru a afla relația dintre accelerația liniară și cea unghiulară derivăm ecuația (11-14, a) ținînd seama că r este constant în timp ce \vec{u}_θ și ω variază. Avem

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\omega}{dt} r + \omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} r. \quad (11-15)$$

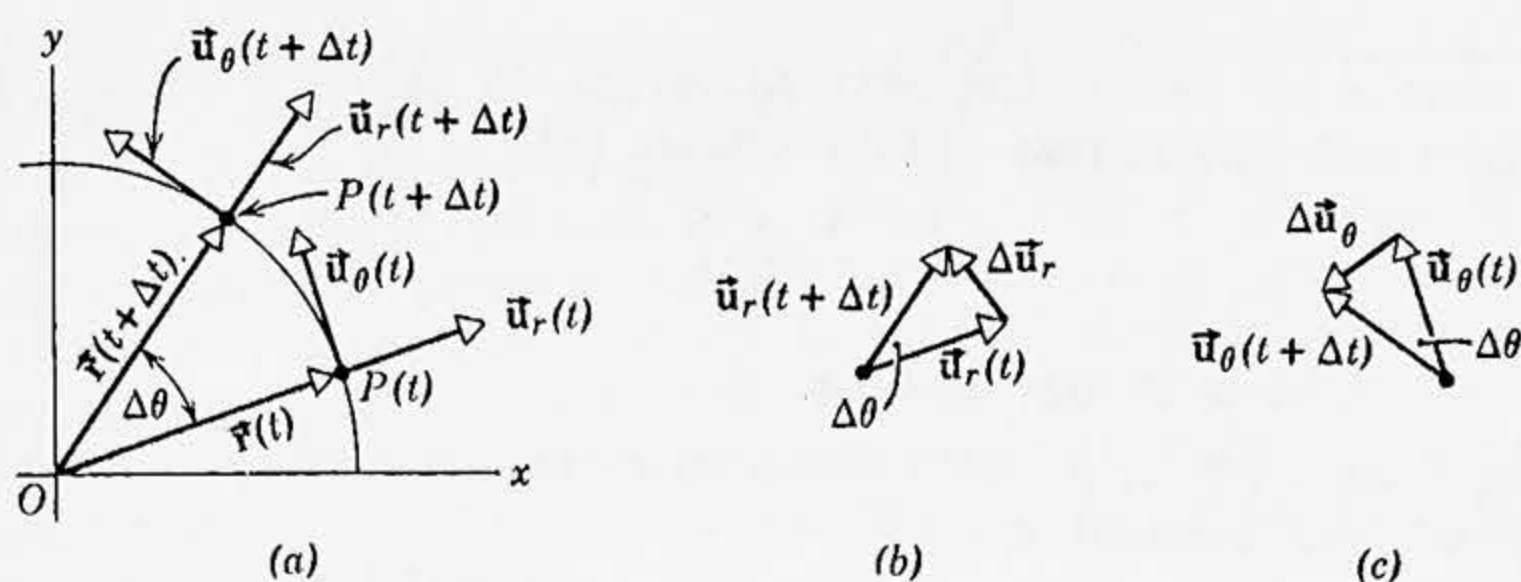


Figura 11-10. (a) Particula P se rotește cu un unghi $\Delta\theta$ în timpul Δt . Versorii în coordonate polare sînt arătați în fiecare punct. (b) Variația lui \vec{u}_r ; observăm că $\Delta\vec{u}_r$ este dirijat în direcția lui \vec{u}_θ cînd $\Delta\theta \rightarrow 0$. (c) Variația lui \vec{u}_θ ; observăm că $\Delta\vec{u}_\theta$ este dirijat în direcția lui $-\vec{u}_r$ cînd $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Dar $d\vec{v}/dt = \vec{a}$, accelerația liniară a particulei și $d\omega/dt = \alpha$, accelerația sa unghiulară. Studentul, ghidîndu-se după deducerea ecuației (11-13), trebuie să deducă din figura 11-10, c, că

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \omega. \quad (11-16)$$

Semnul minus apare din cauză că atunci cînd deplasăm prin translație pe $\Delta\vec{u}$ în figura 11-10, c în punctul P , vedem că, dacă $\Delta\theta > 0$, el este îndreptat radial spre interior, în sensul opus lui \vec{u}_r .

Făcînd aceste substituții în ecuația (11-15) obținem

$$\vec{a} = \vec{u}_\theta \alpha_r - \vec{u}_r \omega^2 r. \quad (11-17)$$

În modul acesta, după cum știm din paragraful 4-5, \vec{a} are o componentă radială (sau centripetă) \vec{a}_R și o componentă tangențială \vec{a}_T . Mărimile lor sînt, din ecuația (11-17),

$$a_T = \alpha r \quad (11-18, a)$$

și (folosind ecuația 11-14, b)

$$a_R = \omega^2 r = v^2/r. \quad (11-18, b)$$

Acesta din urmă este rezultatul familiar dedus în paragraful 4-4. În tema suplimentară I, deducem relațiile dintre variabilele cinematice liniare și cele unghiulare pentru o particulă care se mișcă liber într-un plan dar nu este restrînsă la o mișcare circulară. Ecuațiile (11-14, a) și (11-17) vor fi cazuri particulare ale relațiilor mai generale deduse acolo.

Ecuațiile (11-14, a) și (11-17) sînt relații între variabilele cinematice liniare sub forma vectorială și variabilele cinematice unghiulare sub forma scalară. Am

putea deduce relații în care *fiecare* set de variabile este exprimat sub forma vectorială. Să facem aceasta acum. Aceasta va fi deosebit de util în cazurile în care axa de rotație nu este fixă.

Figura 11-11 arată vectorii \vec{r} , \vec{v} , \vec{a}_T , \vec{a}_R , $\vec{\omega}$ și $\vec{\alpha}$ pentru particula ce se rotește din figura 11-7, b. Mărimile unghiulare sînt așezate pe axa de rotație, îndreptate în sensul dat de regula mîinii drepte de la pagina 39. Declarăm — și vom demonstra — că relațiile pe care le căutăm sînt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (11-19)$$

și

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R, \quad (11-20, a)$$

în care

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad \text{și} \quad \vec{a}_R = -\vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (11-20, b)$$

În paragraful 2-4 (pe care studentul trebuie acum să-l recitească), am definit produsul vectorial a doi vectori. Dacă $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, atunci *modulul* lui \vec{c} este $ab \sin \Phi$ unde Φ este unghiul dintre \vec{a} și \vec{b} . Aplicînd această parte a definiției ecuațiilor (11-19) și (11-20) observăm (vezi fig. 11-11) că $\vec{\omega}$ și \vec{r} , $\vec{\omega}$ și \vec{v} , $\vec{\alpha}$ și \vec{r} sînt perpendiculari între ei; în modul acesta unghiul Φ pentru toate aceste trei perechi de vectori este 90° . În ecuația (11-19) avem pentru moduli

$$v = \omega r \sin 90^\circ = \omega r,$$

care este exact ecuația (11-14, b). În ecuațiile (11-20, b) avem pentru moduli

$$a_R = \omega v = \omega(\omega r) = \omega^2 r$$

și

$$a_T = \alpha r.$$

Aceste relații concordă exact cu ecuațiile (11-18, b și a).

Rămîne să vedem dacă direcția și sensul sînt date corect de ecuațiile (11-19) și (11-20, b). Pentru produsul vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, figura 2-12 arată că direcția și sensul lui \vec{c} se obțin rotind pe \vec{a} către \vec{b} prin unghiul (mai mic) dintre ei cu degetele de la mîna dreaptă; degetul mare ridicat va fi atunci îndreptat în direcția și sensul lui \vec{c} . Studentul poate vedea ușor că în figura 11-11 direcțiile vectorilor \vec{v} , \vec{a}_T și \vec{a}_R sînt în adevăr date corect de ecuațiile (11-19) și (11-20, b).

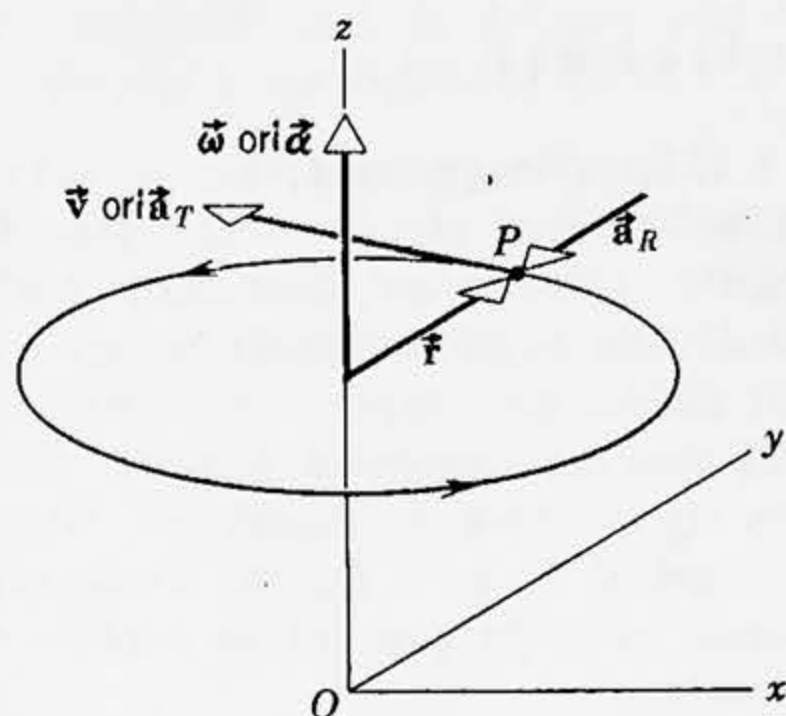


Figura 11-11. Direcțiile vectorilor \vec{r} , \vec{v} , \vec{a}_T , \vec{a}_R , $\vec{\omega}$ și $\vec{\alpha}$ pentru o particulă care se rotește pe un cerc în jurul axei z .

Intrebări

1. În paragraful 11-1 s-a afirmat că în general sînt necesare şase variabile pentru a determina poziţia unui corp rigid în raport cu un anumit sistem de referinţă. Cîte variabile sînt necesare pentru a localiza corpul din figura 11-2 în raport cu reperul $x-y$ arătat în acea figură? Dacă acest număr nu este şase să se explice diferenţa.

2. Un corp de formă neregulată este liber să se rotească în jurul centrului său de masă care este plasat în originea unui sistem de referinţă. Cum veţi specifica orientarea sa?

3. Pot fi exprimate mărimile unghiulare θ , ω şi α cu ajutorul gradeelor în locul radianilor în ecuaţiile cinematice?

4. Să se explice de ce măsura în radiani a unui unghi este la fel de satisfăcătoare pentru toate sistemele de unităţi. Este valabil acelaşi lucru pentru grade?

5. Care este viteza unghiulară a secundarului unui ceasornic? Dar a minutarului? Puteţi exprima convenabil mişcarea acestor ace prin variabilele liniare?

6. Cum aţi putea exprima simplu relaţia dintre vitezele unghiulare ale unei perechi de roţi dinţate care sînt cuplate?

7. O roată se roteşte în jurul unei axe care trece prin centrul său şi este perpendiculară pe planul roţii. Să considerăm un punct de pe obadă. Dacă roata se roteşte cu *viteză unghiulară constantă*, are punctul considerat o acceleraţie radială? O acceleraţie tangenţială? Dacă roata se roteşte cu *acceleraţie unghiulară constantă*, are punctul considerat o acceleraţie radială? O acceleraţie tangenţială? Variaza modulii acestor acceleraţii?

8. Să presupunem că vi se cere să determinaţi distanţa echivalentă parcursă de acul unui patefon pe un disc de 30 cm cu viteza de $33\frac{1}{3}$ rot/min.

De ce informaţie aveţi nevoie? Discutaţi din punctul de vedere al sistemelor de referinţă: (a) fixat de laborator şi (b) fixat de discul în rotaţie.

9. (a) Să se descrie vectorul care ar reprezenta viteza unghiulară a Pământului care se roteşte în jurul axei sale. (b) Să se descrie vectorul care ar reprezenta viteza unghiulară a Pământului care se roteşte în jurul Soarelui.

10. Este convenabil să reprezentăm vectorii de rotaţie așezați de-a lungul axei de rotație. Există vreun motiv pentru care ei nu pot fi reprezentați paralel cu axa dar în altă direcție? Să ne reamintim că putem plimba vectorul deplasare de-a lungul dreptei sale suport sau îl putem deplasa prin translație în altă parte fără a-i schimba valoarea.

11. Într-o centrifugă particulele tind să se separe din fluidul în care se află în suspensie dacă densitatea lor (masa/volum) diferă de densitatea fluidului. Să se discute principiile dinamice de care depinde funcționarea unei centrifuge. Să se considere situația atât dintr-un sistem de referință inerțial (laborator) cît și dintr-unul neinertial (în rotație).

12¹. Un trăgător stă în centrul călușeilor și trage asupra unei ținte fixate pe un stîlp de la periferia lor. În ce fel trebuie să țină seama (dacă este nevoie) trăgătorul de viteza unghiulară (constantă) a călușeilor dacă vrea să nimerască ținta? Dar dacă pozițiile trăgătorului și țintei sînt inversate?

¹ Vezi tema suplimentară I.

13¹. Un om aflat pe călușei în rotație cu viteza unghiulară constantă lasă să cadă o bucată de gheață pe care a ținut-o fixă față de călușei la o distanță radială r_0 de la centru. Să se descrie mișcarea gheții în sistemul de referință al: (a) unui observator terestru și (b) omului de pe călușei. Se

vor neglija forțele de frecare dar se vor descrie toate celelalte forțe.

14¹. Un om aflat pe călușei în rotație lovește o bucată de gheață de-a lungul unei linii radiale spre periferie. Care va fi mișcarea ei văzută de un observator: (a) de pe călușei și (b) de pe sol? Se presupune că forțele de frecare pot fi neglijate.

Probleme

1. Un disc de patefon se rotește cu 33 rot/min. Care este viteza liniară a unui punct de pe disc în dreptul acului la: (a) începutul și (b) sfârșitul înregistrării? Distanțele acului până la axa discului sînt 14,9 și respectiv 7,3 cm, în cele două poziții.

2. O zi solară este intervalul de timp dintre două apariții succesive ale Soarelui la zenit, la o longitudine dată, adică timpul unei rotații complete a Pămîntului față de Soare. O zi siderală este timpul unei rotații complete a Pămîntului față de stelele fixe, adică intervalul de timp între două observații succesive la zenit a unei direcții fixe pe cer numită echinocțiul vernal. (a) Să se arate că într-un an există exact cu o zi solară (medie) mai puțin decît numărul zile-

lor siderale (medii) dintr-un an. (b) Dacă ziua solară (medie) este exact 24 h, cît de lungă este o zi siderală (medie)?

3. O metodă de măsurare a vitezei luminii folosește o roată dințată în rotație. Un fascicul de lumină trece printr-un interstițiu de la marginea exterioară a roții, ca în figura 11-12, se propagă pînă la o oglindă depărtată și se întoarce înapoi la roată exact la timp pentru a trece prin interstițiul următor dintre dinții roții. O astfel de roată dințată are o rază de 5,0 cm și 500 dinți la periferie. Măsurătorile efectuate cu oglinda aflată la 500 m de roată dau o viteză a luminii de $3,0 \cdot 10^8$ km/s. (a) Care a fost viteza unghiulară (constantă) a roții? (b) Care era viteza liniară a unui punct de pe marginea roții?

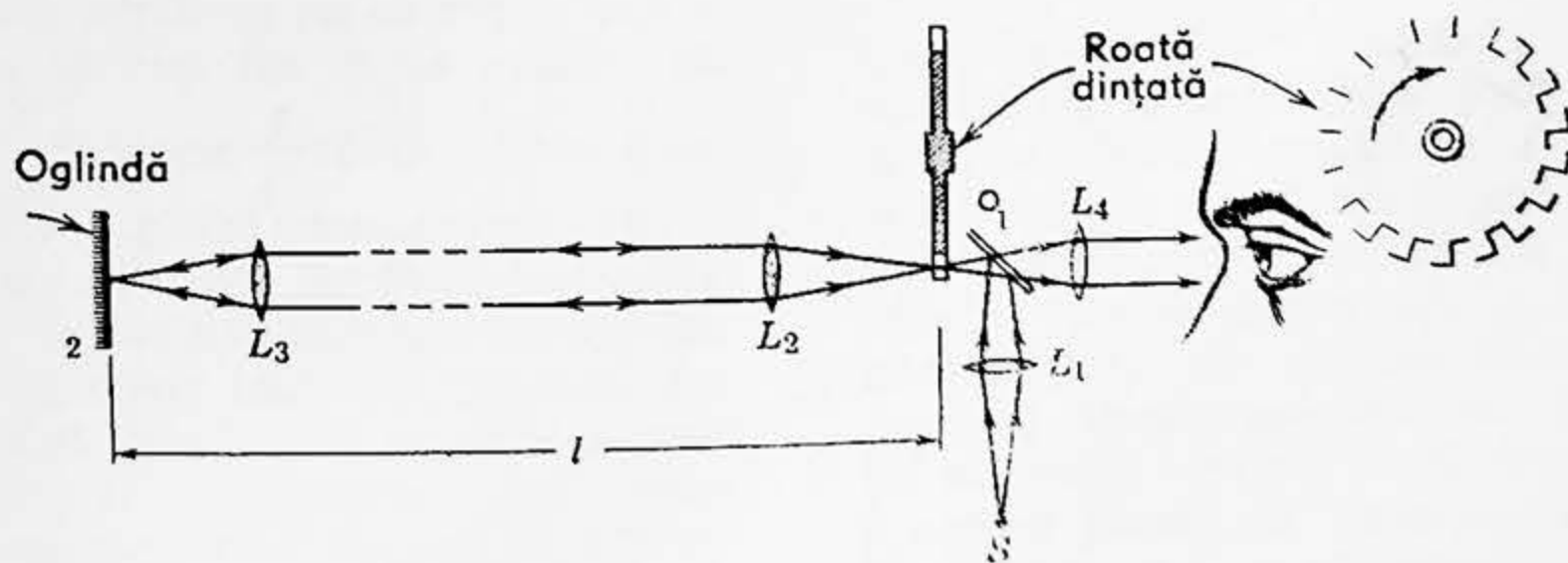


Figura 11-12.

¹ Vezi tema suplimentară I.

4. Viteza unghiulară a unui motor de automobil a crescut de la 1200 rot/min până la 3000 rot/min în 12 s. (a) Care este accelerația sa unghiulară, presupunând-o uniformă? (b) Câte rotații face motorul în acest timp?

5. Discul unui patefon, rotindu-se cu 78 rot/min, încetinește și se oprește în 30 secunde după ce motorul este deconectat. (a) Să se afle accelerația sa unghiulară (uniformă). (b) Câte rotații a făcut discul în acest timp?

6. O roată are o accelerație unghiulară constantă de $3,0 \text{ rad/s}^2$. Într-un interval de 4,0 s ea se rotește cu un unghi de 120 rad. Presupunând că roata a pornit din repaus, cât timp s-a aflat ea în mișcare până la începutul acestui interval de 4,0 s?

7. Un volant greu care se rotește în jurul axei sale încetinește mișcarea datorită frecărilor din lagărele sale. La sfârșitul primului minut viteza sa unghiulară constituie 0,90 din viteza sa unghiulară inițială ω_0 . Presupunând că forțele de frecare sînt constante, să se afle viteza sa unghiulară la sfârșitul minutului al doilea.

8. Unghiul descris de volantul unui generator într-un interval de timp t este dat de

$$\theta = at + bt^3 - ct^4,$$

unde a , b și c sînt constante. Care este expresia accelerației sale unghiulare?

9. Un corp se mișcă în planul $x-y$ astfel încît $x = R \cos \omega t$ și $y = R \sin \omega t$. Aici x și y sînt coordonatele corpului, t este timpul, iar R și ω sînt constante. (a) Să se elimine t între aceste ecuații pentru a afla ecuația curbei pe care se mișcă corpul. Ce este această curbă? Care este semnificația constantei ω ? (b) Să se deriveze expresiile lui x și y în raport cu timpul pentru a afla componentele x și y ale vitezei corpului, v_x și v_y . Să se compună v_x și v_y pentru a afla modulul și direcția lui v . Să se descrie mișcarea corpu-

lui. (c) Să se deriveze v_x și v_y în raport cu timpul pentru a obține modulul și direcția accelerației rezultante.

10. O roată se rotește cu o accelerație unghiulară dată de

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

unde t este timpul, iar a și b sînt constante. Dacă roata are o viteză unghiulară inițială ω_0 , să se scrie ecuațiile pentru (a) viteza unghiulară și (b) unghiul descris în funcție de timp.

11. Orbita Pămîntului în jurul Soarelui, deși în realitate eliptică, este aproape un cerc. (a) Să se calculeze viteza unghiulară a Pămîntului (privit ca o particulă) în jurul Soarelui și viteza sa liniară medie pe orbita sa. (b) Care este accelerația centripetă a Pămîntului față de Soare?

12. (a) Care este viteza unghiulară în jurul axei polare a unui punct de pe suprafața Pămîntului aflat la latitudinea de 45° N ? Care este viteza liniară? (b) Cum sînt aceste valori în comparație cu valorile analoge pentru un punct de pe Ecuator?

13. Care este raportul dintre accelerația centripetă, datorită rotației Pămîntului, a unui punct de pe Ecuator, și accelerația centripetă a Pămîntului însuși datorită mișcării sale în jurul Soarelui? Orbita se presupune circulară.

14. Care este accelerația centripetă a unui punct de pe periferia unui disc de patefon de 30 cm care se rotește cu o turație de $33\frac{1}{3}$ rot/min?

15. Un automobil se mișcă 96,6 km/h, avînd roți de 76 cm diametru. (a) Care este viteza unghiulară a roților în jurul osiei lor? (b) Dacă roțile sînt frîmate uniform în timpul a 30 de rotații, care este accelerația unghiulară? (c) Cu cît se deplasează automobilul în timpul acestei perioade de frînare?

16. Dacă elicea unui aeroplan de rază 1,5 m se rotește cu 2000 rot/min și aeroplanul zboară cu o viteză de

500 km/h față de sol, care este viteza unui punct de pe extremitatea elicei, văzută de: (a) pilot și (b) un observator de pe sol?

17. Care este viteza unghiulară a unui vehicul care descrie o buclă circulară de rază 110 m cu 48 km/h?

18. Un corp rigid pornind din repaus, se rotește în jurul unei axe fixe cu o accelerație unghiulară constantă α . Să considerăm o particulă la o distanță r de axă. (a) Să se exprime accelerația radială și accelerația tangențială a acestei particule a corpului prin α , r și timpul t . (b) Dacă accelerația rezultantă a particulei la un moment dat formează un unghi de 60° cu accelerația tangențială, cu ce unghi total s-a rotit corpul până în acel moment?

19. Să se deducă ecuația (11-20) prin derivarea ecuației (11-19).

20¹. O insectă de masă $8,0 \cdot 10^{-2}$ g se mișcă cu o viteză constantă de 1,6 cm/s de-a lungul unei linii radiale marcate pe un disc de patefon care se

rotește cu o viteză unghiulară constantă de $33\frac{1}{3}$ rot/min. (a) Să se afle viteza și accelerația insectei văzută de observatorul din laborator atunci când insecta se află la 12 cm de axa de rotație. (b) Care trebuie să fie coeficientul de frecare minim care să permită insectei să parcurgă toată distanța până la marginea discului (rază=16 cm) fără să alunece? (c) Cum se schimbă rezultatele de la punctele (a) și (b) dacă discul capătă o accelerație unghiulară care mărește viteza sa unghiulară?

21¹. Un virus aflat în soluție într-o centrifugă se găsește la un moment dat la o distanță de 6,5 cm de axa de rotație și se mișcă radial spre exterior cu o viteză relativă constantă. Centrifuga se rotește cu 55 000 rot/min. Să se discute mișcarea cantitativ, dând valori tuturor forțelor și accelerațiilor, văzute dintr-un sistem de referință: (a) care se rotește împreună cu centrifuga și (b) este fix față de laborator.

¹ Vezi tema suplimentară I.

Dinamica mișcării de rotație I

12-1. Introducere

În capitolul 11 am studiat cinematica mișcării de rotație. În acest capitol, urmărind modelul studiului mișcării de translație, vom studia cauzele rotației, un subiect numit *dinamica rotației*. Sistemele în rotație sînt formate din particule și am învățat deja cum trebuie aplicate legile mecanicii clasice la mișcarea particulelor. Din acest motiv dinamica rotației nu va conține trăsături fundamentale noi. Tot astfel, cinematica rotației nu conținea trăsături fundamentale noi, parametrii de rotație θ , ω și α fiind legați de parametrii corespunzători ai translației x , v și a pentru particulele care formează sistemul în rotație. Ca și în capitolul 11 însă, este foarte util să reformulăm conceptele mișcării de translație într-o formă nouă, special aleasă pentru conveniența sa în descrierea sistemelor ce se rotesc.

Am restrîns studiile noastre de cinematică din capitolul 11 la un singur, dar important caz, rotația unui rigid în jurul unei axe care este fixă în sistemul de referință în care facem măsurătorile noastre. În studiul dinamicii rotației plecăm de la un punct de vedere mai fundamental, cel al unei particule văzute dintr-un sistem de referință inerțial. Mai tîrziu vom generaliza la sisteme de mai multe particule, incluzînd cazul particular al unui rigid care se rotește în jurul unei axe fixe. În capitolul 13 vom discuta rotația corpurilor rigide în jurul axelor care *nu* sînt fixe într-un reper inerțial.

12-2. Momentul unei forțe care acționează asupra unei particule

În mișcarea de translație am asociat o forță cu accelerația liniară a unui corp. În mișcarea de rotație, ce mărime trebuie asociată cu accelerația unghiulară a unui corp? Aceasta nu poate fi pur și simplu forța,

deoarece experiența cu o ușă grea ce se rotește ne învață că o forță dată (vector) poate produce diferite accelerații unghiulare ale ușii depinzând de locul unde este aplicată forța și de direcția în care este ea aplicată; o forță aplicată pe linia balamalelor nu poate produce nici o accelerație unghiulară în timp ce o forță de modul dat aplicată sub unghi drept față de ușă pe marginea sa exterioară produce o accelerație maximă.

Vom numi analogul rotațional al forței *momentul forței* și îl vom defini acum în cazul special al unei singure particule observată dintr-un sistem de referință inerțial. Mai târziu vom extinde noțiunea de moment la sisteme de particule (inclusiv corpuri rigide) și vom arăta că momentul forței este intim legat de accelerația unghiulară.

Dacă o forță \vec{F} acționează asupra unei particule într-un punct P a cărui poziție față de originea O a reperului inerțial este dată de vectorul de poziție \vec{r} (fig. 12-1), *momentul* \vec{M} acționând asupra particulei în raport cu originea O este definit prin

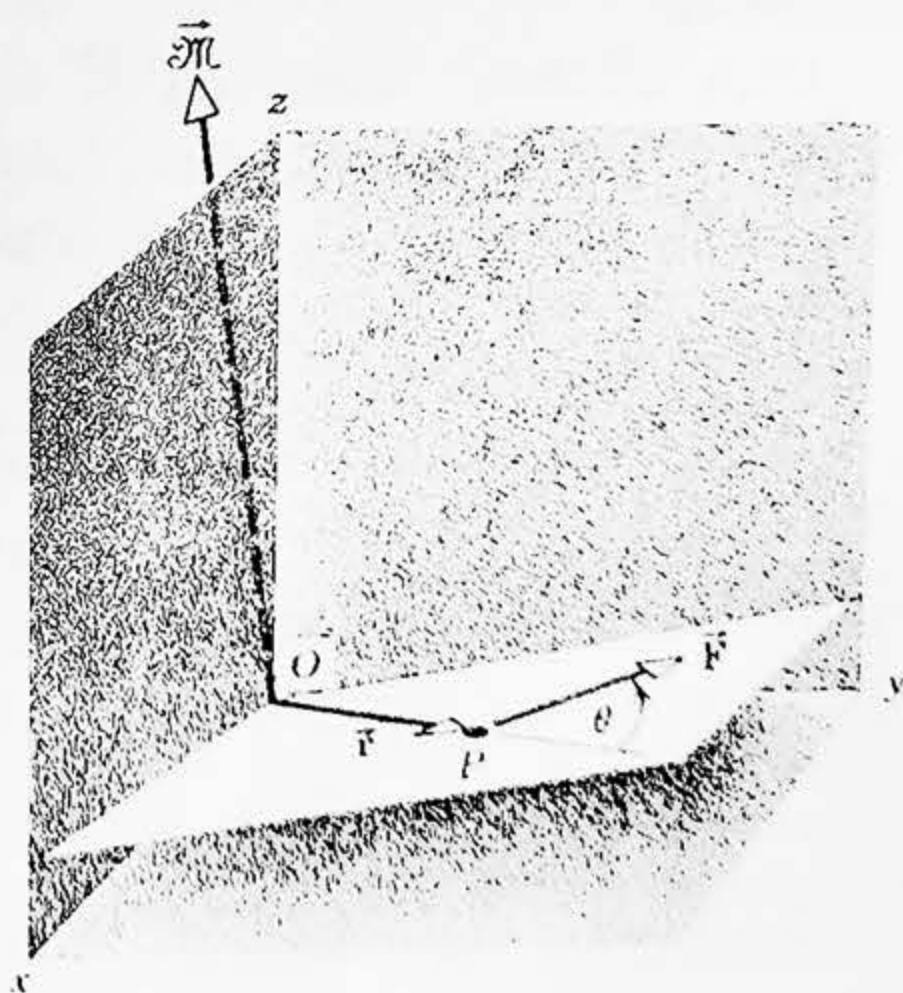
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (12-1)$$

Momentul forței este o mărime vectorială. Modulul său este dat de

$$M = rF \sin \theta, \quad (12-2, a)$$

unde θ este unghiul dintre \vec{r} și \vec{F} ; direcția sa este perpendiculară pe planul format de \vec{r} și \vec{F} . Sensul este dat de regula mâinii drepte pentru produsul vectorial a doi vectori și anume rotim pe \vec{r} spre \vec{F} prin unghiul mai mic dintre ei, cu degetele îndoit ale mâinii drepte; direcția și sensul degetului mare ridicat ne dă atunci direcție și sensul lui \vec{M} .

Figura 12-1. O forță \vec{F} este aplicată unei particule P care are vectorul de poziție \vec{r} față de origine. Vectorul forță face un unghi θ cu vectorul de poziție \vec{r} . Este arătat momentul \vec{M} în jurul lui O . Direcția lui este perpendiculară pe planul format de \vec{r} și \vec{F} cu sensul dat de regula burghiului (sau a mâinii drepte).



Momentul are aceleași dimensiuni ca forța înmulțită cu distanța sau exprimate prin dimensiunile noastre fundamentale M, L, T , el are dimensiunile ML^2T^{-2} . Aceste dimensiuni sînt aceleași ca ale lucrului mecanic. Cu toate acestea, momentul și lucrul mecanic sînt mărimi fizice foarte diferite. De exemplu momentul este un vector în timp ce lucrul mecanic este un scalar. Unitatea de măsură pentru momentul forței poate fi $N \cdot m$ sau $kgf \cdot m$ printre alte posibilități.

Observăm (ecuația 12-1) că momentul produs de o forță depinde nu numai de modulul și de direcția forței, ci și de punctul de aplicație al forței față de origine, adică de vectorul \vec{r} . În particular, dacă particula P se află în origine, astfel încît linia de acțiune a lui \vec{F} trece prin origine, \vec{r} este zero și momentul \vec{M} față de origine este zero.

Putem scrie de asemenea modulul lui \vec{M} (ecuația 12-2, a) fie astfel

$$M = (r \sin \theta)F = Fr_{\perp} \quad (12-2, b)$$

fie astfel

$$M = r(F \sin \theta) = rF_{\perp} \quad (12-2, c)$$

în care, după cum arată figura 12-2, a, $r_{\perp} (=r \sin \theta)$ este componenta lui \vec{r} sub unghi drept față de linia de acțiune a lui \vec{F} , și $F_{\perp} (=F \sin \theta)$ este componenta lui \vec{F} sub unghi drept față de \vec{r} . Momentul forței se poate numi pe scurt *moment*, iar r_{\perp} din ecuația (12-2, b) se numește *brațul forței* (sau al momentului). Ecuația (12-2, c) ne arată că numai componenta lui \vec{F} perpendiculară pe \vec{r} contribuie la moment. În particular, cînd θ este egal cu zero sau 180° , nu avem nici o componentă perpendiculară ($F_{\perp} = F \sin \theta = 0$); atunci linia de acțiune a forței trece prin origine și brațul forței r_{\perp} față de origine este de asemenea zero. În acest caz atît ecuația (12-2, b) cît și ecuația (12-2, c) arată că momentul \vec{M} este nul.

Dacă inversăm sensul lui \vec{F} , ca în figura 12-2, b, modulul lui \vec{M} rămîne neschimbat însă sensul lui \vec{M} se schimbă. În mod analog, dacă schimbăm sensul lui \vec{r} , ca în figura 12-2, c, schimbînd prin aceasta punctul de aplicație a lui \vec{F} , modulul lui \vec{M} rămîne neschimbat însă sensul lui \vec{M} este iarăși schimbat.

Dacă schimbăm atît sensul lui \vec{r} cît și a lui \vec{F} , ca în figura 12-2, d, atunci atît modulul cît și sensul lui \vec{M} rămîn neschimbate. Aceste rezultate decurg în mod formal din faptul că: (1) $\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta)$, astfel încît ecuația (12-2, a) pentru modulul lui \vec{M} nu este afectată; (2) inversînd sensul unui vector dintr-un produs vectorial (fie \vec{r} sau \vec{F}) se inversează sensul produsului; și (3) inversînd direcțiile ambilor vectori dintr-un produs vectorial (atît \vec{r} cît și \vec{F}) sensul produsului rămîne neschimbat. Studentul trebuie să verifice sensurile lui \vec{M} arătate în figura 12-2, folosind regula mîinii drepte.

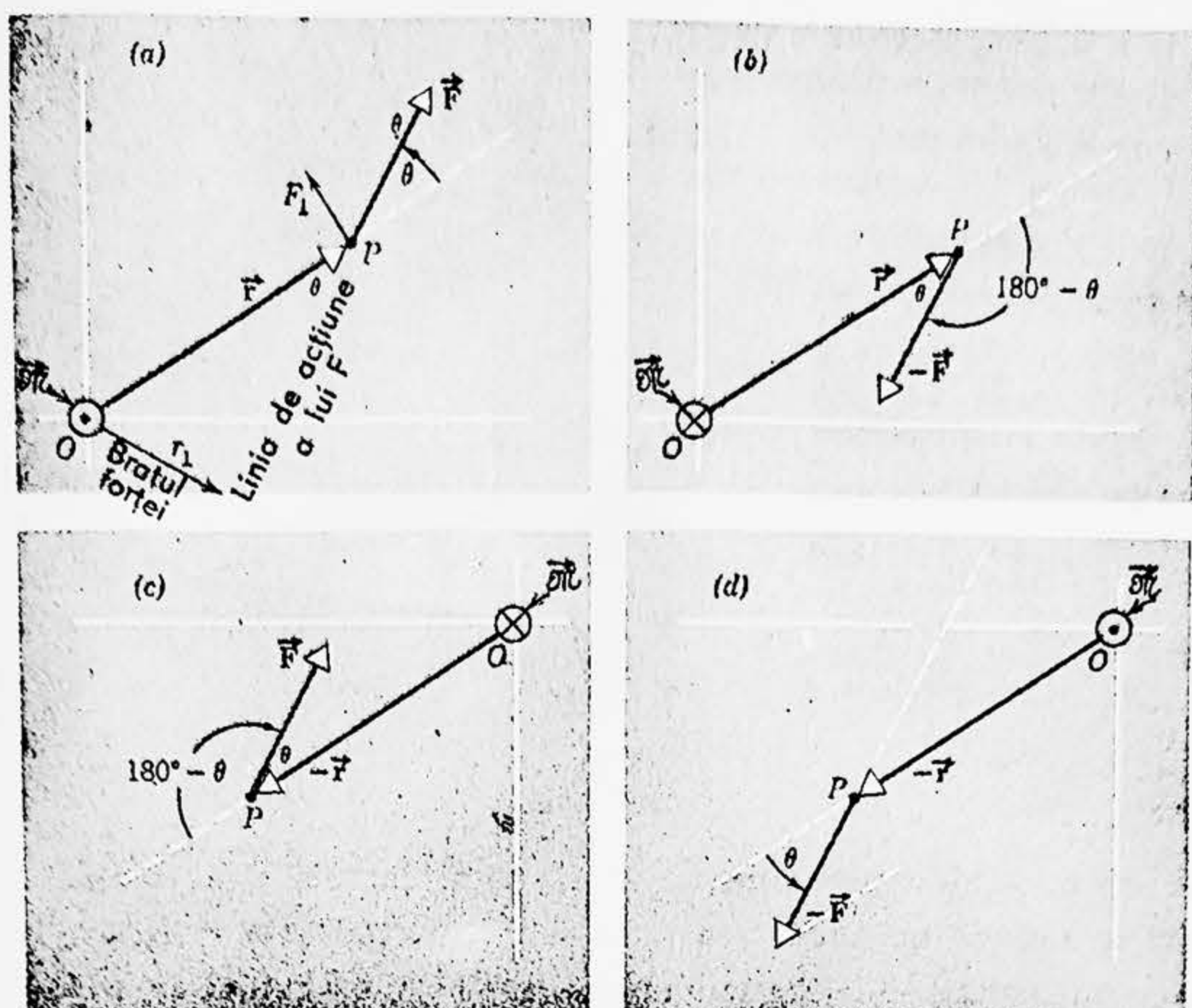
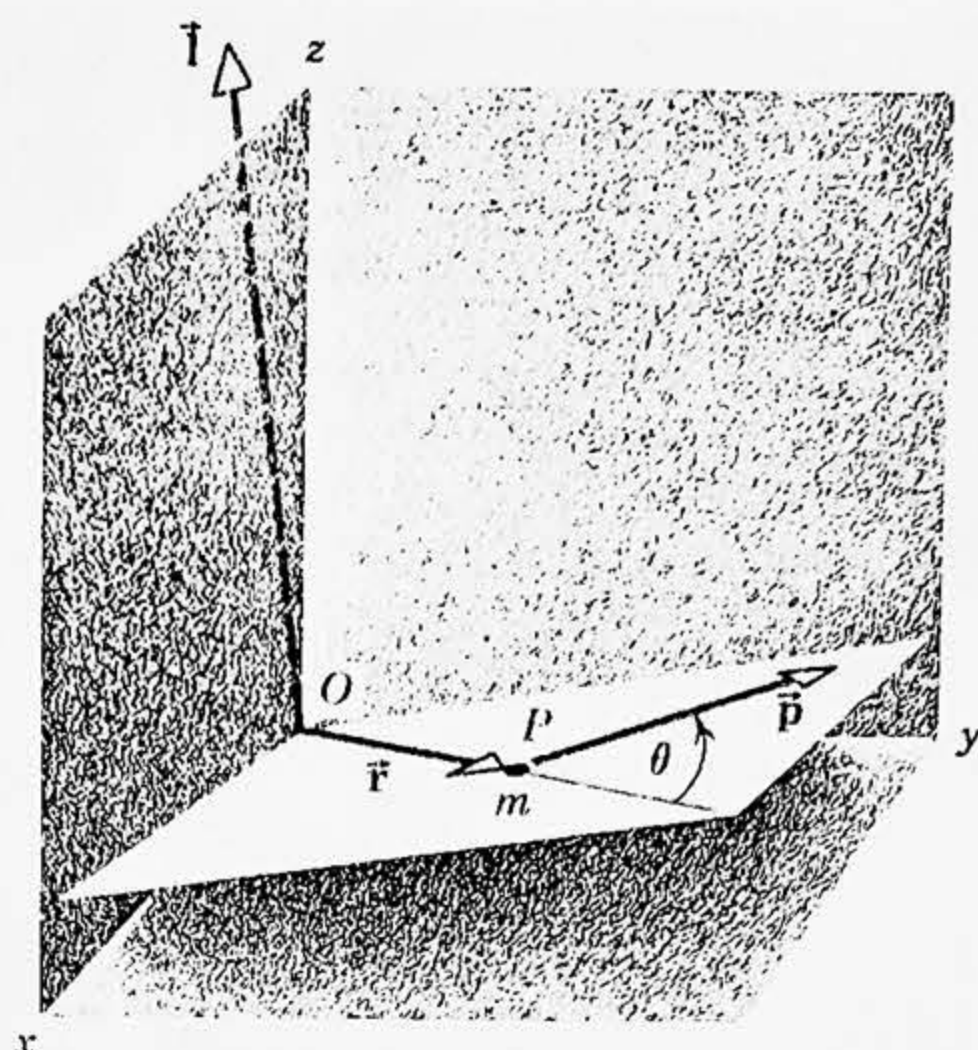


Figura 12-2. Planul arătat este cel definit de \vec{r} și \vec{F} din figura 12-1. (a) Mărimea lui $\vec{\tau}$ este dată de Fr_{\perp} (ecuația 12-2, b), sau de rF_{\perp} (ecuația 12-2, c). (b) Inversînd pe \vec{F} , se inversează sensul lui $\vec{\tau}$. (c) Inversînd pe \vec{r} , se inversează sensul lui $\vec{\tau}$. (d) Inversînd pe \vec{F} și \vec{r} , sensul lui $\vec{\tau}$ rămîne neschimbat. Sensurile lui $\vec{\tau}$ sînt reprezentate prin \odot (perpendicular pe figură spre cititor, simbolul reprezentînd vîrfurile unei săgeți) și cu \ominus (perpendicular pe figură spre carte, simbolul reprezentînd coada unei săgeți).

12-3. Momentul cinetic al unei particule

Am găsit că *impulsul* este util în studiul mișcării de translație a particulelor individuale sau a sistemelor de particule (inclusiv corpurile rigide). De exemplu, impulsul se conservă în ciocniri. Pentru o particulă individuală, impulsul este $\vec{p} = m\vec{v}$ (ecuația 9-11); pentru un sistem de particule el este $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$ (ecuația 9-15) în care M este masa întregului sistem iar \vec{v}_{cm} este viteza centrului de masă. Care este analogul impulsului în mișcarea de rotație? Îl numim *moment cinetic* și îl definim mai jos în cazul particular al unei particule individuale. Mai târziu vom lărgi definiția pentru a include sistemele de particule și vom arăta că momentul cinetic, așa cum îl vom defini, este un concept tot atît de util în mișcarea de rotație precum este impulsul în mișcarea de translație.

Figura 12-3. O particulă de masă m se află într-un punct P dat de vectorul de poziție \vec{r} față de origine, și are impulsul \vec{p} . Vectorul \vec{p} face un unghi θ cu vectorul de poziție \vec{r} . Este arătat momentul cinetic \vec{l} al particulei în raport cu originea O . Direcția sa este perpendiculară pe planul format de \vec{r} și \vec{p} cu sensul dat de regula burghiului.



Să considerăm o particulă de masă m și impuls \vec{p} al cărei vector de poziție față de originea O a unui reper inerțial este \vec{r} (figura 12-3). Definim momentul cinetic (sau unghiular) \vec{l} al particulei în raport cu originea O prin

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (12-3)$$

Momentul cinetic este un vector. Modulul său este dat de

$$l = rp \sin \theta, \quad (12-4, a)$$

unde θ este unghiul dintre \vec{r} și \vec{p} ; direcția sa este perpendiculară pe planul format de \vec{r} și \vec{p} . Sensul este dat de regula mîinii drepte și anume rotim pe \vec{r} către \vec{p} prin unghiul mai mic dintre ei cu degetele îndoite ale mîinii drepte; degetul mare ridicat indică atunci direcția și sensul lui \vec{l} .

Putem de asemenea scrie modulul lui \vec{l} fie astfel

$$l = (r \sin \theta)p = pr_{\perp} \quad (12-4, b)$$

fie astfel

$$l = r(p \sin \theta) = rp_{\perp} \quad (12-4, c)$$

în care $r_{\perp} (=r \sin \theta)$ este componenta lui \vec{r} sub unghi drept față de linia de acțiune a lui \vec{p} și $p_{\perp} (=p \sin \theta)$ este componenta lui \vec{p} sub unghi drept față de \vec{r} . Momentul cinetic se numește adesea *momentul impulsului*, iar r_{\perp} din ecuația (12-4, b) se numește adesea *brațul impul-*

sului. Ecuația (12-4, c) arată că numai componenta lui \vec{p} perpendiculară pe \vec{r} contribuie la momentul cinetic. Dacă unghiul θ dintre \vec{r} și \vec{p} este zero sau 180° , nu există componentă perpendiculară ($p_\perp = p \sin \theta = 0$); atunci linia de acțiune (dreapta suport) a lui \vec{p} trece prin origine și r_\perp este de asemenea zero. În acest caz, atât ecuația (12-4, b) cât și ecuația (12-4, c) arată că momentul cinetic l este nul.

Vom deduce acum o relație importantă între momentul forței și momentul cinetic. Am văzut că $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$ pentru o particulă. Să înmulțim vectorial cu \vec{r} ambii membri ai acestei ecuații. Obținem

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dar $\vec{r} \times \vec{F}$ este momentul forței în raport cu O. Putem atunci scrie

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (12-5)$$

Acum să derivăm ecuația (12-3):

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}).$$

Dar derivata unui produs vectorial se calculează în același mod ca derivata unui produs obișnuit, cu excepția faptului că nu trebuie să schimbăm ordinea termenilor. Avem

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dar $d\vec{r}/dt$ este vectorul deplasare al particulei în timpul dt , astfel încât $d\vec{r}/dt$ este viteza instantanee \vec{v} a particulei. Mai departe, p este egal cu $m\vec{v}$, astfel încât ecuația poate fi transcrisă astfel:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{v} \times m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt},$$

Dar $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, deoarece produsul vectorial a doi vectori paraleli este nul. Prin urmare

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (12-6)$$

Examinarea ecuațiilor (12-5) și (12-6) arată că

$$\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt, \quad (12-7)$$

care afirmă că viteza de variație în timp a momentului cinetic al unei particule este egală cu momentul forței care acționează asupra sa. Acest

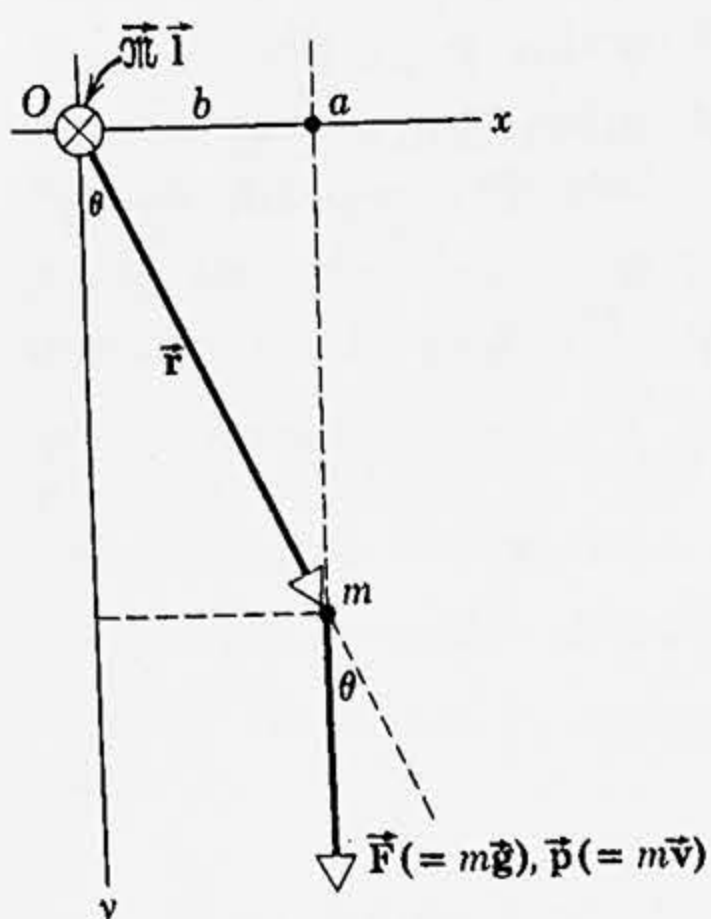


Figura 12-4. O particulă de masă m cade vertical dintr-un punct a . Momentul forței și momentul cinetic față de O sînt dirijate perpendicular spre figură, așa cum este arătat prin simbolul \otimes din O .

momentul cinetic al lui m în fiecare moment t în raport cu aceeași origine. (c) Să se arate că relația $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (ecuația 12-7) aplicată acestei probleme cunoscute dă un rezultat corect.

(a) Momentul este dat de ecuația (12-1) sau $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, modulul său fiind dat de

$$M = rF \sin \theta.$$

În acest exemplu $r \sin \theta = b$ și $F = mg$ astfel încît

$$M = mgb = \text{const.}$$

Observăm că momentul este pur și simplu produsul forței (mg) cu brațul momentului (b). Regula mîinii drepte arată că \vec{M} este dirijat perpendicular spre figură.

(b) Momentul cinetic este dat de ecuația (12-3) sau $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, modulul său fiind dat de

$$L = rp \sin \theta.$$

În acest exemplu $r \sin \theta = b$ și $p = mv = m(gt)$ astfel încît

$$L = mgbt.$$

Regula mîinii drepte arată că \vec{L} este dirijat perpendicular spre figură, ceea ce înseamnă că \vec{L} și \vec{M} sînt vectori paraleli. Vectorul \vec{L} variază în timp numai ca modul, direcția să rămînînd mereu aceeași în acest caz.

rezultat constituie analogul rațional al ecuației (9-12) care afirma că viteza de variație în timp a impulsului unei particule este egală cu forța care acționează asupra ei, adică $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

Ecuația (12-7), ca orice ecuație vectorială, este echivalentă cu trei ecuații scalare, și anume:

$$\mathcal{M}_x = (dL/dt)_x, \mathcal{M}_y = (dL/dt)_y, \mathcal{M}_z = (dL/dt)_z. \quad (12-8)$$

Prin urmare, componenta x a momentului aplicat este dată de componenta x a variației în timp a momentului cinetic. Rezultate asemănătoare sînt valabile pentru direcțiile y și z .

Exemplul 1. O particulă de masă m , aflată în repaus în punctul a , este lăsată să cadă paralel cu axa y (verticală) (fig. 12-4). (a) Să se afle momentul forței care acționează asupra lui m în fiecare moment t , în raport cu originea O . (b) Să se afle mo-

(c) Deoarece \vec{dl} , variația lui \vec{l} , și $\vec{\mathcal{M}}$ sînt paraleli, putem înlocui relația vectorială $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt$ prin ecuația scalară

$$\mathcal{M} = dl/dt.$$

Folosind expresiile lui \mathcal{M} și l de la punctele (a) și (b), de mai sus, avem

$$mgb = \frac{d}{dt} (mgbt) - mgb,$$

care este o identitate. Astfel, relația $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt$ dă rezultate corecte în acest caz simplu. În adevăr, dacă simplificăm cu constanta b cei doi termeni de mai sus și dacă substituim pentru gt mărimea echivalentă v , avem:

$$mg = \frac{d}{dt} (mv).$$

Deoarece $mg = F$ și $mv = p$, acesta este rezultatul cunoscut $F = dp/dt$. În modul acesta, după cum am menționat mai sus, relațiile precum $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt$, deși folosite adesea, nu reprezintă postulate noi fundamentale ale mecanicii clasice, ci constituie o reformulare a legilor lui Newton pentru mișcarea de rotație.

Observăm că valorile lui \mathcal{M} și l depind de alegerea originii, adică de b . În particular, dacă $b=0$, atunci $\mathcal{M}=0$ și $l=0$.

12-4. Sisteme de particule

Pînă acum am vorbit numai despre particule individuale. Să considerăm acum un sistem de mai multe particule. Pentru a calcula momentul cinetic total \vec{L} al unui sistem de particule în raport cu un punct dat, trebuie să adunăm vectorial momentele cinetice ale tuturor particulelor individuale ale sistemului, în raport cu același punct. Pentru un sistem conținînd n particule avem

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{l}_i$$

în care suma (vectorială) este extinsă asupra tuturor particulelor din sistem.

Momentul cinetic total \vec{L} al sistemului în raport cu un punct fix de referință (pe care îl alegem, ca în definiția de bază a lui \vec{l} din ecuația 12-3, în originea unui reper inerțial) poate varia în timp. Această variație, $d\vec{L}/dt$, poate proveni din două surse: (1) momentele exercitate asupra particulelor din sistem de către forțele interne dintre particule și (2) momentele exercitate asupra particulelor din sistem de către forțele externe.

Dacă legea a treia a lui Newton este valabilă în forma sa numită tare, adică dacă forțele dintre oricare două particule sînt nu numai egale în modul și opuse ca sens, ci sînt totodată dirijate de-a lungul liniei

care unește cele două particule, atunci momentul total intern este nul deoarece momentul care rezultă din fiecare pereche acțiune-reacțiune internă, este nul.

Prin urmare, prima sursă nu contribuie cu nimic. Pentru punctul nostru de referință, rămîne deci numai a doua sursă, și putem scrie

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext} = d\vec{L}/dt, \quad (12-9)$$

unde $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$ reprezintă suma tuturor, momentelor externe care acționează asupra sistemului. În cuvinte: viteza de variație în timp a momentului cinetic total al unui sistem de particule în raport cu originea unui reper inerțial este egală cu suma momentelor externe care acționează asupra sistemului. Mai târziu, pentru conveniență, în situațiile în care nu este pericol de confuzie, vom omite indicele lui $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$.

Ecuția (12-9) constituie generalizarea ecuației (12-7) la cazul mai multor particule. Cînd avem numai o singură particulă, nu există forțe interne sau momente interne. Această relație (ec. 12-9) este valabilă indiferent dacă particulele care compun sistemul se mișcă relativ una față de alta sau dacă ele au distanțe reciproce fixe, ca într-un corp rigid.

Ecuția (12-9) reprezintă analogul rotațional al ecuației (9-17)

$$\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt \quad (9-17)$$

care ne spune că pentru un sistem de particule (corp rigid sau nu) forța externă rezultantă care acționează asupra sistemului este egală cu viteza de variație în timp a impulsului sistemului.

Așa cum am dedus-o, ecuația (12-9) este valabilă dacă $\vec{\mathcal{M}}$ și \vec{L} sînt măsurați în raport cu originea unui sistem de referință inerțial. Ne putem întreba dacă ea mai rămîne valabilă cînd măsurăm acești doi vectori în raport cu un punct arbitrar (o anumită particulă, de exemplu) din sistemul mobil. În general un astfel de punct se mișcă într-un mod complicat în timpul mișcării, atunci cînd corpul sau sistemul de particule se deplasează, se rotește și își schimbă configurația, și ecuația (12-9) nu se va aplica unui astfel de punct de referință. Cu toate acestea, dacă punctul de referință este ales în centrul de masă al sistemului, deși acest punct nu este fix în reperul nostru, ecuația (12-9) rămîne valabilă¹. Această este o altă proprietate remarcabilă a centrului de masă. În modul acesta, putem separa mișcarea generală a unui sistem de particule în mișcarea de translație a centrului său de masă (ecuația 9-17) și mișcarea de rotație în jurul centrului său de masă (ecuația 12-9).

12-5. Energia cinetică de rotație și momentul de inerție

Ne vom restrînge acum atenția la un caz particular important de sisteme de particule și anume la un corp rigid. Într-un corp rigid particulele din sistem păstrează permanent aceleași poziții unele față de altele.

¹ Vezi problema 8 din acest capitol și Robert A. Becker, *Introducere în mecanica teoretică*, McGraw-Hill Book Co., 1954, paragraful 8-4.

În studiul rotației unui rigid vom considera întâi cazul particular, frecvent întâlnit, în care axa de rotație este fixă¹ într-un reper inerțial. Vom studia mai târziu sisteme și mișcări mai generale.

Să ne imaginăm acum un corp rigid care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe care este fixă într-un anumit reper inerțial ca în figura 11-1. Fiecare particulă dintr-un astfel de corp în rotație are o anumită energie cinetică. O particulă de masă m aflată la o distanță r de axa de rotație se mișcă pe un cerc de rază r cu o viteză unghiulară ω în jurul acestei axe și are o viteză liniară $v = \omega r$. Energia sa cinetică este deci $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. Energia cinetică totală a corpului este egală cu suma energiilor cinetice ale particulelor sale.

Dacă corpul este rigid, așa cum presupunem în acest paragraf, ω este același pentru toate particulele. Raza r poate fi diferită pentru diferite particule. Prin urmare, energia cinetică totală E_c a corpului în rotație poate fi scrisă astfel:

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2.$$

Termenul $\sum m_i r_i^2$ este suma produselor dintre masele particulelor și pătratele distanțelor lor respective pînă la axa de rotație. Dacă notăm această cantitate cu I atunci

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (12-10)$$

se numește *momentul de inerție* (sau *inerția la rotație*) al corpului în raport cu axa de rotație. Observăm că *momentul de inerție al unui corp depinde de axa particulară în jurul căreia el se rotește*, cît și de forma corpului și de modul în care este distribuită masa sa. Momentul de inerție are dimensiunile ML^2 și este exprimat de obicei în $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ (sau $\text{g} \cdot \text{cm}^2$).

Cu ajutorul momentului de inerție putem scrie acum energia cinetică a corpului rigid în rotație astfel

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (12-11)$$

Aceasta este analogă cu expresia energiei cinetice de translație a unui corp, $E_c = \frac{1}{2} Mv^2$. Am văzut deja că viteza unghiulară ω este analogul vitezei liniare v . Acum vedem că momentul de inerție I (sau *inerția la rotație*) este analogul masei sau *inerției la translație* M . Deși masa unui corp nu depinde de poziția sa, *inerția la rotație a unui corp depinde de axa în jurul căreia el se rotește*.

¹ După cum s-a afirmat în paragraful 12-4, putem separa mișcarea generală a unui sistem de particule într-o mișcare de translație a centrului său de masă și o mișcare de rotație în jurul centrului său de masă. Prin urmare, considerațiile din acest capitol se aplică de asemenea rotațiilor în jurul unei axe care nu este fixă într-un reper inerțial, cu condiția ca: (1) axa să treacă prin centrul de masă și (2) axa mobilă să aibă totdeauna aceeași direcție în spațiu, adică axa să fie în fiecare moment paralelă cu ea însăși în oricare alt moment. Deși ne vom referi adesea la o „axă fixă”, vom înțelege totdeauna în cele ce urmează că includem acest caz particular al unei axe mobile.

Trebuie să înțelegem că energia cinetică de rotație dată de ecuația (12-11) este pur și simplu suma energiilor cinetice de translație ale tuturor părților corpului și nu o formă nouă de energie. Energia cinetică de rotație este pur și simplu un mod convenabil de a exprima energia cinetică a unui rigid în rotație.

Ecuațiile (12-10) și (12-11) arată că energia de rotație a unui corp, pentru o viteză unghiulară dată ω , depinde nu numai de masa corpului ci și de modul în care masa este distribuită în jurul axei de rotație. Experiența arătată în figura 12-5 ne convinge de aceasta. Figura arată trei axe identice de aluminiu, de fiecare din ele fiind atașat un corp de masă M făcut din plumb. În (a) masa este foarte apropiată de axă astfel încât distanțele r_i din ecuația (12-10) pentru particulele care formează corpul sînt relativ mici; în (b) particulele sînt în medie mai departe de axă, iar în (c), în care corpul este un volant, ele sînt și mai depărtate, corespunzînd unor valori și mai mari ale lui r_i .

Acum să răsucim fiecare buton pînă cînd fiecare ax, plecînd din repaus se va învîrți cu aceeași viteză unghiulară măsurată ω . Știm din experiență că va fi nevoie de un lucru mecanic relativ mic în cazul (a), ceva mai mare în cazul (b), și mai mare în cazul (c). De fapt, dacă n-am ști care corp și de care ax a fost atașat, am putea identifica axele cu siguranță folosind această tehnică. Deoarece lucrul mecanic efectuat asupra fiecărei ax este egal cu energia cinetică $\frac{1}{2} I\omega^2$ transmisă fiecărui ax, rezultatul experimental că $E_a < E_b < E_c$ atunci cînd fiecare ax are aceeași viteză unghiulară ω , ne duce la concluzia că $I_a < I_b < I_c$. Aceasta este

tocmai ceea ce ne așteptam în baza ecuației de definiție a lui I (ecuația 12-10). Vom vedea în paragraful 12-6 că, exact cum masa M , pe care o putem numi inerție la translație, este o măsură a rezistenței pe care un corp o opune la o variație a mișcării sale de translație, tot astfel momentul de inerție I , adică inerția la rotație, este o măsură a rezistenței pe care un corp o opune la o variație a mișcării sale de rotație în jurul unei axe date.

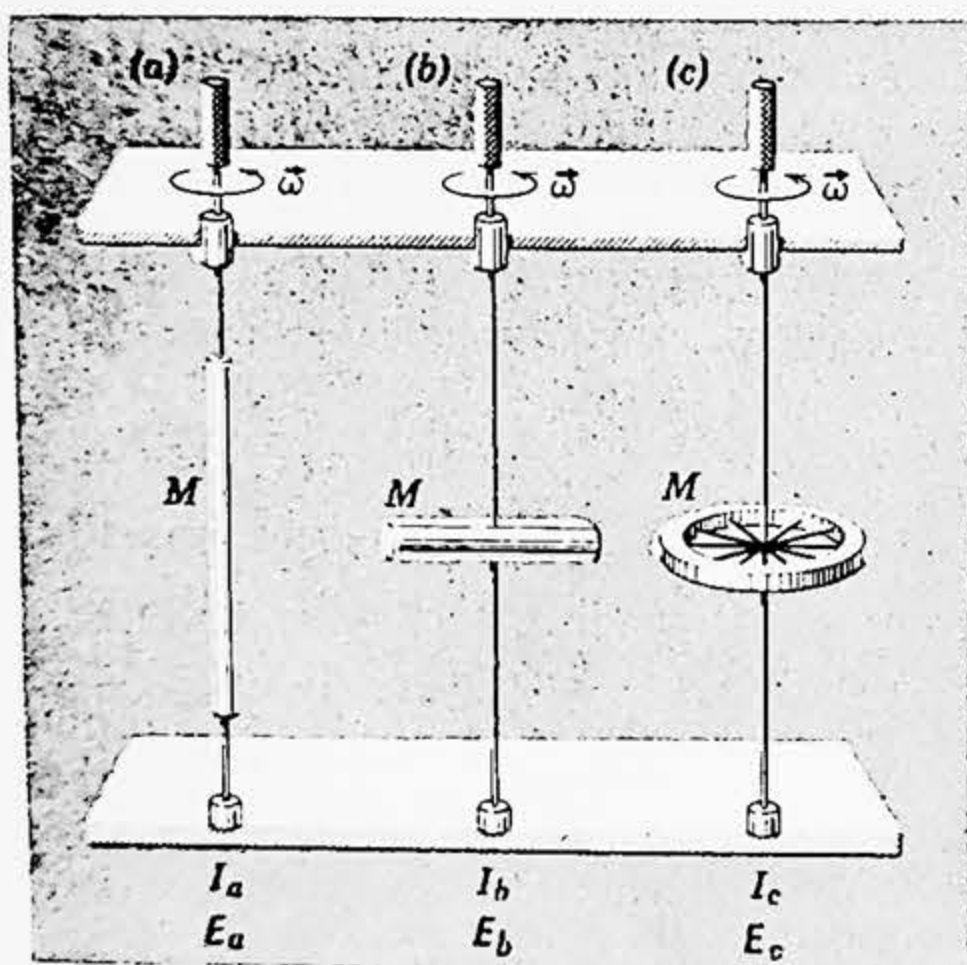
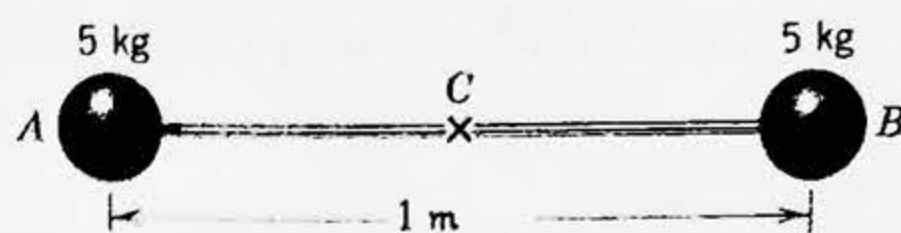


Figura 12-5. O experiență care arată că $I_a < I_b < I_c$. Cele trei corpuri de plumb au aceeași masă M dar masa este distribuită diferit în jurul axei de rotație.

Exemplul 2. Să considerăm un corp format din două sfere cu masa de 5,0 kg fiecare, legate printr-o tijă rigidă ușoară de 1,0 m lungime (fig. 12-6). Se tratează sferele ca puncte materiale și se neglijează masa

Figura 12-6. Exemplul 2. Calculul momentului de inerție al unei haltere.



tijei. Să se determine momentul de inerție al corpului: (a) în jurul unei axe perpendiculare pe sistem, trecând prin centrul său C , și (b) în jurul unei axe perpendiculare pe sistem trecând printr-o sferă.

(a) Dacă axa este perpendiculară pe desen în punctul C avem

$$I_C = \sum m_i r_i^2 = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot (0,50 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} \cdot (0,50 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) Dacă axa este perpendiculară pe figură, trecând prin A sau B avem

$$I_A = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot (0 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} \cdot (1,0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_B = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot (1,0 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} \cdot (0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Prin urmare, momentul de inerție al acestui model de halteră rigidă față de o axă ce trece printr-un capăt este de două ori mai mare decât momentul de inerție în jurul axei ce trece prin centru.

Pentru un corp care nu este compus din mase punctiforme discrete ci, dimpotrivă, reprezintă o distribuție continuă a masei, sumarea din $I = \sum m_i r_i^2$ devine o integrare. Ne imaginăm că corpul este divizat în elemente infinitezimale, fiecare de masă dm . Fie r distanța unui astfel de element pînă la axa de rotație. Atunci momentul de inerție se obține din

$$I = \int r^2 dm, \quad (12-12)$$

unde integrala se ia pe întregul corp. Procedul prin care sumarea \sum a unei distribuții discrete se înlocuiește prin integrala \int pentru o distribuție continuă, este același ca cel discutat pentru centrul de masă în paragraful 9-1.

Pentru corpuri de formă neregulată este greu de evaluat aceste integrale. Pentru corpuri de formă geometrică simplă integralele sînt relativ ușoare dacă ca axă de rotație se alege o axă de simetrie.

Să ilustrăm procedeul pentru un cilindru gol (sau inel) în jurul axei cilindrului (fig. 12-7). Elementul de masă cel mai convenabil este o pătură cilindrică subțire infinitezimală de rază r , grosime dr și lungime L . Dacă densitatea materialului, adică masa pe unitatea de volum, este ρ , atunci

$$dm = \rho dV,$$

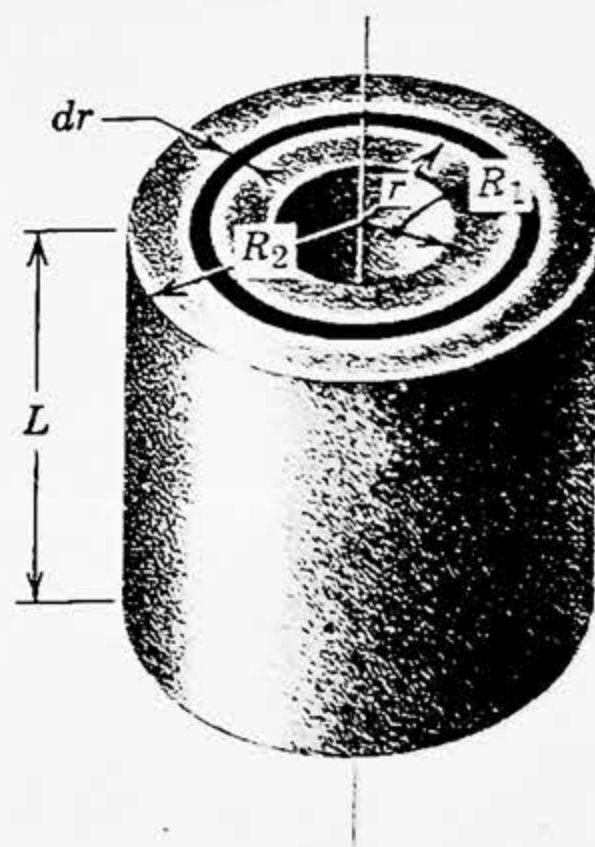


Figura 12-7. Calculul momentului de inerție al unui cilindru inelar.

unde dV este volumul păturii cilindrice de masă dm . Avem

$$dV = (2\pi r dr)L,$$

astfel încât

$$dm = 2\pi L \rho dr.$$

Atunci momentul de inerție în jurul axei cilindrului este

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 dr.$$

Aici R_1 este raza peretelui cilindric interior, iar R_2 este raza peretelui cilindric exterior.

Dacă acest corp n-ar avea o densitate constantă, ar trebui să știm cum depinde ρ de r înainte de a putea efectua integrarea. Să presupunem pentru simplitate că densitatea este constantă. Atunci

$$I = 2\pi L \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L \rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}.$$

Masa M a cilindrului gol (inelar) este egală cu produsul dintre densitatea sa ρ și volumul său $\pi (R_2^2 - R_1^2)L$ sau

$$M = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2)L.$$

Momentul de inerție al *cilindrului gol* (sau inel) de masă M , rază internă R_1 și rază externă R_2 este deci

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

în jurul axei cilindrului.

Dacă raza interioară este zero, R_1 este egal cu zero și avem un cilindru plin (sau disc). Atunci

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

în jurul axei cilindrului, unde R este raza cilindrului plin de masă M .

Un *cerc* (circumferință) poate fi gândit ca un cilindru gol cu pereți foarte subțiri. În acest caz

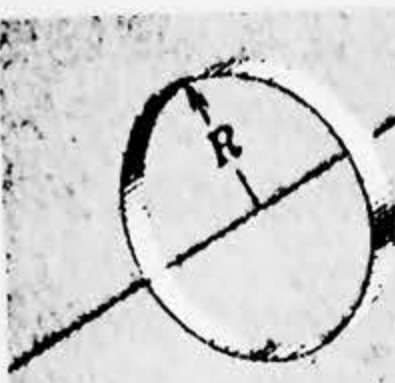
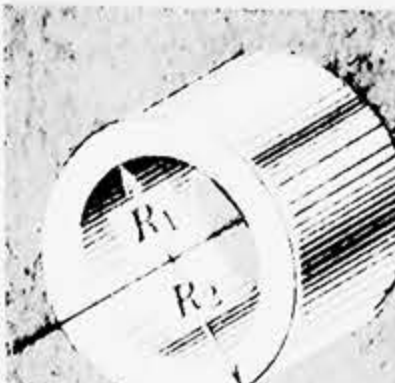
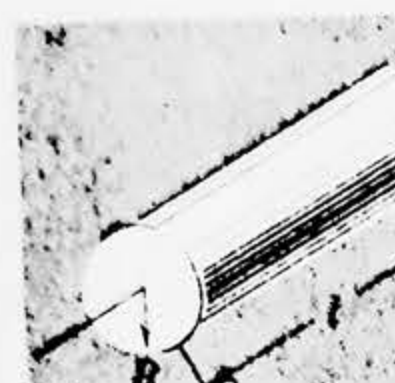
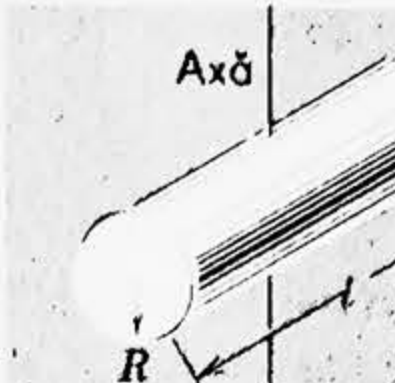
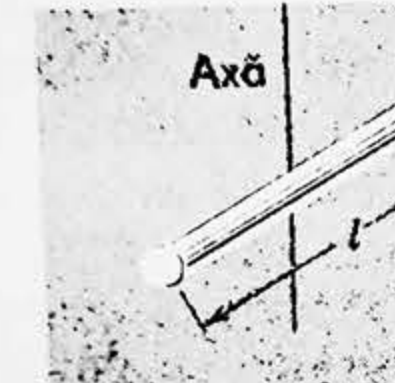
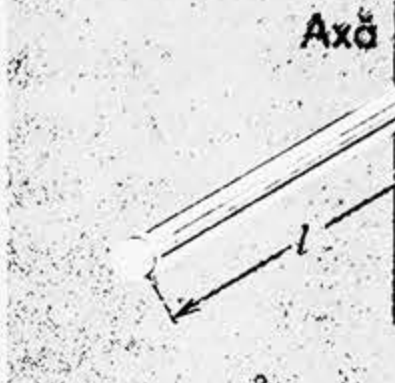

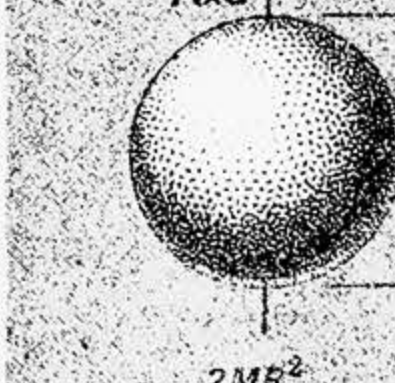
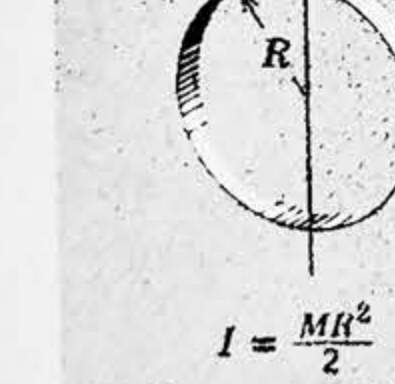
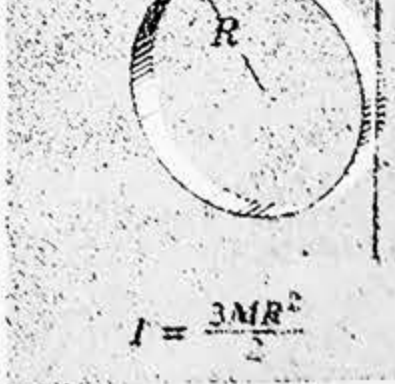
$$R_1 \cong R_2 \cong R$$

și

$$I = MR^2$$

este momentul unui cerc de masă M și de rază R în jurul axei cilindrului.

Acest rezultat pentru un cerc subțire (cerc de butoi) este evident, deoarece fiecare punct material al cercului se află la aceeași distanță R de axa centrală. Pentru un cilindru plin (sau disc) având aceeași masă ca un cerc (de butoi), momentul de inerție este evident mai mic decât cel al cercului, deoarece majoritatea particulelor cilindrului (sau discului) se află la distanțe R mai mici până la axă.

 <p>Cerc în jurul axei cilindrului</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>a</p>	 <p>Cilindru gol (inelar) în jurul axei cilindrului</p> <p>$I = \frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>b</p>
 <p>Cilindru plin în jurul axei cilindrului</p> <p>$I = \frac{MR^2}{2}$</p> <p>c</p>	 <p>Cilindru plin (sau disc) în jurul unui diametru central</p> <p>$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$</p> <p>d</p>
 <p>Tijă subțire în jurul axei ce trece prin centru \perp pe lungime</p> <p>$I = \frac{ml^2}{12}$</p> <p>e</p>	 <p>Tijă subțire în jurul unei axe \perp în unul din capete pe lungime</p> <p>$I = \frac{ml^2}{3}$</p> <p>f</p>
 <p>Sferă plină în jurul unui diametru</p> <p>$I = \frac{2MR^2}{5}$</p> <p>g</p>	 <p>Pătură sferică subțire în jurul unui diametru</p> <p>$I = \frac{2MR^2}{3}$</p> <p>h</p>
 <p>Cerc în jurul unui diametru</p> <p>$I = \frac{MR^2}{2}$</p> <p>i</p>	 <p>Cerc în jurul unei tangente</p> <p>$I = \frac{3MR^2}{2}$</p> <p>j</p>

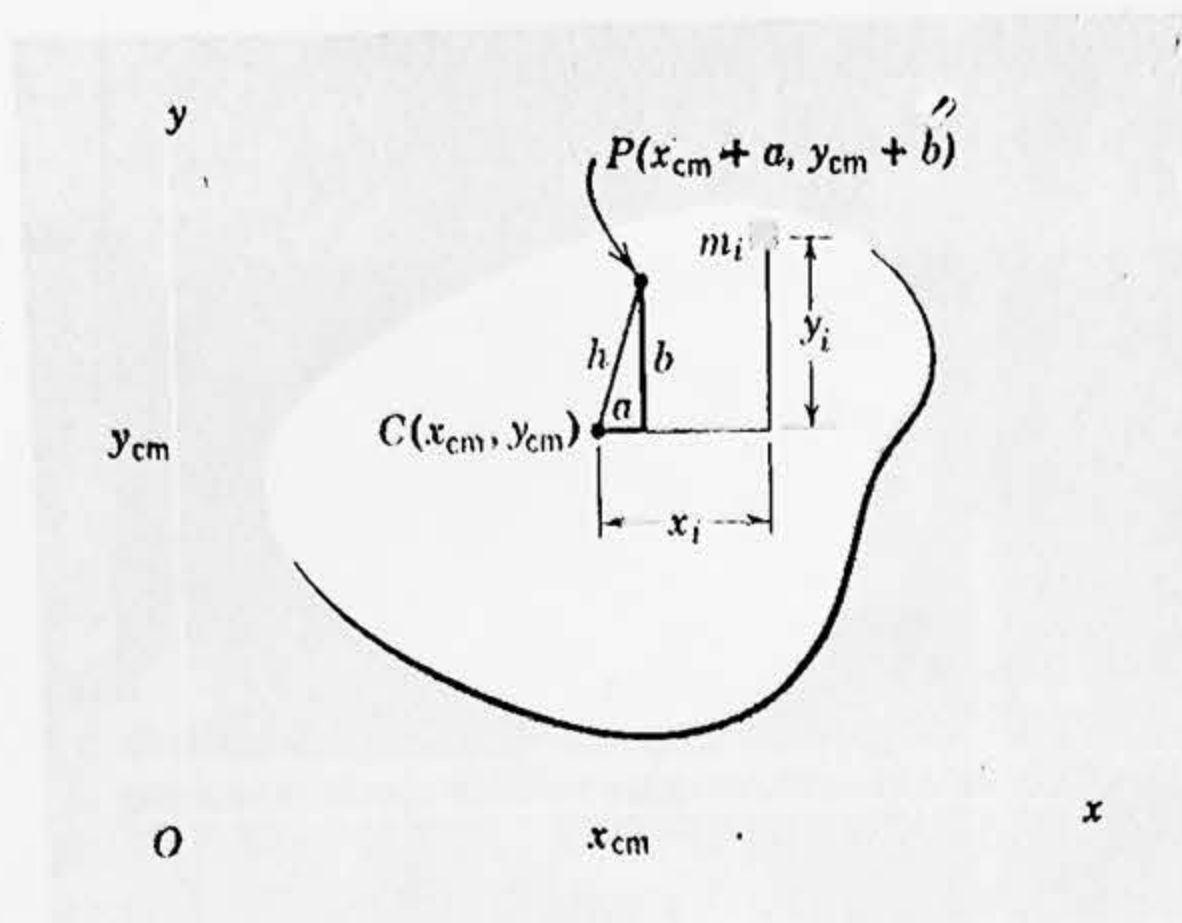


Figura 12-8. Deducerea teoremei axelor paralele. Cunoșcând momentul de inerție în jurul unei axe care trece prin C, putem găsi valoarea sa față de o axă paralelă care trece prin P.

Momentele de inerție în jurul unor anumite axe ale solidelor obișnuite (de densitate constantă) sînt specificate în tabela 12-1. Fiecare din aceste rezultate poate fi obținut prin integrare într-un mod analog cu cel ilustrat de noi. Masa totală a corpului este notată cu M în fiecare ecuație.

Există o relație simplă și foarte utilă între momentul de inerție I al unui corp în jurul unei axe oarecare și momentul său de inerție I_{cm} față de o axă paralelă care trece prin centrul de masă. Dacă M este masa totală a corpului și h distanța dintre cele două axe, relația este

$$I = I_{cm} + Mh^2. \quad (12-13)$$

Demonstrația acestei relații (teorema lui Steiner pentru axe paralele) urmează mai jos. Fie C centrul de masă al unui corp de formă arbitrară a cărui secțiune transversală este arătată în figura 12-8. Centrul de masă are coordonatele x_{cm} și y_{cm} . Alegem planul $x-y$ astfel încît să cuprindă pe C deci z_{cm} este egal cu zero. Să considerăm o axă care trece prin C sub unghi drept față de planul desenului și o altă axă paralelă cu aceasta care trece prin P de coordonate $(x_{cm} + a)$ și $(y_{cm} + b)$. Distanța dintre axe este $h = \sqrt{a^2 + b^2}$. Atunci pătratul distanței unei particule pînă la axa din C este $x_i^2 + y_i^2$, unde x_i, y_i sînt coordonatele unui element de masă m_i față de axa din C . Pătratul distanței acestui element pînă la axa din P este $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2$. Prin urmare momentul de inerție în jurul unei axe ce trece prin P este

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i. \end{aligned}$$

Din definiția centrului de masă rezultă

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$$

astfel încît termenii din mijloc sînt nuli. Primul termen reprezintă momentul de inerție față de o axă ce trece prin centrul de masă, I_{cm} , iar ultimul termen este Mh^2 . Prin urmare rezultă că $I = I_{cm} + Mh^2$.

Cu ajutorul acestei formule unele rezultate din tabela 12-1 pot fi deduse din rezultatele precedente. De exemplu, (f) rezultă din (e), iar (j) rezultă din (i) cu ajutorul ecuației (12-13). Formula va fi deosebit de utilă în problemele care combină mișcarea de rotație cu mișcarea de translație.

12-6. Dinamica rotației unui corp rigid

În acest paragraf continuăm să studiem cazul particular al unui rigid obligat să se rotească în jurul unei axe care este fixă¹ într-un sistem de referință inerțial. Întâi vom revedea conceptul de moment al forței, aplicat fiind unui astfel de rigid; apoi vom arăta cum momentul forței este legat de accelerația unghiulară a corpului în jurul acestei axe.

Să presupunem că aplicăm un moment \vec{M} uneia din particulele rigidului. Deoarece toate particulele unui corp în adevăr rigid mențin relații spațiale fixe față de toate celelalte particule care formează corpul, putem spune că momentul acționează asupra întregului rigid. În general vectorul \vec{M}^A nu va fi dirijat de-a lungul axei în jurul căreia corpul este liber să se rotească. În acest paragraf nu ne ocupăm cu momentele existente aplicate corpului ci numai cu componentele acestor momente care sînt dirijate de-a lungul axei.² Numai aceste componente pot obliga corpul să se rotească în jurul acestei axe. Componentele momentului, perpendiculare pe axă, tind să răstoarne axa din poziția sa fixă. Am presupus însă în mod special că axa păstrează o direcție fixă. Corpul poate fi fixat, de exemplu, de un ax care este ținut într-o poziție fixă cu ajutorul unor lagăre la fiecare extremitate; dacă un moment aplicat are o componentă perpendiculară pe ax, tinzînd să-l răstoarne, lagărele vor reacționa automat cu un contramoment de modul egal dar de sens opus asupra axului, anihilînd efectul acelei componente.

În figura 12-9 (compară cu figura 11-3) arătăm o secțiune printr-un rigid care este liber să se rotească în jurul axei z a unui reper inerțial. O forță \vec{F} , aleasă pentru ușurință în planul

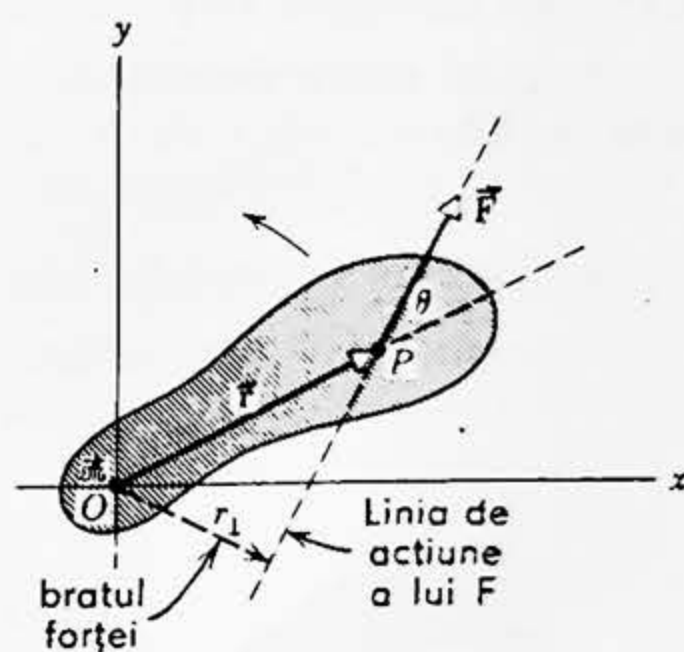


Figura 12-9. O forță \vec{F} acționînd asupra particulei P dintr-un corp rigid exercită un moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ asupra corpului, în raport cu o axă care trece prin O perpendicular pe planul figurii. Este arătat de asemenea brațul forței r ca și momentul \vec{M} care este un vector perpendicular pe planul figurii spre cititor.

¹ Vezi nota de subsol de la pag. 293.

² Ca și pentru oricare alt vector, putem vorbi de componenta vectorială a unui moment în orice direcție dată, cum ar fi o axă dată. În cazul momentului — și al altor mărimi unghiulare — vorbim adesea de componenta în raport cu o direcție sau axă dată. Semnificația este aceeași.

$x-y$ al secțiunii (sau paralel cu acesta), acționează asupra unei particule din punctul P al corpului, poziția lui P față de axa de rotație (axa z) fiind definită de vectorul \vec{r} . Se poate spune că momentul care acționează asupra particulei din P acționează asupra rigidului ca un întreg și este dat de ecuația (12-1) sau

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Deoarece am ales pe \vec{r} și \vec{F} într-un plan paralel cu planul $x-y$, momentul $\vec{\mathcal{M}}$ va fi dirijat de-a lungul axei z . Regula mâinii drepte arată că el este perpendicular pe planul figurii 12-9 îndreptat spre noi. Dacă \vec{r} și \vec{F} n-ar fi în planul figurii, $\vec{\mathcal{M}}$ n-ar fi paralel cu axa z și ne-am fi restrâns aici numai la componenta lui $\vec{\mathcal{M}}$ de-a lungul acestei axe. Modulul lui $\vec{\mathcal{M}}$ este dat de ecuația (12-2) sau

$$\mathcal{M} = rF \sin \theta$$

care poate fi scris, după cum am văzut, sub forma $\mathcal{M} = rF_{\perp}$ sau $\mathcal{M} = Fr_{\perp}$.

Exemplul 3. O roată de vagon este liberă să se rotească în jurul unei axe orizontale care trece prin O . O forță de 10 N se aplică unei spițe în punctul P , la distanța de 0,50 m de centru. OP face un unghi de 30° cu orizontala (axa x) iar forța este în planul roții formînd un unghi de 45° cu orizontala (axa x). Care este momentul forței aplicate roții?

Unghiul dintre vectorul de poziție \vec{r} de la O la P și forța aplicată \vec{F} (fig. 12-10) este θ , unde

$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Atunci modulul momentului este

$$\mathcal{M} = rF \sin \theta = 0,50 \text{ m} \cdot 10 \text{ N} \cdot \sin 15^\circ = 1,3 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

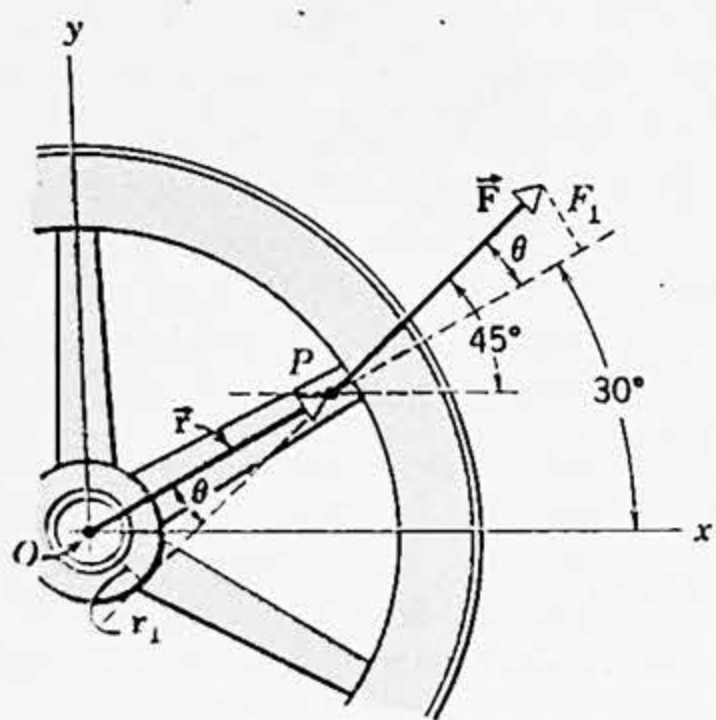


Figura 12-10. Exemplul 3.

Este clar că putem obține același rezultat și din $\mathcal{M} = rF_{\perp}$ sau $\mathcal{M} = Fr_{\perp}$ (vezi ecuațiile 12-2). Momentul $\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$ este un vector dirijat spre noi \odot de-a lungul axei care trece prin O și are modulul 1,3 N·m.

Vom studia acum relația dintre momentul aplicat rigidului din figura 12-9 și accelerația unghiulară a acestui corp. Să observăm rigidul pentru un timp infinitesimal dt în decursul căruia el se va roti cu un unghi infinitesimal $d\theta$. Am văzut mai înainte că putem descrie rotația unui rigid în jurul unei axe fixe, considerînd mișcarea unui singur

punct fix al rigidului, cum ar fi P din figura 12-9. Pentru conveniență, ignorăm atunci corpul însuși în figura 12-11 și ne concentrăm atenția asupra punctului reprezentativ P și asupra vectorului \vec{r} care localizează punctul P față de axa de rotație.

În timpul dt punctul P se va deplasa cu o distanță infinitesimală ds de-a lungul unei traiectorii circulare de rază r în timp ce corpul se rotește cu un unghi infinitesimal $d\theta$, unde

$$ds = r d\theta.$$

Lucrul mecanic dW efectuat de această forță în timpul acestei rotații mici este

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \Phi ds = (F \cos \Phi) (r d\theta),$$

unde $F \cos \Phi$ este componenta lui \vec{F} pe direcția lui $d\vec{s}$.

Termenul $(F \cos \Phi) r$ este însă modulul momentului instantaneu exercitat de \vec{F} asupra rigidului în jurul axei perpendiculare pe figură, care trece prin O , astfel încât

$$dW = \mathcal{M} d\theta. \quad (12-14)$$

Această expresie diferențială pentru lucrul mecanic efectuat în timpul rotației (în jurul unei axe fixe) este echivalentă cu expresia $dW = F dx$ pentru lucrul mecanic efectuat în mișcarea de translație (de-a lungul unei linii drepte).

Pentru a obține viteza cu care este efectuat lucrul mecanic în mișcarea de rotație (în jurul unei axe fixe), împărțim ambii membri ai ecuației (12-14) prin intervalul de timp infinitesimal dt în decursul căruia corpul se deplasează cu $d\theta$ și obținem

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{M} \frac{d\theta}{dt}$$

sau

$$P = \mathcal{M} \omega,$$

ceea ce dă puterea instantanee P . Această ultimă expresie reprezintă analogul rotațional al formulei $P = Fv$ de la mișcarea de translație (de-a lungul unei linii drepte).

Dacă acum asupra corpului acționează mai multe forțe \vec{F}_1, \vec{F}_2 etc., în planul normal pe axa sa de rotație, lucrul mecanic efectuat de aceste forțe asupra corpului într-o rotație mică $d\theta$ va fi

$$\begin{aligned} dW &= F_1 \cos \Phi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \Phi_2 r_2 d\theta + \dots = \\ &= (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots) d\theta = \mathcal{M} d\theta, \end{aligned}$$

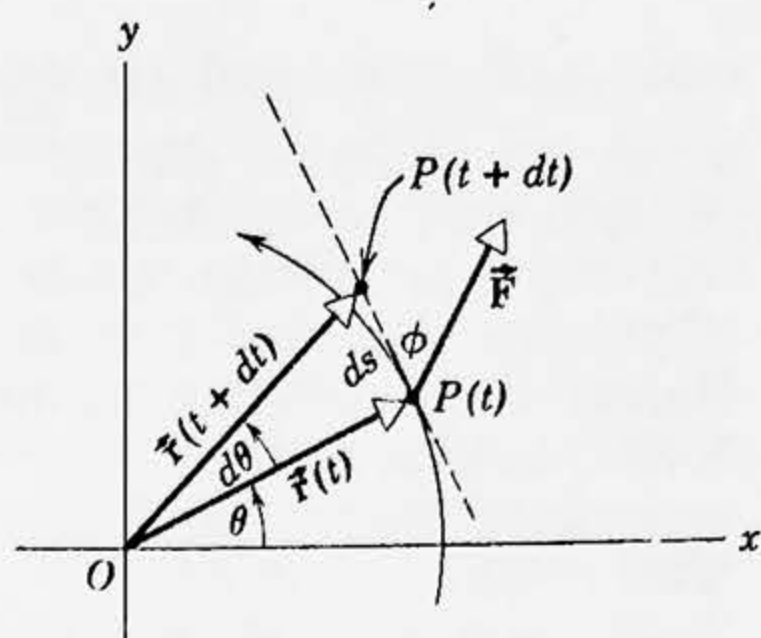


Figura 12-11. În timpul dt punctul P al corpului rigid din figura 12-9 parcurge o distanță ds de-a lungul unui arc de cerc de rază r . Corpul rigid (nu este arătat) și vectorul \vec{r} care localizează punctul P în corp, se rotesc fiecare cu un unghi $d\theta$ în timpul acestui interval.

unde $r_1 d\theta$ este egal cu ds_1 , deplasarea punctului în care se aplică \vec{F}_1 și Φ_1 este unghiul dintre \vec{F}_1 și ds_1 etc. și unde \mathcal{M} este acum modulul componentei momentului *rezultant* de-a lungul axei ce trece prin O. În calculul acestei sume fiecare moment este considerat pozitiv sau negativ după sensul în care el tinde să rotească singur corpul în jurul axei sale. Putem numi arbitrar momentul creat de o forță, pozitiv, dacă efectul forței, care acționează singură, este de a produce o rotație în sens trigonometric; atunci momentul este negativ dacă efectul este producerea unei rotații în sens orar.

Într-un corp absolut rigid nu există nici o mișcare internă a particulelor. Particulele mențin permanent o poziție relativă fixă unele față de altele și se mișcă numai simultan cu corpul, ca un întreg. Prin urmare, nu poate exista nici o disipare a energiei în interiorul unui corp absolut rigid. Putem de aceea egala viteza cu care este efectuat lucrul mecanic asupra corpului cu viteza cu care crește energia sa cinetică. Viteza cu care este efectuat lucrul mecanic asupra rigidului este

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{M} \frac{d\theta}{dt} = \mathcal{M}\omega, \quad (12-15)$$

Viteza cu care crește energia cinetică a rigidului este

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right),$$

Dar I este constant deoarece corpul este rigid și axa este fixă. Prin urmare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\omega^2) = I \omega \frac{d\omega}{dt} = I \omega \alpha. \quad (12-16)$$

Egalînd membrii II ai ecuațiilor (12-15) și (12-16), obținem

$$\mathcal{M}\omega = I\alpha\omega$$

sau

$$\mathcal{M} = I\alpha. \quad (12-17)$$

Ecuația (12-17) se referă la mișcarea de rotație a unui rigid în jurul unei axe fixe. Momentul \mathcal{M} , viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară α sînt toate restrînse la o direcție paralelă cu această axă, într-un sens sau altul. Cazul echivalent în translație este acela în care forța \vec{F} care acționează asupra unui corp, viteza acestuia \vec{v} și accelerația sa \vec{a} sînt toate dirijate de-a lungul drepte date, într-un sens sau altul.

Cele șase mărimi de mai sus sînt vectori, dar dacă ele sînt dirijate de-a lungul unei drepte fixe, ele pot avea numai două sensuri. Luînd unul din aceste sensuri drept pozitiv (+) și celălalt drept negativ (—), putem trata acești vectori algebric și să lucrăm numai cu mărimile lor. Astfel, în deducerea ecuației (12-17) ($\mathcal{M} = I\alpha$), legea a doua a lui Newton ($F = Ma$), scrisă într-o formă scalară potrivită pentru a descrie mișcarea rectilinie, am transformat-o astfel încît să apară mărimile care carac-

terizează mișcarea de rotație. Aceasta ne sugerează ideea că, așa cum am asociat o forță cu accelerația liniară a unui corp, tot astfel am putea asocia un moment (al forței) cu accelerația unghiulară a unui corp în jurul unei axe date. Momentul de inerție I este o măsură a rezistenței pe care corpul o opune la orice schimbare a mișcării sale de rotație pe care o efectuează la un moment dat, întocmai cum masa M (inerția la translație) este o măsură a rezistenței pe care o opune corpul la orice schimbare a mișcării sale de translație produsă de o forță dată.

În tabela 12-2 este comparată mișcarea de translație a unui rigid de-a lungul unei drepte cu mișcarea de rotație a unui rigid în jurul unei axe fixe.

Tabela 12-2

Mișcarea rectilinie		Rotația în jurul unei axe fixe	
Deplasarea	x	Deplasarea unghiulară	θ
Viteza	$v = \frac{dx}{dt}$	Viteza unghiulară	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Accelerația	$a = \frac{dv}{dt}$	Accelerația unghiulară	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Masa	M	Momentul de inerție	I
Forța	$F = Ma$	Momentul forței	$\mathcal{M} = I\alpha$
Lucrul mecanic	$W = \int F dx$	Lucrul mecanic	$W = \int \mathcal{M} d\theta$
Energia cinetică	$\frac{1}{2} Mv^2$	Energia cinetică	$\frac{1}{2} I\omega^2$
Puterea	$P = Fv$	Puterea	$P = \mathcal{M}\omega$
Impulsul	Mv	Momentul cinetic	$I\omega$

Rotația unui rigid în jurul unei axe fixe (pentru care se aplică $\mathcal{M} = I\alpha$) nu constituie tipul cel mai general de mișcare de rotație, deoarece corpul poate să nu fie rigid și axa poate să nu fie fixă într-un sistem de referință inerțial. În acest caz general se aplică ecuația (12-9) sau $\vec{\mathcal{M}}_{ext} = d\vec{L}/dt$. După cum am subliniat deja, aceasta este echivalentă cu legea a doua a lui Newton pentru mișcarea de translație generală a unui sistem de particule și anume cu ecuația (19-17) sau $\vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt$.

În restul acestui capitol ne restrângem la rotațiile corpurilor rigide în jurul unor axe fixe. În capitolul 13 vom considera unele cazuri mai generale de mișcare de rotație.

Exemplul 4. Un disc uniform de rază R și masă M este montat pe un ax sprijinit în lagăre fixe, fără frecări, ca în figura 12-12. Un fir ușor este trecut peste obada roții și asupra lui se exercită în jos, o forță de tracțiune constantă \vec{T} . Să se afle accelerația unghiulară a roții și accelerația tangențială a unui punct de pe obadă.

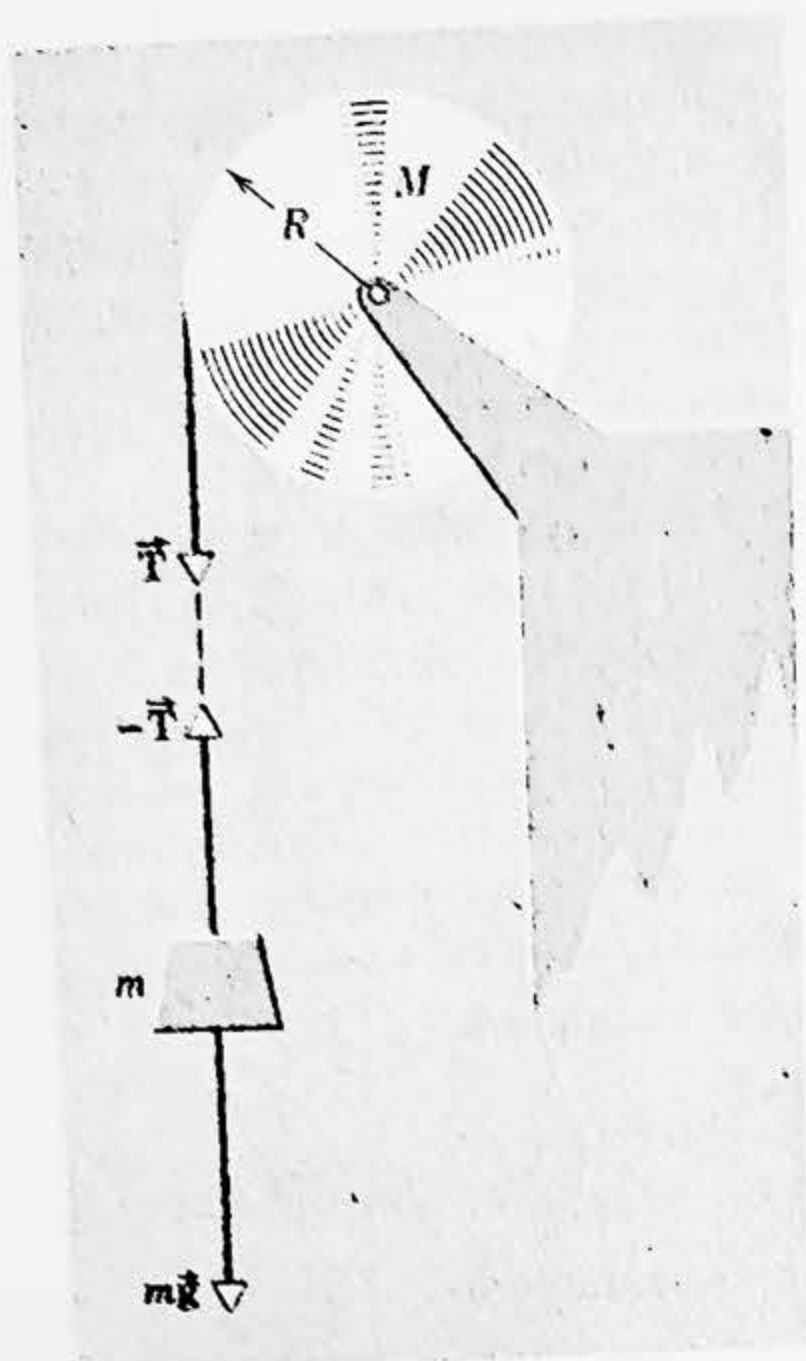


Figura 12-12. Exemplul 4. O forță constantă \vec{T} aplicată în jos produce rotația discului. Exemplul 5. Aici \vec{T} este furnizat de corpul de masă m care cade.

jos, modulul forței gravitaționale care acționează asupra sa, mg , trebuie să fie mai mare decât modulul forței de tensiune din fir T care îl trage în sus. Accelerația a a corpului suspendat este aceeași ca și accelerația tangențială a unui punct de pe obada discului. Din legea a doua a lui Newton

$$mg - T = ma.$$

Momentul rezultat asupra discului este TR și momentul său de inerție este $\frac{1}{2}MR^2$, astfel încât din

obținem

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha.$$

Folosind relația $a = R\alpha$, putem scrie această ultimă ecuație astfel

$$2T = Ma.$$

Rezolvând prima și ultima ecuație, obținem

$$a = \left(\frac{2m}{M + 2m} \right) g$$

Momentul în jurul axei centrale este $\mathcal{M} = TR$ și momentul de inerție al discului în jurul axei sale centrale este $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Din

$$\mathcal{M} = I\alpha$$

avem

$$TR = \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \alpha$$

sau

$$\alpha = \frac{2T}{MR}.$$

Dacă masa discului este $M = 2,0$ kg, raza sa $R = 0,10$ m și forța $T = 10$ N, atunci

$$\alpha = \frac{2 \cdot 10 \text{ N}}{2,0 \text{ kg} \cdot 0,10 \text{ m}} = 100 \text{ rad/s}^2.$$

Accelerația tangențială a unui punct de pe obadă este dată de

$$a = R\alpha = (100 \text{ rad/s}^2) \cdot 0,10 \text{ m} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Exemplul 5. Să presupunem că atârnam un corp de masă m de firul din problema precedentă. Să se afle accelerația unghiulară a discului și accelerația tangențială a unui punct de pe obadă în acest caz.

Fie acum T tensiunea din fir. Deoarece corpul suspendat se va mișca accelerat în

și

$$T = \left(\frac{Mm}{M+2m} \right) g.$$

Dacă discul are o masă $M=2,0$ kg și o rază $R=0,10$ m ca mai înainte, și dacă suspendăm un corp de greutate 10 N, obținem

$$a = \frac{2mg}{M+2m} = \frac{2 \cdot 10 \text{ N}}{2,0 \text{ kg} + 2 \cdot (10/9,8) \text{ kg}} \approx 5,0 \text{ m/s}^2,$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{5 \text{ m/s}^2}{0,10 \text{ m}} = 50 \text{ rad/s}^2.$$

Observăm că accelerațiile sînt mai mici în cazul unui corp suspendat de 10 N decît în cazul unei forțe de tracțiune de 10 N exercitată asupra firului (exemplul 4). Aceasta corespunde faptului că tensiunea din fir care produce momentul este acum mai mică decît 10 N, și anume

$$T = \frac{Mmg}{M+2m} = \frac{2,0 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N}}{2,0 \text{ kg} + 2 \cdot (10/9,8) \text{ kg}} \approx 5,0 \text{ N}.$$

Tensiunea din fir trebuie să fie mai mică decît greutatea corpului atîrnat, deoarece corpul se mișcă accelerat în jos.

Exemplul 6. Presupunînd că discul din exemplul 5 pornește din repaus, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de momentul aplicat asupra discului în $2,0$ s. Să se calculeze de asemenea creșterea energiei de rotație a discului.

Deoarece momentul aplicat este constant, accelerația unghiulară rezultantă este constantă. Deplasarea unghiulară totală în cazul rotației cu accelerația unghiulară constantă se obține din ecuația (11-5)

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

în care

$$\omega_0 = 0, \quad \alpha = 50 \text{ rad/s}^2, \quad t = 2,0 \text{ s},$$

astfel încît

$$\theta = 0 + \frac{1}{2} \cdot (50 \text{ rad/s}^2) (2,0 \text{ s})^2 = 100 \text{ rad}.$$

În cazul unui moment constant lucrul mecanic efectuat într-o deplasare unghiulară finită este

$$W = \mathcal{M} (\theta_2 - \theta_1),$$

în care

$$\mathcal{M} = TR = 5,0 \text{ N} \cdot 0,10 \text{ m} = 0,50 \text{ N} \cdot \text{m}$$

și

$$\theta_2 - \theta_1 = 0 - 100 \text{ rad}.$$

Prin urmare,

$$W = 0,50 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot 100 \text{ rad} = 50 \text{ J}.$$

Acest lucru mecanic trebuie să ducă la o creștere a energiei cinetice de rotație a discului. Pornind din repaus discul câștigă o viteză unghiulară ω .

$$\text{Energia de rotație este } \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \omega^2.$$

Pentru a obține pe ω folosim ecuația (11-3)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

în care

$$\omega_0 = 0, \quad t = 2,0 \text{ s}, \quad \alpha = 50 \text{ rad/s}^2,$$

astfel încît

$$\omega = 0 + (50 \text{ rad/s}^2) \cdot 2,0 \text{ s} = 100 \text{ rad/s}.$$

Atunci

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} \cdot 2,0 \text{ kg} \cdot (0,10 \text{ m})^2 (100 \text{ rad/s})^2 = 50 \text{ J},$$

ca mai înainte. Prin urmare, creșterea energiei cinetice a discului este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă asupra discului, așa cum trebuia să fie.

Exemplul 7. Să se arate că în cazul sistemului de la exemplul 5 are loc conservarea energiei mecanice.

Forța rezultantă care acționează asupra sistemului este forța de gravitație exercitată asupra corpului suspendat. Aceasta este o forță conservativă. Considerînd sistemul ca un întreg, vedem că corpul suspendat pierde energia potențială E_p cînd coboară

$$E_p = mgy,$$

unde y este distanța verticală cu care a coborît blocul. În același timp corpul suspendat câștigă energie cinetică de translație, iar discul câștigă energie cinetică de rotație. Câștigul total de energie cinetică este

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

unde v este viteza liniară a masei suspendate. Trebuie să arătăm că

$$mgy = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Pentru mișcarea liniară, pornind din repaus, avem $v^2 = 2ay$. Din exemplul 5 am obținut $a = 2mg/(M+2m)$. Prin urmare,

$$mgy = \frac{mgy^2}{2a} = \frac{1}{2} mv^2 \frac{g}{a} = \frac{1}{2} mv^2 \left(\frac{M+2m}{2m} \right) = \frac{1}{4} (M+2m)v^2.$$

Știm de asemenea că $\omega = v/R$ și $I = \frac{1}{2} MR^2$. Substituind aceste relații în membru drept al ecuației de conservare, obținem

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) v^2/R^2 = \frac{1}{4} (M+2m)v^2.$$

Prin urmare, energia mecanică se conservă.

Exemplul 8. Să se deducă relația $L = I\omega$ arătată în tabela 12-2 pentru momentul cinetic al unui corp rigid obligat să se rotească în jurul unei axe fixe. Plecând de la relația scalară $M = I\alpha$ și de la definiția lui $\alpha (-d\omega/dt)$, putem scrie

$$M = I\alpha = I(d\omega/dt) = d(I\omega)/dt,$$

în care ultima egalitate este justificată de faptul că I este constant pentru un corp rigid dat și o axă de rotație (fixă) dată.

Acum vom folosi relația vectorială $\vec{M}_{ext} = d\vec{L}/dt$ (ecuația 12-9) și vom scrie relația corespunzătoare pentru componentele scalare, M și dL , ale lui \vec{M}_{ext} și $d\vec{L}$ de-a lungul axei fixe de rotație, obținând

$$M = dL/dt.$$

Comparând cele două ecuații de mai sus obținem relația căutată, anume

$$L = I\omega. \quad (12-18)$$

Ca și ecuația (12-17) ($M = I\alpha$), aceasta este o relație scalară valabilă pentru rotația unui rigid în jurul unei axe fixe. L este componenta de-a lungul acelei axe a momentului cinetic vectorial \vec{L} al rigidului și I se referă la aceeași axă.

Ecuația (12-18) reprezintă analogul rotațional al expresiei $P = Mv$ pentru impulsul unui corp rigid de masă M în mișcarea de translație pură cu viteza liniară v . Ea dă momentul cinetic (unghiular) în jurul unei axe fixe a unui rigid care are momentul de inerție I și viteza unghiulară ω în jurul aceleiași axe.

12-7. Mișcarea compusă de translație și rotație a unui rigid

Până acum am considerat numai corpuri care se rotesc în jurul unei axe fixe. Dacă însă un corp se rostogolește, el se rotește în jurul unei axe și în același timp se mișcă prin translație. De aceea s-ar părea că mișcarea corpurilor care se rostogolesc trebuie tratată ca o combinație a mișcării de translație și mișcării de rotație. Este însă de asemenea posibil să tratăm un corp care se rostogolește ca și când mișcarea sa ar fi o rotație pură. Vrem să ilustrăm echivalența celor două moduri de abordare.

Să considerăm de exemplu un cilindru care se rostogolește pe o suprafață orizontală ca în figura 12-13. În fiecare moment, punctul inferior al cilindrului se află în repaus pe suprafață, deoarece el nu alunecă. Axa perpendiculară pe figură care trece prin punctul de contact P se numește axă instantanee de rotație. În acel moment viteza liniară a oricărei particule a cilindrului este îndreptată sub un unghi drept față de linia care unește particula cu P și modulul ei este proporțional cu această

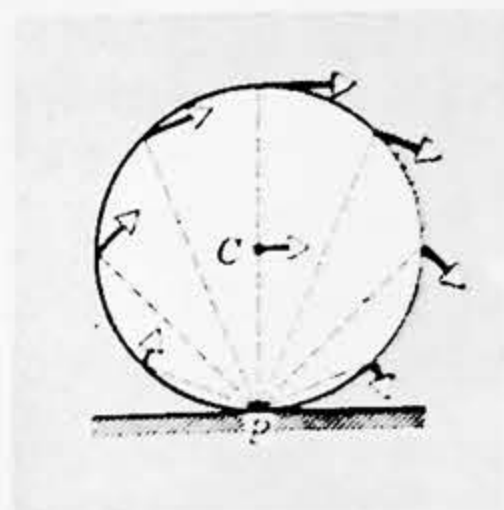


Figura 12-13. Un corp care se rostogolește poate fi privit în fiecare moment ca rotindu-se în jurul unei axe perpendiculare pe figură trecând prin punctul său de contact P .

distanță. Aceasta revine la a spune că cilindrul se rotește în jurul unei axe fixe care trece prin P , cu o anumită viteză unghiulară ω , în acel moment. Prin urmare, la un moment dat, mișcarea corpului este echivalentă cu o rotație pură. Energia cinetică totală poate fi de aceea scrisă astfel:

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (12-19)$$

unde I_P este momentul de inerție în jurul axei din P .

Să folosim acum teorema axelor paralele (teorema lui Steiner) care ne spune că

$$I_P = I_{cm} + MR^2,$$

unde I_{cm} este momentul de inerție al cilindrului de masă M și de rază R în jurul unei axe paralele care trece prin centrul de masă. Ecuația (12-19) devine acum

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2. \quad (12-20)$$

Mărimea $R\omega$ este viteza cu care se mișcă centrul de masă al cilindrului față de punctul fix P . Fie $R\omega = v_{cm}$. Relația (12-20) devine atunci

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2. \quad (12-21)$$

Acum observăm că viteza centrului de masă față de P este aceeași ca și viteza lui P față de centrul de masă. Prin urmare viteza unghiulară ω a centrului de masă în jurul lui P văzută de un observator din P este aceeași ca și viteza unghiulară a unei particule din P în jurul lui C văzută de un observator din C (care se mișcă împreună cu cilindrul). Aceasta este echivalent cu a spune că orice linie de referință din cilindru se rotește cu același unghi într-un timp dat, indiferent dacă ea este observată dintr-un reper fix față de suprafața pe care se rostogolește cilindrul sau dintr-un reper care se mișcă prin translație față de acest reper fix. Putem interpreta de aceea ecuația (12-21), care a fost dedusă în baza mișcării de rotație pură, într-un alt mod, adică, primul termen $\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ este energia cinetică pe care ar avea-o cilindrul dacă s-ar roti în jurul unei axe ce trece prin centrul său de masă fără mișcare de translație, iar al doilea termen $\frac{1}{2} M v_{cm}^2$ este energia cinetică pe care ar avea-o cilindrul dacă s-ar mișca prin translație cu viteza centrului său de masă, fără rotație. Observăm că nu se face acum nici un fel de referință la axa instantanee de rotație. În adevăr, ecuația (12-21) se aplică oricărui corp care se mișcă și se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe mișcarea sa, indiferent dacă el se rostogolește sau nu pe o suprafață.

Efectul combinat al translației centrului de masă și al rotației în jurul unei axe ce trece prin centrul de masă este echivalent cu o rotație pură de aceeași viteză unghiulară în jurul unei axe care trece prin punctul de contact al corpului ce se rostogolește.

Pentru a ilustra acest rezultat în mod simplu, să considerăm viteza instantanee a diferitelor puncte de pe un cilindru ce se rostogolește. Dacă viteza centrului de masă (văzută de un observator fix față de suprafață) este v_{cm} , viteza unghiulară instantanee în jurul unei axe trecând prin P este $\omega = v_{cm}/R$. Punctul superior Q al cilindrului va avea de aceeași viteză $\omega \cdot 2R = 2v_{cm}$ în acel moment. Punctul de contact P este instantaneu (momentan) în repaus. Prin urmare, din punctul de vedere al rotației pure în jurul lui P , situația este arătată în figura 12-14.

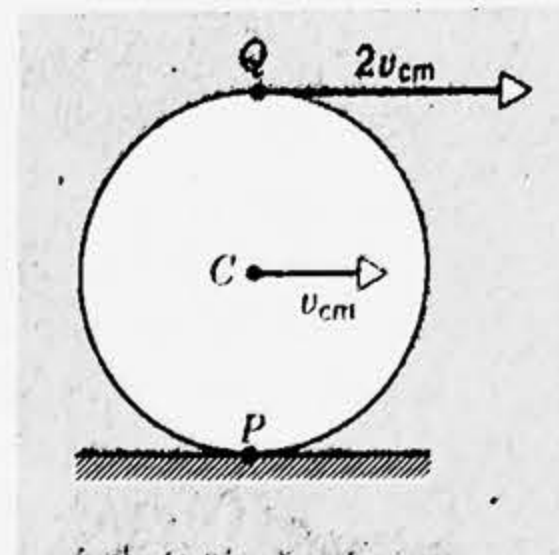


Figura 12-14. Deoarece Q și C au aceeași viteză unghiulară în jurul lui P , rezultă că Q , fiind la o distanță dublă de P , se mișcă cu o viteză liniară dublă în comparație cu C .

Să privim acum rostogolirea ca o combinație a translației centrului de masă și rotației în jurul axei cilindrului trecând prin C . Dacă considerăm numai translația, toate punctele cilindrului au aceeași viteză v_{cm} a centrului de masă. Aceasta este arătat în figura 12-15, a. Dacă considerăm numai rotația, centrul este în repaus, în timp ce punctul superior Q are o viteză $+\omega R$ în sensul axei x iar punctul inferior P al cilindrului are o viteză $-\omega R$ în sensul negativ al axei x . Aceasta este arătat în figura 12-15, b. Acum să combinăm aceste două rezultate. Reamintindu-ne că $\omega = v_{cm}/R$, obținem

$$\text{pentru punctul } Q: v = v_{cm} + \omega R = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} R = 2v_{cm},$$

$$\text{pentru punctul } C: v = v_{cm} + 0 = v_{cm},$$

$$\text{pentru punctul } P: v = v_{cm} - \omega R = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} R = 0.$$

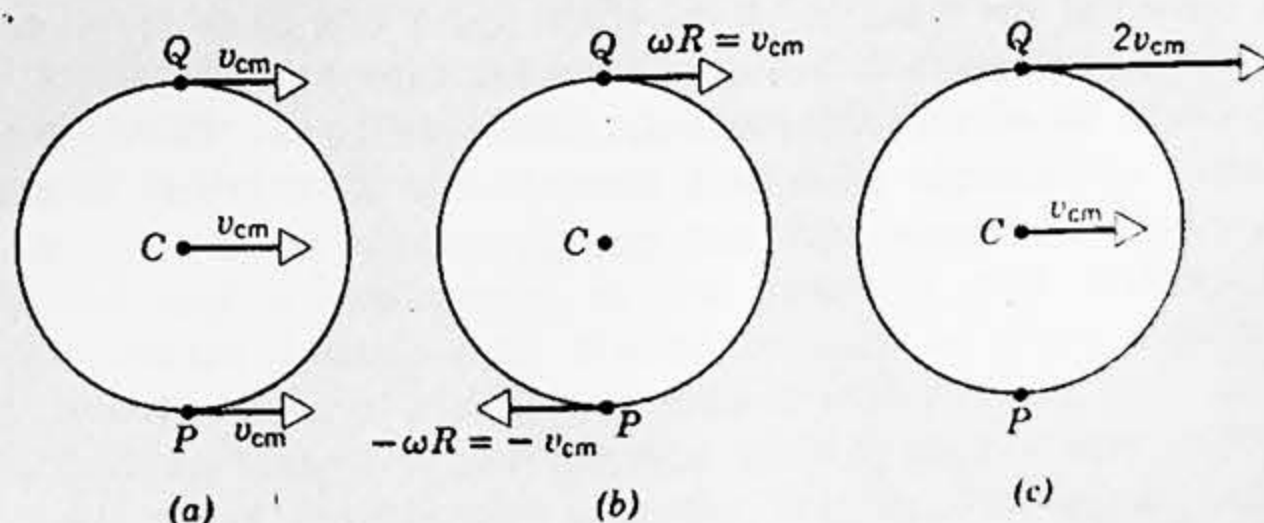


Figura 12-15. (a) În cazul translației pure toate punctele se mișcă cu aceeași viteză. (b) În cazul rotației pure în jurul lui C , punctele diametral opuse se mișcă cu viteze opuse. (c) Mișcarea compusă dintr-o rotație și o translație, se obține compunind vectorii corespunzători din (a) și (b).

Acest rezultat, arătat în figura 12-15, c, este exact același ca cel obținut din punctul de vedere al rotației pure, figura 12-14.

Exemplul 9. Să considerăm un cilindru plin de masă M și rază R care se rostogolește în jos pe un plan înclinat fără să alunece. Să se afle viteza centrului său de masă în momentul când cilindrul atinge baza planului.

Situația este ilustrată în figura 12-16. Putem folosi legea conservării energiei pentru a rezolva această problemă. Cilindrul este inițial în repaus. Rostogolindu-se în jos pe planul înclinat, cilindrul pierde energie potențială de modul Mgh , unde h este înălțimea planului înclinat. El câștigă energie cinetică egală cu

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2,$$

unde v este viteza liniară a centrului de masă și ω este viteza unghiulară în jurul centrului de masă, la baza planului.

Avem atunci relația:

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2,$$

în care

$$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{și} \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Prin urmare

$$Mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) Mv^2,$$

$$v^2 = \frac{4}{3} gh \quad \text{sau} \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Viteza centrului de masă ar fi $v = \sqrt{2gh}$ dacă cilindrul ar aluneca în jos pe un plan înclinat fără frecări. Viteza cilindrului care se rostogolește este deci mai mică decât viteza cilindrului care alunecă, deoarece pentru cilindrul care se rostogolește o parte din energia potențială pierdută s-a transformat în energie cinetică de rotație, rămânând disponibilă mai puțină energie pentru partea de translație a energiei cinetice. Deși cilindrul care se rostogolește ajunge mai târziu la baza planului înclinat decât un cilindru identic care alunecă pornind în același timp în jos pe un plan înclinat fără frecări, dar în alte privințe identic, ambii cilindri ajung la baza planului cu aceeași energie; cilindrul care se rostogolește se rotește în timp ce coboară, pe când cilindrul care alunecă nu se rotește în timp ce coboară.

Observăm că este nevoie de o frecare statică pentru a obliga cilindrul să se rotească. Reamintindu-ne că frecarea este o forță disipativă, cum puteți justifica folosirea legii de conservare a energiei mecanice în această problemă?

Exemplul 10. Rezultatul precedent a fost dedus folosind metodele energetice. Să se rezolve aceeași problemă folosind numai metodele dinamice.

obținut

care se
centrului

energiei
golindu-se
 Mgh , unde

în jurul

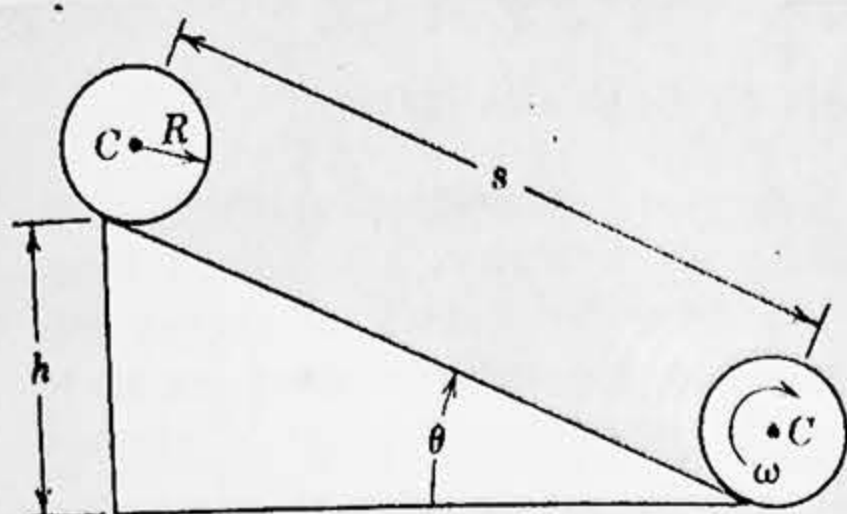


Figura 12-16. Exemplul 9. Un cilindru care se rostogolește în jos pe un plan înclinat.

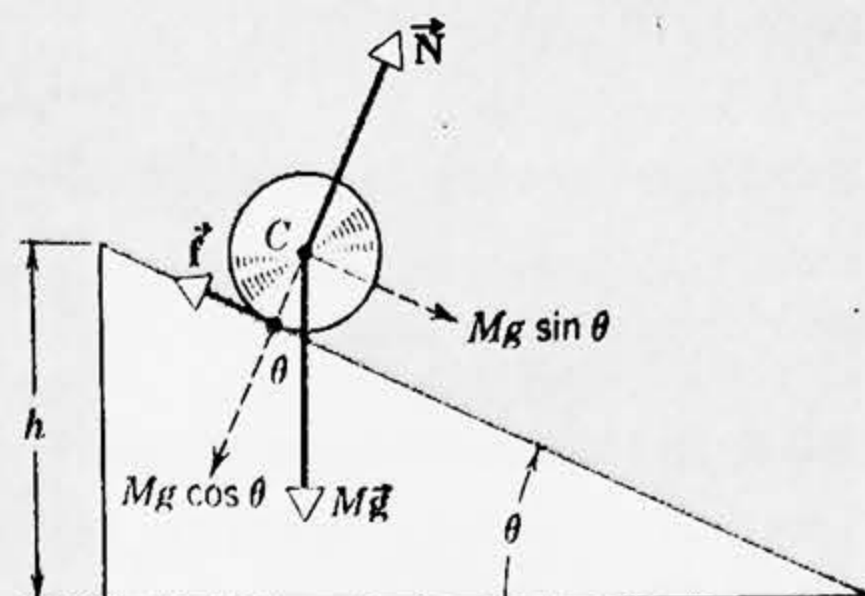


Figura 12-17. Exemplul 10. Soluția dinamică a mișcării unui cilindru care se rostogolește în jos, pe un plan înclinat.

Diagrama forțelor este arătată în figura 12-17. \vec{Mg} este greutatea cilindrului care acționează vertical în jos în centrul de masă¹, \vec{N} este forța normală exercitată de planul înclinat asupra cilindrului, iar \vec{f} este forța de frecare statică care acționează de-a lungul planului înclinat în punctul de contact.

Mișcarea de *translație* a unui corp se obține presupunând că toate forțele externe acționează în centrul său de masă. Folosind legea a doua a lui Newton obținem

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad \text{pentru mișcarea normală pe plan}$$

și

$$Mg \sin \theta - f = Ma \quad \text{pentru mișcarea de-a lungul planului.}$$

Mișcarea de *rotație* în jurul centrului de masă rezultă din

$$\mathcal{M} = I_{cm} \alpha.$$

Nici \vec{N} , nici \vec{Mg} nu pot produce rotația în jurul lui C deoarece liniile lor de acțiune trec prin C și ele au brațul forței egal cu zero. Forța de frecare are brațul R în jurul lui C, astfel încît

$$fR = I_{cm} \alpha.$$

Dar

$$I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{a}{R},$$

¹ În trasarea diagramei vectoriale pentru această problemă noi presupunem tacit că greutatea totală a corpului poate fi considerată ca acționînd în centrul de masă. Am văzut în paragraful 9-2 că acest lucru este justificat în cazul analizei mișcării de translație. Cu toate acestea, mai tîrziu în rezolvarea problemei folosim acest rezultat și la analiza mișcării de rotație. Vom justifica acest procedeu în paragraful 14-3, în care se arată că greutatea unui corp poate fi considerată ca acționînd în centrul său de masă atît pentru mișcarea de translație cît și pentru mișcarea de rotație.

astfel încît

$$f - I_{cm} \alpha / R = Ma/2.$$

Substituind aceasta în ecuația a doua a mișcării de translație, găsim:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta,$$

adică accelerația centrului de masă a cilindrului care se rostogolește $\left(\frac{2}{3} g \sin \theta\right)$ este mai mică decît accelerația centrului de masă a cilindrului care alunecă în jos pe planul înclinat ($g \sin \theta$).

Acest rezultat este valabil în fiecare moment independent de poziția cilindrului de-a lungul planului înclinat. Centrul de masă se mișcă cu accelerație liniară constantă. Pentru a obține viteza centrului de masă, pornind din repaus, folosim relația

$$v^2 = 2as,$$

astfel încît

$$v^2 = 2 \left(\frac{2}{3} g \sin \theta \right) s = \frac{4}{3} g \frac{h}{s} \cdot s = \frac{4}{3} gh$$

sau

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Acest rezultat este același ca cel obținut înainte prin metoda energetică. Metoda energetică este sigur mai simplă și mai directă. Totuși, dacă sîntem interesați în a cunoaște care sînt forțele, precum \vec{N} și \vec{f} , trebuie să folosim o metodă dinamică.

Această metodă determină forța minimă de frecare statică necesară pentru rostogolire fără alunecare:

$$f = Ma/2 - (M/2) \left(\frac{2}{3} g \sin \theta \right) = \frac{1}{3} Mg \sin \theta.$$

Ce s-ar întîmpla dacă forța de frecare statică dintre suprafețe ar fi mai mică decît această valoare?

Exemplul 11. O sferă și un cilindru, avînd aceeași masă și aceeași rază, pleacă din repaus și se rostogolesc în jos pe același plan înclinat. Care corp ajunge primul la baza planului?

Pentru o sferă I_{cm} este egal cu $\frac{2}{5} MR^2$. Folosind metoda dinamică obținem

$$Mg \sin \theta - f = Ma, \quad \text{translația lui } cm,$$

$$fR - I_{cm} \alpha = \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) (a/R) \quad \text{rotația în jurul lui } cm$$

sau

$$f = \frac{2}{5} M a \quad \text{și} \quad a = \frac{5}{7} g \sin \theta, \quad \text{sferă}$$

Pentru cilindru (exemplul 10)

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta, \quad \text{cilindru.}$$

Prin urmare, accelerația centrului de masă al sferei este tot timpul mai mare decât accelerația centrului de masă al cilindrului. Cum ambele corpuri pornesc din repaus în același moment, sfera va ajunge la baza planului prima.

Care corp are energie de rotație mai mare la baza planului? Care corp are energie de translație mai mare la baza planului?

Studentul trebuie să observe atent că nici masa nici raza obiectului ce se rostogolește nu intră în rezultatele precedente. La ce diferențe ne-am aștepta în comportarea cilindrilor de mase și raze diferite? La ce diferențe ne-am aștepta în comportarea sferelor de mase și raze diferite? Cum ar diferi comportările unui cilindru și unei sfere având mase și raze diferite?

Întrebări

1. Care sînt dimensiunile momentului cinetic? Puteți găsi vreo semnificație în faptul că ele sînt aceleași ca și dimensiunile energiei înmulțite cu timpul?

2. Este produsul vectorial a doi vectori neapărat un vector axial?¹

3. Poate fi considerată masa unui corp ca fiind concentrată în centrul său de masă pentru scopurile de calcul al momentului său de inerție?

4. În jurul cărei axe un cub omogen are moment de inerție minim?

5. Dacă două discuri circulare de aceeași greutate și grosime sînt formate din metale de densități diferite, care disc, dacă este cazul, va avea un

moment de inerție mai mare în jurul axei sale centrale?

6. Trebuie determinat momentul de inerție a unui corp de o formă destul de complicată. Forma neregulată face deosebit de dificil calculul matematic al integralei $\int r^2 dm$. Sugați căile prin care ar putea fi măsurat momentul de inerție *experimental*.

7. În figura 12-18 sînt arătate secțiunile transversale a cinci solide. Secțiunile transversale au aceeași înălțime și aceeași lățime maximă. Axele de rotație sînt perpendiculare pe secțiune și trec prin punctele marcate. Solidele au mase egale. Care din ele are cel mai mare moment de inerție

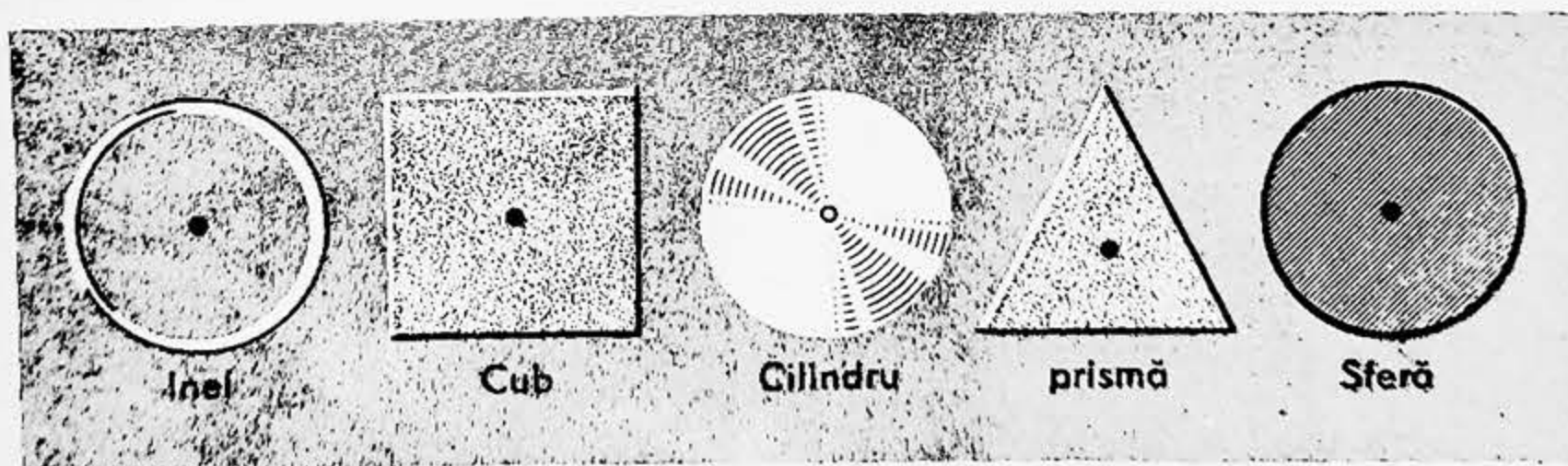


Figura 12-18.

¹ Vezi tema suplimentară II.

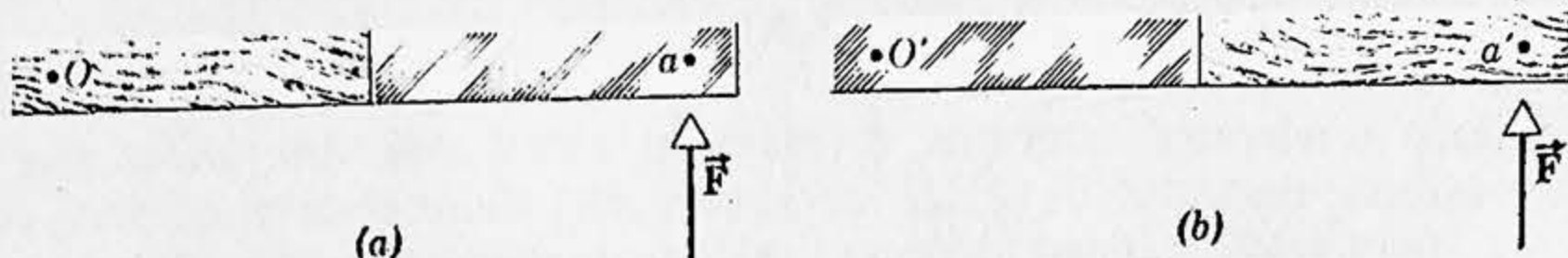


Figura 12-19.

În jurul axei perpendiculare ce trece prin centrul de masă? Care din ele are momentul de inerție cel mai mic?

8. În figura 12-19, a, o riglă, jumătate din lemn și jumătate din oțel, pivotează la capătul din lemn în O în timp ce la capătul din oțel în a se aplică o forță. În figura 12-19, b, rigla pivotează la capătul din oțel în O' și aceeași forță se aplică la capătul din lemn în a' . Se obține aceeași accelerație unghiulară în fiecare caz? Să se explice.

9. O persoană poate distinge un ou crud de un ou fiert învîrtindu-le pe o masă. Să se explice cum.

10. Vor da expresiile lui a și T de la exemplul 5 rezultate rezonabile în cazurile particulare în care $g=0$, $M=0$, $M \rightarrow \infty$, $m=0$ și $m \rightarrow \infty$?

11. Impulsul total al unui sistem de particule nu depinde de mișcările particulelor față de centrul de masă al sistemului. Se poate face o afirmație analogă despre energia cinetică totală a unui sistem de particule?

12. Un tambur cilindric, împins orizontal cu ajutorul unei scînduri, dintr-o poziție inițială arătată în fi-

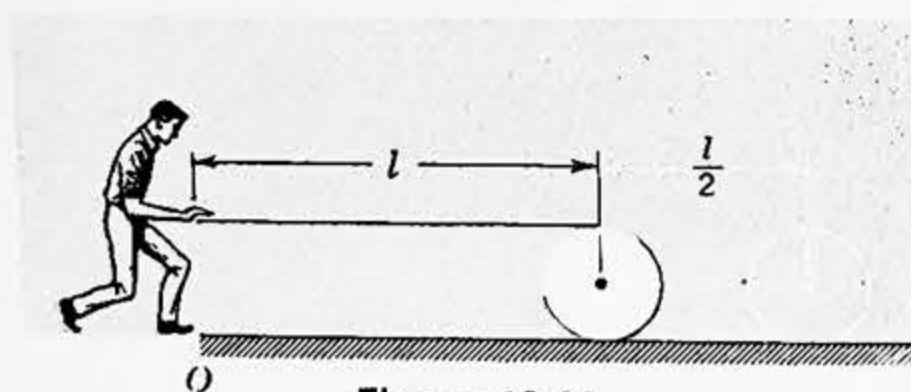


Figura 12-20.

gura 12-20, se rostogolește înainte pe pământ cu o distanță $l/2$, egală cu jumătate din lungimea scîndurii. Nu există alunecare în punctele de contact. Unde va fi scîndura în momentul final? Cu cît se deplasează omul?

13. O sferă omogenă de lemn se rostogolește în jos pe două plane înclinate diferite de aceeași înălțime dar de înclinări diferite. Va atinge ea baza planului cu aceeași viteză în fiecare caz? Va dura rostogolirea în jos mai mult timp pe un plan decît pe celălalt? Dacă este așa, atunci pe care din ele și de ce?

14. Două discuri grele sînt legate printr-o tijă scurtă de rază mult mai mică. Sistemul este așezat pe un plan înclinat îngust astfel încît discurile atîrnă de ambele părți ale planului și sistemul se rostogolește în jos pe tije fără alunecare (fig. 12-21). Lîngă baza planului înclinat discurile ating o masă orizontală și sistemul își continuă mișcarea cu viteza de translație mult mărită. Să se dea explicații îngrijite.

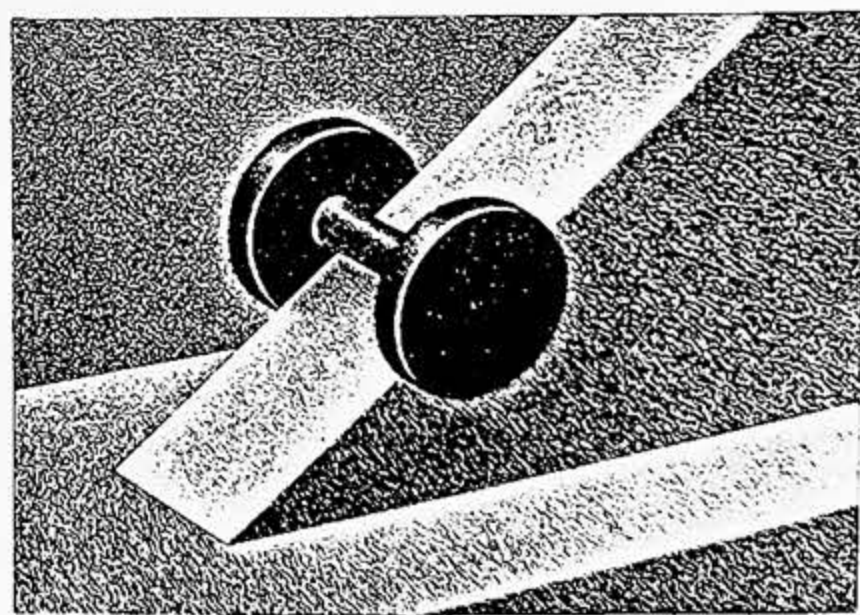


Figura 12-21.

15. Când un tăietor de lemne taie un copac, el face o tăietură pe fața îndreptată spre direcția în care vrea să cadă copacul. Să se explice de ce? Ar fi nepericulos să stăm imediat în spatele copacului de cealaltă parte a căderii?

16. Un yo-yo¹ se află în repaus pe o masă orizontală și este liber să se rostogolească (fig. 12-22). Dacă firul este tras de o forță orizontală cum este \vec{F}_1 , pe ce traiectorie se va rostogoli el? Ce se va întâmpla dacă se aplică forța \vec{F}_2 (linia sa de acțiune trece prin punctul de contact dintre yo-yo și masă)? Ce se întâmplă dacă firul este tras vertical cu forța \vec{F}_3 ?

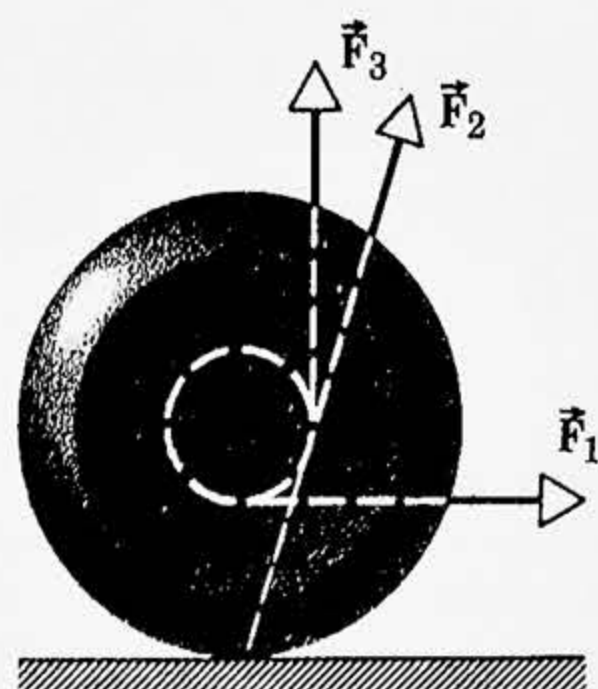


Figura 12-22.

17. Formulați cele trei legi ale mișcării, a lui Newton, în cuvinte adecvate pentru corpuri în rotație?

Probleme

1. (a) Dându-se $\vec{r} = ix + jy + kz$ și $\vec{F} = iF_x + jF_y + kF_z$, să se afle momentul $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. (b) Să se arate că dacă \vec{r} și \vec{F} se află într-un plan dat, atunci \vec{M} nu are nici o componentă în acel plan.

2. Dacă ni se dau r , p și θ , putem calcula momentul cinetic al unei particule din ecuația (12-4, a). Uneori însă ni se dau în schimb componentele (x, y, z) ale lui \vec{r} și (p_x, p_y, p_z) ale lui \vec{p} . (a) Să se arate că componentele lui \vec{l} de-a lungul axelor x, y, z sînt date de

$$l_x = yp_z - zp_y,$$

$$l_y = zp_x - xp_z,$$

$$l_z = xp_y - yp_x.$$

(b) Să se arate că dacă particula se mișcă numai în planul $x-y$ vectorul

moment cinetic rezultat are numai o componentă z .

3. (a) În exemplul 1 să se exprime \vec{F} și \vec{r} prin versori și să se calculeze \vec{M} . Să se facă același lucru în exemplul 3. (b) În exemplul 1 să se exprime \vec{p} și \vec{r} prin versori și să se calculeze \vec{l} .

4. Să se arate că momentul cinetic, în raport cu oricare punct, al unei particule individuale care se mișcă cu viteză constantă, rămîne constant în timpul mișcării.

5. Două particule, fiecare de masă m și viteză v , se mișcă în sensuri opuse de-a lungul unor linii paralele separate cu o distanță d . Să se arate că vectorul moment cinetic al acestui sistem de particule este același în jurul oricărui punct luat ca origine.

6. Să se arate în figura 12-23 linia de acțiune și brațul forței pentru fiecare forță din jurul originii O . Imaginați-vă că aceste forțe acționează

¹ O jucărie (N. red.).

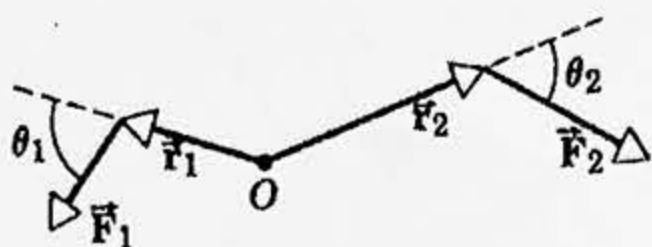


Figura 12-23.

asupra unui rigid care poate pivota în jurul lui O, toți vectorii arătați fiind conținuti în planul figurii, și aflați mărimea și direcția momentului resultant care acționează asupra corpului.

7. Plecând de la legea a treia a lui Newton, să se arate că momentul resultant al forțelor interne ale unui sistem de particule este nul.

8. Relația dintre momentul resultant extern și momentul cinetic al unui sistem de particule față de centrul de masă al sistemului. Fie \vec{r}_{cm} vectorul de poziție al centrului de masă C al unui sistem de particule față de originea O a unui reper inerțial și fie \vec{r}_i vectorul de poziție al particulei i de masă m_i față de centrul de masă C. Prin urmare, $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_i$ (vezi fig. 12-24). Să definim acum momentul cinetic total al sistemului de

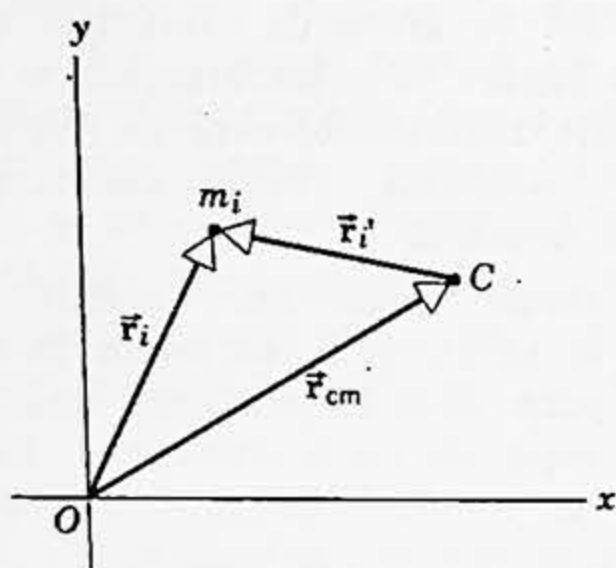


Figura 12-24.

particule în raport cu centrul de masă C prin $\vec{L} = \sum \vec{r}'_i \times \vec{p}_i$, unde $\vec{p}_i = m_i d\vec{r}'_i/dt$.

(a) Să se arate că $\vec{p}_i = m_i d\vec{r}_i/dt = -m_i d\vec{r}_{cm}/dt - \vec{p}_i - m_i \vec{v}_{cm}$. (b) Să se arate apoi că $d\vec{L}/dt = \sum \vec{r}_i \times d\vec{p}_i/dt$.

(c) Să se combine rezultatele de la punctele a și b și, folosind definiția centrului de masă și legea a treia a lui Newton, să se arate că $d\vec{L}/dt = \sum \vec{r}_i \times d\vec{p}_i/dt = -d\vec{L}/dt$, unde $\sum \vec{r}_i \times d\vec{p}_i/dt$ este suma tuturor momentelor externe care acționează asupra sistemului în raport cu centrul său de masă.

9. (a) Să se arate că suma momentelor de inerție ale unui corp plan în jurul oricăror două axe perpendiculare din planul corpului este egală cu momentul de inerție al corpului în jurul unei axe care trece prin punctul lor de intersecție și este perpendiculară pe plan. (b) Să se aplice aceasta unui disc circular pentru a găsi momentul său de inerție în jurul unui diametru ca axă.

10. (a) Să se arate că momentul de inerție al unei tijă subțiri de lungime l în jurul unei axe care trece prin centrul tijei și este perpendiculară pe lungimea sa, este $I = \frac{1}{12} Ml^2$. (Vezi tabela 12-1). (b) Să se folosească teorema axelor paralele (a lui Steiner) pentru a arăta că $I = \frac{1}{3} Ml^2$ când axa de rotație trece printr-un capăt al tijei perpendicular pe lungimea ei.

11. Să se arate că momentul de inerție al unei plăci rectangulare cu laturile a și b în jurul unei axe perpendiculare pe placă trecând prin centru este $\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$.

12. (a) Să se arate că un cilindru plin de masă M și rază R este echivalent cu un cerc subțire de masă M și rază $R/\sqrt{2}$, pentru rotația în jurul unei axe centrale. (b) Se numește rază de girație (sau de inerție) distanța radială până la axa dată în care

ar pu
fără a
ție în
girație

Aceast
valent

13

totală

de ine

unei a

pendic

Să pre

culă în

de 500

rotație

energia

afle vit

14.

tărește

lungul

încit ce

teză de

trebuie

15.

este o

(a) Care

tație?

$6,4 \cdot 10^3$

$6,0 \cdot 10^{24}$

această

de om.

furniza

cele 3,5

16. C

masă m

capăt. E

în jurul

prin poz

o viteză

ridica ce

poziției

neglijază

ului.

17. M

voltă o

cu o tura

ment der

ar putea fi concentrată masa corpului fără a schimba momentul său de inerție în jurul acelei axe. Fie k raza de rotație. Să se arate că

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Această formulă dă raza „cercului echivalent” în cazuri generale.

13. Molecula de oxigen are o masă totală de $5,30 \cdot 10^{-26}$ kg și un moment de inerție de $1,94 \cdot 10^{-46}$ kg·m² în jurul unei axe care trece prin centru perpendicular pe linia care unește atomii. Să presupunem că o astfel de moleculă într-un gaz are o viteză medie de 500 m/s și că energia sa cinetică de rotație este egală cu două treimi din energia sa cinetică de translație. Să se afle viteza sa unghiulară medie.

14. Un cerc cu raza de 3,0 m cântărește 150 kg. El se rostogolește de-a lungul unei podele orizontale astfel încât centrul său de masă are o viteză de 0,10 m/s. Cît lucrul mecanic trebuie efectuat pentru a-l opri?

15. Să presupunem că Pământul este o sferă de densitate uniformă. (a) Care este energia sa cinetică de rotație? Se va lua raza Pământului $6,4 \cdot 10^3$ km și masa Pământului $6,0 \cdot 10^{24}$ kg. (b) Să presupunem că această energie ar putea fi utilizată de om. Cît timp ar putea Pământul furniza o putere de 1 kW fiecareia din cele $3,5 \cdot 10^9$ persoane de pe Pământ?

16. O tijă subțire de lungime l și masă m este suspendată liber la un capăt. Ea este trasă lateral și rotită în jurul unei axe orizontale care trece prin poziția sa cea mai coborită cu o viteză unghiulară ω . Cu cît se va ridica centrul său de masă deasupra poziției sale celei mai coborâte? Se neglijează frecările și rezistența aerului.

17. Motorul unui automobil dezvoltă o putere de 100 CP rotindu-se cu o turație de 1800 rot/min. Ce moment dezvoltă el?

18. O roată de masă M și rază de rotație k (vezi problema 12) se rotește pe un ax orizontal fix care trece prin butucul ei. Butucul se freacă cu axul care are raza a , numai într-un singur punct, coeficientul de frecare fiind μ . Se imprimă roții o viteză unghiulară inițială dată ω_0 . Presupunând decelerarea uniformă, să se afle timpul scurs și numărul de rotații pînă la oprirea roții.

19. O tijă uniformă de oțel de lungime 1,20 m și masă 6,40 kg are prinsă la un capăt o bilă mică de masă 1,6 kg. Tijă este forțată să se rotească într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale trecînd prin mijlocul ei. La un moment dat se observă o turație de 39,0 rot/s. Datorită frecărilor din ax tija se oprește după 32,0 s. Să se calculeze, presupunînd un moment constant al forțelor de frecare: (a) accelerația unghiulară, (b) momentul de frînare exercitat de frecările axului, (c) lucrul mecanic total efectuat de frecările axului și (d) numărul rotațiilor efectuate în timpul celor 32,0 s. (e) Să presupunem acum că momentul forțelor de frecare n-ar fi fost constant. Care dintre mărimile de la punctele (a), (b), (c) sau (d), dacă este cazul, poate fi totuși calculată fără a necesita vreo informație suplimentară? Dacă o astfel de mărime există, să se dea valoarea sa.

20. Într-o mașină Atwood (fig. 5-9) un bloc are o masă de 500 g, iar celălalt o masă de 460 g. Scripetele care este montat pe lagăre orizontale fără frecări, are o rază de 5,0 cm. Lăsînd sistemul liber din repaus, blocul mai greu cade cu 75 cm în 5,0 s. Care este momentul de inerție al scripetelui?

21. Un bloc cu masa de 3,0 kg este împins pe un plan înclinat cu 30° față de orizontală. El este legat de un fir, paralel cu planul, care trece peste un scripete aflat la vîrfurile planului iar

de celălalt capăt al firului atârna un bloc cu masa de 9,0 kg. Scripetele cântărește 1,0 kg și are o rază de 10 cm. Coeficientul de frecare cinetică dintre bloc și plan este 0,10. Să se afle accelerația blocului atârnat și tensiunea din fir de fiecare parte a scripetelui. Se presupune că scripetele este un disc uniform.

22. Să presupunem că centrul de masă al unui vehicul se află la 0,70 m deasupra șoselei și distanța dintre roțile sale este de 1,20 m. (a) Dacă vehiculul virează de-a lungul unei curbe neîncălate, având o rază de 30 m, fără să derapeze, care este viteza maximă posibilă fără pericol de răsturnare? (b) Care trebuie să fie valoarea minimă a coeficientului de frecare la această viteză?

23. O cutie de 1,8 m înălțime, 1,2 m lățime și 0,90 m adâncime, conținând un frigider, este așezată vertical pe platforma unui camion. Masa frigiderului plus cea a cutiei este de 150 kg și se presupune că aceasta este distribuită uniform în tot volumul cutiei. Cutia este dată peste cap datorită unei accelerări a camionului. Care a fost valoarea minimă a acestei accelerații?

24. Să se arate că un cilindru va aluneca pe un plan înclinat de unghi θ dacă coeficientul de frecare statică dintre plan și cilindru este mai mic decât $\frac{1}{3} \tan \theta$.

25. O sferă se rostogolește în jos pe un plan înclinat de unghi 30° . La baza planului centrul de masă al sferei are o viteză de translație de 4,9 m/s. (a) Ce distanță va parcurge sfera pe plan? (b) Cât timp durează până ajunge sfera la baza planului?

26. Un corp de rază R și masă m se rostogolește orizontal fără alunecare cu o viteză v . El se rostogolește apoi pe un deal până la o înălțime maximă h . Dacă $h = 3v^2/4g$, (a) care este

momentul de inerție al corpului? (b) Ce fel de corp ar putea fi?

27. O sferă mică se rostogolește fără alunecare pe fața interioară a unei emisfere mari a cărei axă de simetrie este verticală. Ea pornește de la vârful emisferei din repaus. (a) Care este energia sa cinetică în punctul inferior? Ce fracțiune reprezintă energia sa de rotație? De translație? (b) Ce forță normală exercită sfera mică asupra emisferei în punctul inferior? Se va lua raza sferei mici r , raza emisferei R și masa sferei m .

28. O sferă omogenă pornește din repaus de la capătul superior al drumului arătat în figura 12-25 și se rostogolește fără alunecare până la capătul din dreapta. Dacă $H = 60$ m și $h = 20$ m și drumul este orizontal la extremitatea dreaptă, să se determine distanța de la punctul A spre dreapta unde bila va lovi linia orizontală de la bază.

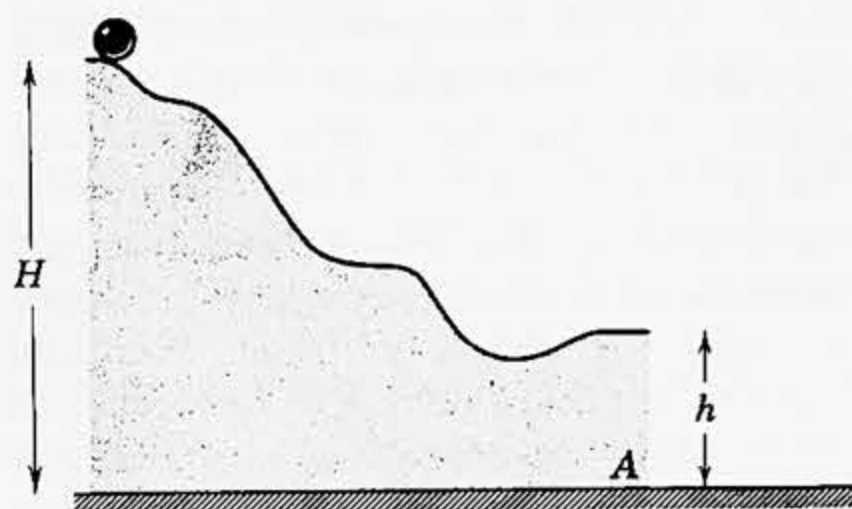


Figura 12-25.

29. O bilă solidă mică de masă m și rază r se rostogolește fără alunecare de-a lungul drumului curbat arătat în figura 12-26. Dacă ea pornește din repaus de la o înălțime egală cu $6R$ deasupra punctului inferior (R = raza părții circulare a drumului), care va fi componenta orizontală a forței care acționează asupra bilei în punctul Q. Se presupune $R \gg r$.

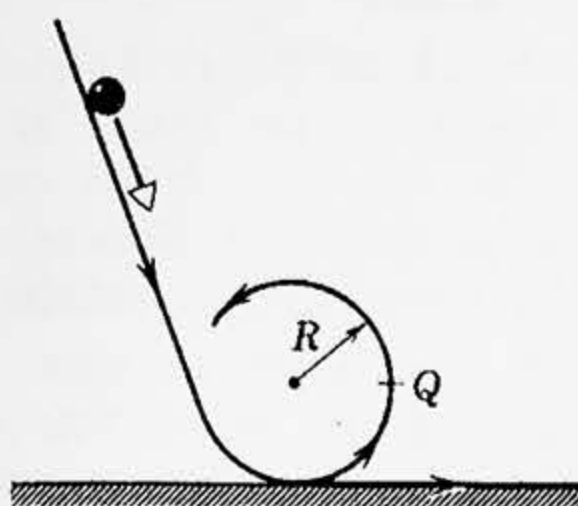


Figura 12-26.

30. Un yo-yo de masă M are un ax (butuc) de rază r peste care este înfășurat un fir. Un copil lasă yo-yo să se deruleze ținând capătul liber al firului într-o poziție fixă. Yo-yo accelerează în jos, atinge punctul inferior și urcă înapoi, firul înfășurându-se în jurul butucului în sensul opus. Să se afle tensiunea din fir în timpul coborârii și urcării, presupunând că r este suficient de mic pentru a considera că firul este vertical tot timpul. Se dă I momentul de inerție al lui yo-yo în jurul axei sale centrale.

31. Un disc uniform de masă M și rază R este așezat pe o față, inițial în repaus, pe o suprafață orizontală fără frecări. La periferia sa se aplică apoi tangențial o forță constantă \vec{F} cu ajutorul unui fir înfășurat pe marginea sa. Să se descrie mișcarea (de rotație și de translație) a discului.

32. Un cilindru de lungime 0,30 m și rază 3,0 cm cântărește 3,0 kg. Două fire sînt înfășurate în jurul cilindrului

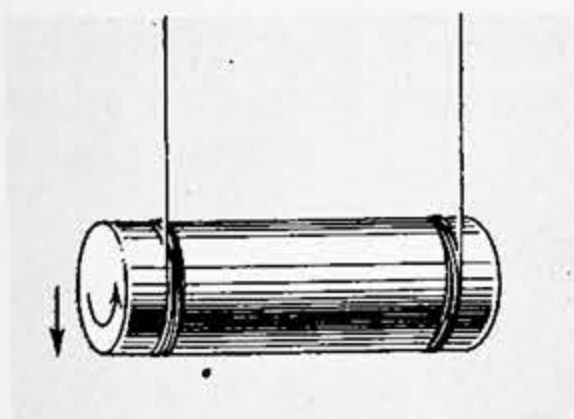


Figura 12-27.

lui, fiecare lîngă un capăt al cilindrului, iar capetele firelor sînt legate de niște cîrlige de pe tavan. Cilindrul este ținut orizontal, cele două fire fiind perfect verticale, și apoi lăsat liber (fig. 12-27). Să se afle tensiunea din fire cînd ele se derulează și să se determine accelerația liniară a cilindrului în timpul căderii sale.

33. Un fir este înfășurat în jurul unui cilindru de masă M și rază R . Firul este tras vertical în sus pentru a împiedica centrul de masă să cadă în timpul derulării firului de pe cilindru (a) Care este tensiunea din fir? (b) Ce lucru mecanic a fost efectuat asupra cilindrului pînă în momentul cînd el atinge o viteză unghiulară ω ? (c) Care este lungimea firului derulat în acest timp?

34. Un cilindru omogen cu masa de 25 kg și raza de 8,0 cm are o bandă subțire ușoară înfășurată în jurul său. Banda trece peste un scripete fix, neted și ușor, spre un corp cu masa de 5,0 kg (fig. 12-28). Să se afle tensiunea din bandă și accelerația liniară a cilindrului în sus pe planul înclinat, presupunînd că nu are loc alunecarea.

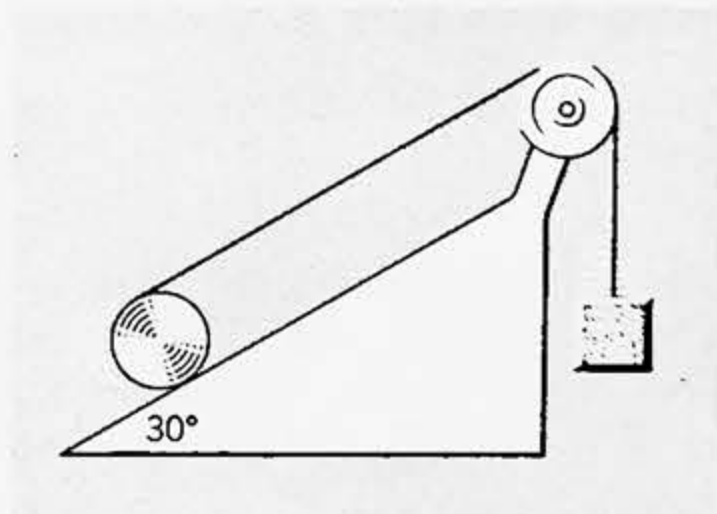


Figura 12-28.

35. Un tambur (tăvălug) sferic este tras de-a lungul unei alei astfel încît el alunecă cu o viteză v_0 inițial fără rostogolire. Să se arate că el se va rostogoli fără alunecare dacă viteza sa scade pînă la $\frac{5}{7}v_0$. Trecerea de la alu-

necarea pură la rostogolirea pură este treptată, astfel încît în decursul acestui interval are loc atît alunecarea cît și rostogolirea. (Indicație: alunecarea încetează atunci cînd viteza înainte a punctului inferior al sferei este nulă).

36. O bilă de biliard este lovită de un tac ca în figura 12-29. Linia de acțiune a impulsului aplicat este orizontală și trece prin centrul bilei. Viteza inițială \vec{v}_0 a bilei, raza sa R , masa sa M și coeficientul de frecare μ dintre bilă și masă sînt toate cunoscute. Ce distanță va parcurge bila

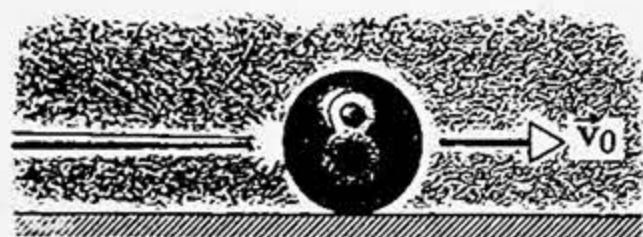


Figura 12-29.

pină în momentul cînd încetează să alunece pe masă?

37. O scară de 3,0 m lungime se află în repaus pe un perete și face un unghi de 60° cu podeaua orizontală. Dacă ea începe să alunece, unde se află axa instantanee de rotație?

38. Un horn înalt se rupe lîngă bază și cade. (a) Să se exprime accelerația radială și cea tangențială a vîrfului hornului în funcție de unghiul θ format de horn cu verticala. (b) Poate accelerația liniară rezultantă depăși pe g ? (c) Hornul se rupe în timpul căderii. Să se explice cum se poate produce aceasta.

39. O riglă este ținută vertical cu un capăt pe podea și apoi lăsată să cadă. Să se afle viteza celuilalt capăt în momentul cînd el lovește podeaua, presupunînd că capătul de pe podea nu aluneacă.

Dinamica rotației (II) și conservarea momentului cinetic

13-1. Introducere

În capitolul 12 am discutat dinamica mișcării de rotație a unui corp rigid în jurul unei axe care era fixă într-un sistem de referință inerțial. Am văzut că relația scalară $\mathcal{M} = I\alpha$ (ecuația 12-17), în care era considerată doar componenta momentului de-a lungul axei de rotație, era suficientă pentru a rezolva problemele dinamicii în acest caz particular.

În acest capitol vom considera întâi rotația unui rigid în jurul unei axe care *nu* este fixă într-un reper inerțial. Pentru a rezolva problemele dinamice în acest caz mai general, vom folosi relația vectorială generală pentru mișcarea de rotație și anume

$$\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt \quad (12-9)$$

în care am omis indicele lui $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$.

Vom considera mai târziu încă odată rotația particulelor și corpurilor rigide în jurul axelor fixe. De data aceasta însă vom examina în mod special acțiunea momentelor care au componente sub unghi drept față de axă. Punctul nostru de plecare va fi atunci nu ecuația (12-17) ($\mathcal{M} = I\alpha$), ci iarăși ecuația mai generală (12-9) ($\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$).

În sfârșit, vom considera sisteme asupra cărora nu acționează nici un moment extern și vom introduce principiul important al *conservării momentului cinetic*.

13-2. Sfirleaza (titirezul)

Figura 13-1, *a* arată un titirez care se învîrtește în jurul axei sale de simetrie, vârful său fiind fix în originea *O* a unui sistem de referință inerțial. Știm din experiență că axa unui asemenea titirez care se rotește

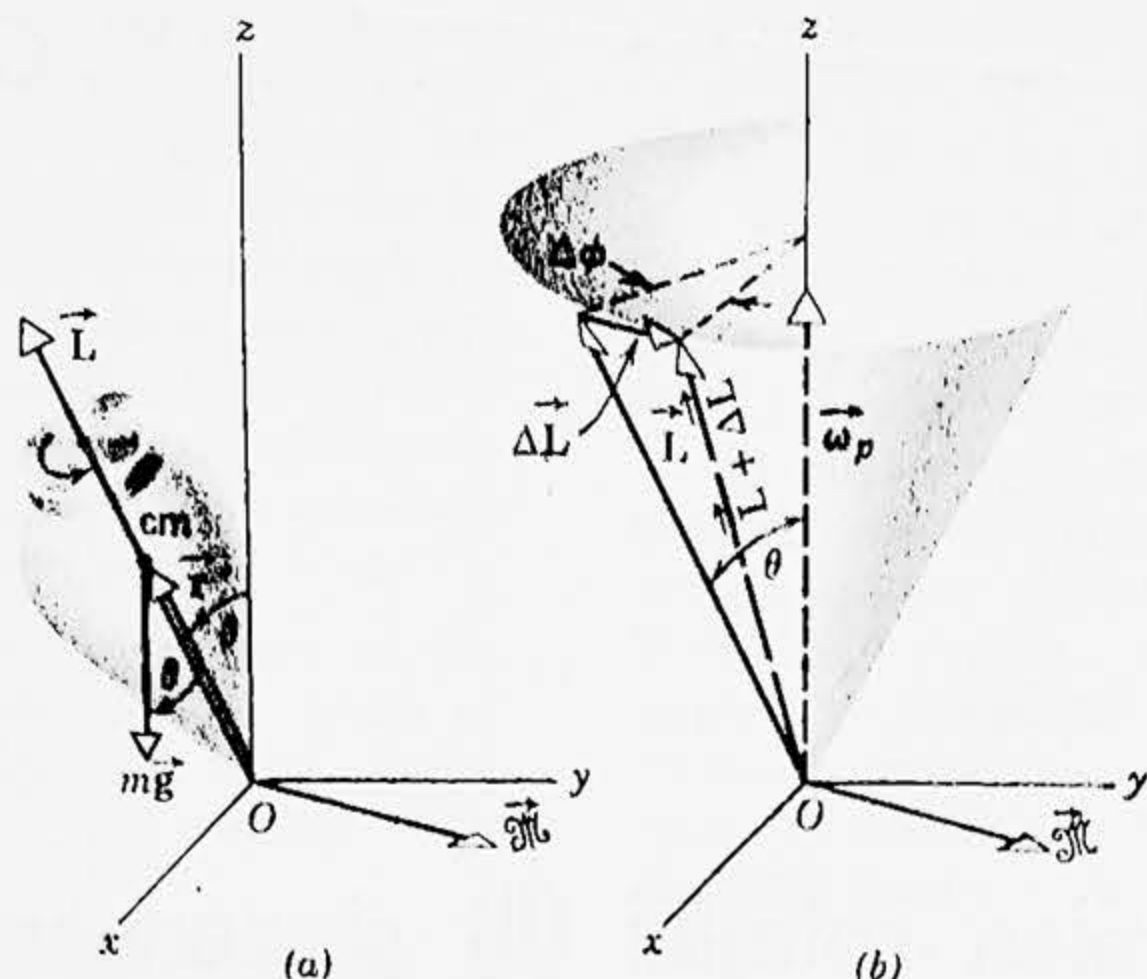


Figura 13-1. (a) Un titirez în mișcare de precesie. Se vede momentul cinetic \vec{L} , greutatea $m\vec{g}$ și vectorul \vec{r} dus în centrul de masă. (b) Conul măturat de axa titirezului în mișcarea de precesie. Viteza unghiulară de precesie este dirijată vertical în sus.

rapid se va mișca în jurul axei verticale descriind un con. Această mișcare se numește *precesie*. Să vedem dacă putem prezice această mișcare în baza principiilor mecanicii clasice și în particular dacă putem calcula pe ω_p , viteza unghiulară a mișcării de precesie.

În momentul arătat în figura 13-1, a, titirezul are o viteză unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul propriei sale axe. El are de asemenea un moment cinetic \vec{L} în jurul aceleiași axe¹, axa făcînd un unghi θ cu verticala.

Asupra titirezului acționează două forțe: o forță dirijată în sus și aplicată în punctul de pivotare O și atracția gravitațională, sau greutatea, care acționează în jos și este aplicată în centrul de masă. Forța dirijată în sus trece prin O și deci nu poate exercita nici un moment în jurul acestui punct, deoarece brațul ei este zero. Greutatea $m\vec{g}$, însă, exercită un moment în jurul lui O dat de

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{g},$$

unde \vec{r} este vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu pivotul.

¹ Vectorul $\vec{\omega}$ este totdeauna dirijat de-a lungul axei (fixe) de rotație a corpului ce se rotește, dar în general vectorul \vec{L} nu este dirijat de-a lungul acestei axe de rotație (vezi paragraful 13-3). Pentru corpurile care au o simetrie de rotație, atât $\vec{\omega}$ cît și \vec{L} sînt dirijate de-a lungul acestei axe, presupunînd că axa este fixă. Putem presupune că $\vec{\omega}$ și \vec{L} sînt coaxiali pentru titirezul în rotație din figura 13-1, a dacă $\omega \gg \omega_p$, adică, dacă viteza de precesie este relativ mică astfel încît axa, deși nu este fixă, își schimbă direcția foarte încet.

Această ecuație cere ca $\vec{\mathcal{M}}$ să fie perpendicular pe planul format de \vec{r} și $m\vec{g}$; aplicarea regulii mîinii drepte arată că direcția sa este cea arătată în figura 13-1, a. Observăm că $\vec{\mathcal{M}}$, la fel ca \vec{L} și \vec{r} se rotește în jurul axei cu viteza unghiulară ω_p în timpul precisiei titirezului.

Atunci cînd un moment acționează asupra unui rigid, acesta schimbă momentul cinetic al corpului, conform relației fundamentale (ecuația 12-4)

$$\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt. \quad (\text{ec. 12-9})$$

Fiind un vector, \vec{L} poate varia ca modul, ca direcție sau ca ambele. Ecuația (12-9) arată că variația lui \vec{L} (adică $d\vec{L}$) trebuie să fie dirijată în direcția lui $\vec{\mathcal{M}}$. Figura 13-1, a ne arată că $\vec{\mathcal{M}}$ este dirijat sub un unghi drept față de \vec{L} ; de aceea variația lui \vec{L} produsă de acțiunea momentului trebuie să fie de asemenea sub un unghi drept față de \vec{L} .

Pentru a examina situația cantitativ, să urmărim titirezul în intervalul de timp Δt . În timpul acestui interval variația lui \vec{L} ,

$$\Delta\vec{L} = \vec{\mathcal{M}}\Delta t$$

este prezisă de ecuația (12-9) (dacă Δt este suficient de mic). Această variație ΔL , care la fel ca $\vec{\mathcal{M}}$, este sub un unghi drept față de \vec{L} , este arătată în figura 13-1, b, unde vedem conul descris de axa titirezului, care efectuează precesia; titirezul el însuși este omis aici pentru claritate.

Momentul cinetic al titirezului la sfîrșitul intervalului de timp Δt este suma vectorială dintre L și $\Delta\vec{L}$. Deoarece $\Delta\vec{L}$ este perpendicular pe \vec{L} și este presupus foarte mic în modul în comparație cu \vec{L} , noul vector moment cinetic are același modul ca cel vechi dar o direcție diferită. Prin urmare, extremitatea vectorului moment cinetic se învîrtește pe un cerc orizontal în timpul precesiei (fig. 13-1, b). Deoarece acest vector se află permanent de-a lungul axei de rotație a titirezului, am explicat calitativ precesia titirezului.

Viteza unghiulară de precesie ω_p rezultă din figura 13-1, b în care

$$\omega_p = \Delta\Phi/\Delta t.$$

Dar, deoarece $\Delta L \ll L$,

$$\Delta\Phi \cong \Delta L/L \sin \theta = \mathcal{M} \Delta t/L \sin \theta$$

sau

$$\omega_p = \Delta\Phi/\Delta t = \mathcal{M}/L \sin \theta. \quad (13-1)$$

Deoarece (fig. 13-1, a)

$$\mathcal{M} = rmg \sin (180^\circ - \theta) = rmg \sin \theta$$

avem în final

$$\omega_p = mgr/L. \quad (13-2, a)$$

Observăm că viteza unghiulară de precesie este independentă de θ și variază invers proporțional cu modulul momentului cinetic. Dacă momentul cinetic este mare, viteza unghiulară de precesie va fi mică.

Putem exprima ecuația (13-2, a) într-o formă vectorială. Începem prin a retranscrie ecuația (13-1) astfel

$$\mathcal{M} = \omega_p L \sin \theta.$$

Dar $\vec{\omega}_p$ este un vector dirijat vertical în sus în figura 13-1, b și θ din acea figură este unghiul dintre $\vec{\omega}_p$ și \vec{L} . Recunoaștem în membrul drept al ecuației precedente modulul produsului vectorial $\vec{\omega}_p \times \vec{L}$ și vedem că această ecuație dă modulul lui \mathcal{M} din relația vectorială

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}. \quad (13-2, b)$$

Aceasta este expresia vectorială generală care leagă viteza unghiulară de precesie cu \mathcal{M} și cu \vec{L} . Studentul trebuie să arate că ecuația (13-2, a) poate fi dedusă ușor din prima. Aplicînd regula mîinii drepte figurii 13-1, b, vedem că ordinea factorilor din membrul drept al ecuației (13-2, b) este corectă, adică $\vec{\omega}_p \times \vec{L}$ dă atît sensul corect cît și modulul corect pentru \mathcal{M} .

Exemplul 1. Un student ține o roată de bicicletă cu janta încărcată cu plumb, care se rotește cu o viteză unghiulară relativ mare ω , cu axul său orizontal ca în figura 13-2, a. Profesorul de fizică îi cere să incline rapid axul (într-un timp Δt) astfel încît axul să devină dirijat sub un unghi mic $\Delta\theta$ deasupra orizontalei ca în figura 13-2, b. El îi cere de asemenea studentului să mențină tot timpul axul într-un plan vertical. Ce moment trebuie să exercite studentul asupra axului dacă vrea să respecte aceste instrucțiuni?

Studentul își va da seama foarte bine de eforturile din mîna sa, care trebuie să exercite un moment asupra axului, atunci cînd îl ține într-o poziție orizontală. Acest moment, care este necesar pentru a contracara efectul de răsturnare datorat

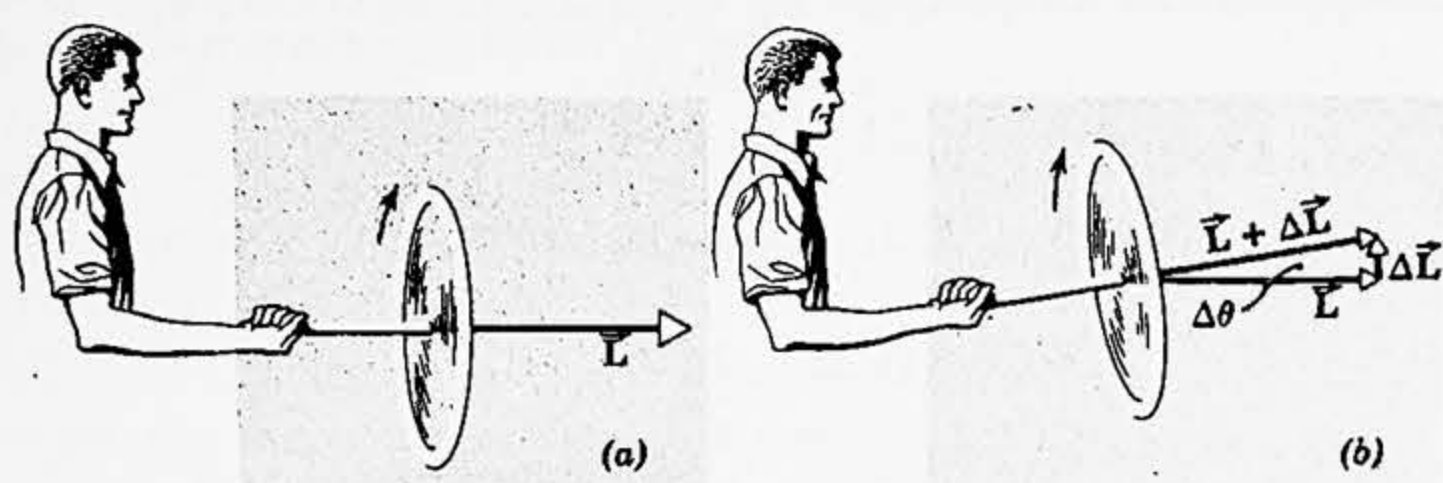


Figura 13-2. Un student ține de axul unei roți de bicicletă grea, încărcată cu plumb pe obadă, care se învîrtește rapid, și inclină axul în sus față de orizontală cu un unghi mic.

forței de gravitație ce acționează în centrul de masă, este dirijat de-a lungul unei axe orizontale care este perpendiculară pe planul figurii 13-2, înspre cititor. Studentul trebuie să furnizeze acest moment indiferent dacă roata se rotește sau nu.

Dacă acum studentul înclină axul roții (în rotație) în sus, va constata că roata va devia spre dreapta uneori chiar violent, astfel încât el nu va reuși să mențină axul într-un plan vertical. Dacă el trebuie totuși să mențină axul în acest plan în timp ce îl înclină, el trebuie să exercite un moment asupra axului (în jurul unei axe aproape verticale) tinzând să-l rotească spre stînga pentru a contracara acest efect. Să vedem de ce este așa?

Înclinînd axul, schimbăm momentul cinetic \vec{L} în timpul Δt , cu o cantitate $\Delta \vec{L}$, așa cum se arată în figura 13-2, b. În acest interval de timp studentul trebuie să exercite un moment mediu asupra roții dat de ecuația (12-9)

$$\vec{M} = \Delta \vec{L} / \Delta t;$$

modulul lui \vec{M} este dat de

$$\overline{M} = \Delta L / \Delta t = L \sin \Delta \theta / \Delta t.$$

Acest moment mediu \vec{M} are aceeași direcție ca și $\Delta \vec{L}$, adică el este aproximativ dirijat vertical în sus dacă unghiul $\Delta \theta$ din figura 13-2, b nu este prea mare. Putem vedea că un astfel de moment va tinde să rotească axul spre stînga dacă roata nu s-ar roti. Acest moment *trebuie* să fie furnizat de către student dacă acesta înclină axul roții în sus; dacă nu reușește să facă astfel, axul nu va rămîne într-un plan vertical.

Studentul trebuie să facă mai multe experiențe cu o astfel de roată în rotație rapidă, pentru a studia relația dintre vectorii \vec{L} , $\Delta \vec{L}$ și \vec{M} . Dacă o astfel de roată nu este disponibilă el poate face experiențe cu un giroscop jucărie, deși aceasta nu-i dă o apreciere cinestetică a relației $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ așa cum o dă o roată încărcată cu plumb la jantă, care se rotește rapid.

Există o analogie între experiența din figura 13-2 și o altă experiență în care i se cere studentului să învîrtească o greutate mare (legată de o sfoară rezistentă) pe un cerc orizontal cu viteză constantă. În această ultimă experiență studentul trebuie să schimbe, într-un timp Δt , direcția impulsului \vec{P} al greutății, lăsînd modulul său neschimbat. Pentru a face aceasta, el trebuie să aplice o forță dirijată sub unghi drept față de \vec{P} (în direcția lui $\Delta \vec{P}$), adică radial către centru. În experiența din figura 13-2 studentul trebuie să schimbe în timpul Δt direcția *momentului cinetic* \vec{L} al roții, lăsînd modulul său neschimbat. Pentru a face aceasta el trebuie să aplice un *moment* dirijat sub unghi drept față de \vec{L} (în direcția lui $\Delta \vec{L}$) adică vertical în sus¹.

¹ Această analogie este studiată de A. E. Benfield în *American Journal of Physics*, septembrie 1958. Vezi de asemenea problema 3.

13-3. Momentul cinetic și viteza unghiulară

În acest paragraf ne propunem să examinăm relația dintre momentul cinetic și viteza unghiulară pentru particule și corpuri rigide care se rotesc în jurul unei axe fixe într-un sistem de referință inerțial.

Mai întâi considerăm o particulă individuală de masă m care se mișcă cu viteza v pe un cerc în jurul axei z a unui reper inerțial, ca în figura 13-3. Viteza ei unghiulară $\vec{\omega}$ este de-a lungul axei z cu sensul în sus. Momentul ei cinetic \vec{l} în raport cu originea O a sistemului de referință este dat de ecuația (12-3) sau

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p},$$

unde \vec{r} și $\vec{p} (=m\vec{v})$ sînt arătați în figură. Vectorul \vec{l} este perpendicular pe planul format de \vec{r} și \vec{p} , ceea ce înseamnă că \vec{l} nu este paralel cu $\vec{\omega}$. Observăm că \vec{l} are o componentă (vectorială) \vec{l}_z care este paralelă cu $\vec{\omega}$,

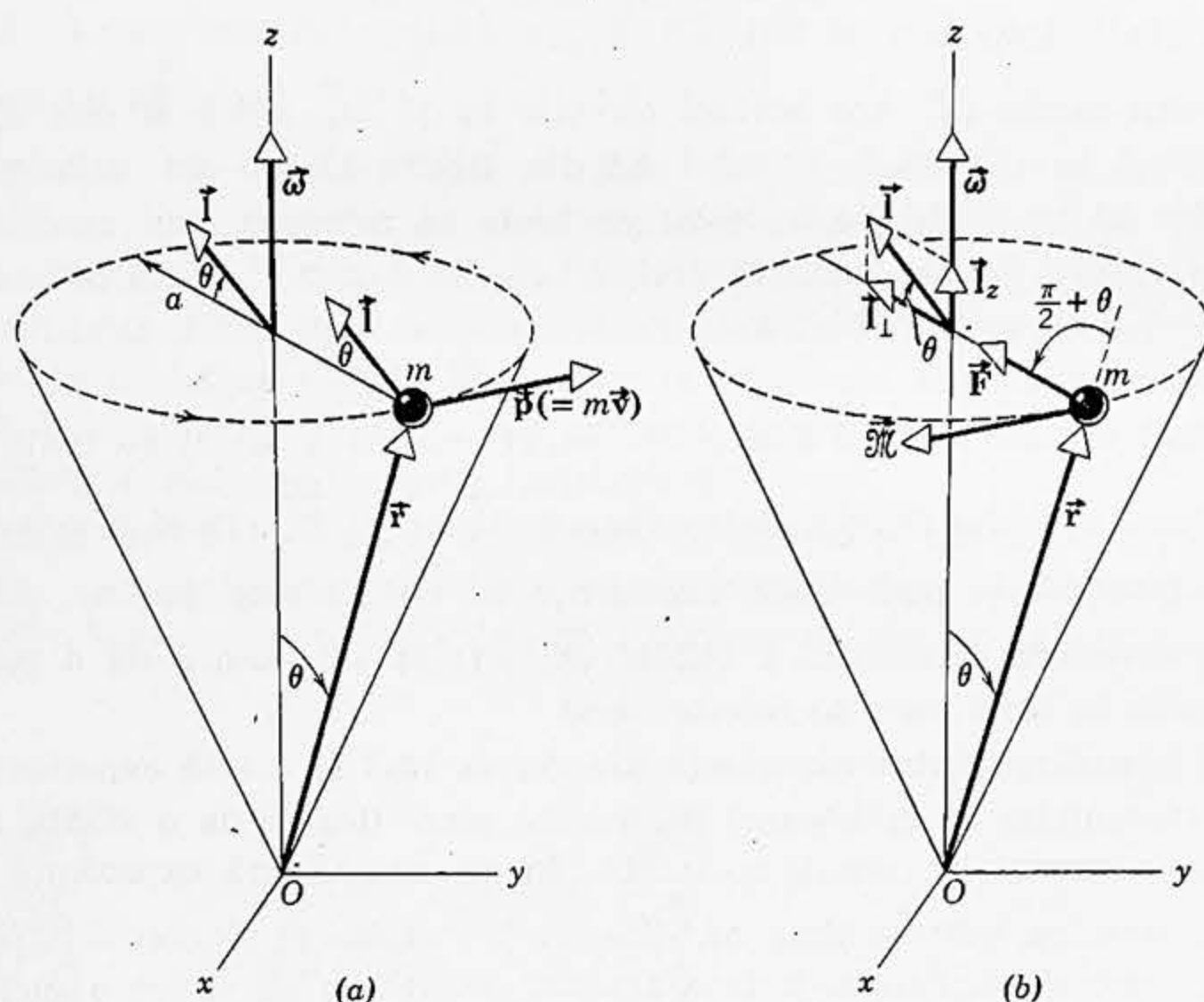


Figura 13-3. (a) O particulă de masă m care se rotește cu viteza v pe un cerc de rază a în jurul axei z a unui sistem de referință inerțial. Este arătat momentul cinetic față de O , $\vec{l} (= \vec{r} \times \vec{p})$, pentru conveniență acest vector este de asemenea arătat translatat în centrul cercului. (b) Aceeași configurație care arată pe \vec{l} și componentele sale, precum și forța centripetă \vec{F} și momentul \vec{M} față de O .

dar el mai are o altă componentă (vectorială) \vec{l}_\perp care este sub un unghi drept față de $\vec{\omega}$. Observăm de asemenea că dacă alegem originea noastră în planul în care se rotește particula, atunci \vec{l} este paralel cu $\vec{\omega}$; adesea însă nu este convenabil să facem această alegere.

Rezultatul probabil neașteptat că \vec{l} și $\vec{\omega}$ nu sînt paraleli în acest caz simplu îl poate deruta pe student. Totuși, acest rezultat este cu totul în acord cu relația generală $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt$ pentru un moment care acționează asupra unei particule individuale. Vectorul \vec{l} variază în timp odată cu mișcarea particulei, variația fiind în întregime ca direcție și nu ca modul, și exact aceeași ca cea pentru titirezul din paragraful precedent, care a efectuat mișcarea de precesie. Deoarece membrul drept al relației precedente ($=d\vec{l}/dt$) nu este nul, membrul stîng ($=\vec{\mathcal{M}}$) trebuie să fie și el diferit de zero; adică asupra particulei trebuie să acționeze un moment în raport cu originea O .

Există în adevăr un astfel de moment. În adevăr, dacă particula se mișcă pe un cerc atunci asupra ei trebuie să acționeze o forță centripetă \vec{F} , ca în figura 13-3, b. Ne putem imagina că \vec{F} este furnizată de tensiunea dintr-un fir ușor care leagă particula în rotație de axa z . Momentul în raport cu O este furnizat de \vec{F} și dat de ecuația (12-1)

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Momentul $\vec{\mathcal{M}}$ este tangent la cerc (perpendicular pe planul format de \vec{r} și \vec{F}) și este în sensul arătat în figura 13-3, b, după cum studentul poate verifica cu ajutorul regulii mîinii drepte.

Exemplul 2. Să se arate că particula mobilă din figura 13-3 satisface cantitativ relația $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{l}/dt$.

Demonstrația urmează aceleași direcții ca cea de la paragraful 13-2 pentru titirezul în rotație, deoarece, din punct de vedere vectorial, cele două probleme sînt identice. În fiecare caz avem precesia unui vector moment cinetic (\vec{L} pentru titirez și \vec{l} pentru particula din fig. 13-3) în jurul unei axe verticale, cu o viteză pe care am notat-o cu ω_p în cazul titirezului și cu ω în cazul particulei. În fiecare caz avem un moment dirijat permanent sub un unghi drept față de planul format de \vec{L} (sau \vec{l}) și $\vec{\omega}_p$ (sau $\vec{\omega}$).

În modul acesta, deoarece cele două probleme sînt formal identice, este suficient să cercetăm dacă particula în rotație din figura 13-3 verifică ecuația vectorială pentru precesie ($\vec{\mathcal{M}} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$; ecuația 13-2, b). Această ecuație a fost dedusă pentru titirezul aflat în mișcare de precesie direct din — și este direct echivalentă cu — relația $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$ (ecuația 12-9). Putem scrie relația $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$ prin valorile absolute astfel:

$$\mathcal{M} = \omega l \sin(90^\circ - \theta) = \omega l \cos \theta, \quad (13-3)$$

în care am substituit ω în locul lui ω_p și l în locul lui L și am observat că în figura 13-3, a unghiul dintre ω și l este $90^\circ - \theta$. Folosind din nou notațiile din figura 13-3, a, putem scrie pentru \mathcal{M} și l :

$$\mathcal{M} = Fr \sin(90^\circ + \theta) = m \omega^2 (r \sin \theta) \cdot r \cos \theta$$

și

$$l = rp \sin 90^\circ = r \cdot mv = rm \omega (r \sin \theta),$$

în care $r \sin \theta$ este raza a a cercului pe care se mișcă particula, $90^\circ + \theta$ este unghiul dintre \vec{r} și \vec{F} iar 90° este unghiul dintre \vec{r} și \vec{p} . Substituind aceste două expresii în ecuația (13-3), obținem

$$m \omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta = \omega (m \omega r^2 \sin \theta) \cdot \cos \theta,$$

care este o identitate. Din punctul de vedere al *modulilor*, noi am verificat relația noastră. Studentul trebuie să se refere la figura 13-3 și să verifice că direcția lui $\vec{\mathcal{M}}$ este cea a lui $d\vec{l}/dt$ (ecuația 12-7) sau a lui $\vec{\omega} \times \vec{l}$ (ecuația 13-2, b).

Să cercetăm acum relația dintre \vec{l}_z și $\vec{\omega}$ pentru particula din figura 13-3. Din exemplul 2 avem

$$l = mr^2 \omega \sin \theta.$$

Din figura 13-3, b vedem că

$$l_z = l \sin \theta = m \omega r^2 \sin^2 \theta$$

Dar $r \sin \theta = a$, raza cercului pe care se mișcă particula. Aceasta duce la

$$l_z = ma^2 \omega, \quad (13-4)$$

în care ma^2 este momentul de inerție I al particulei față de axa z . În modul acesta

$$l_z = I \omega, \quad (13-5)$$

care trebuie comparat cu ecuația (12-18) ($L = I \omega$) pentru rotația unui rigid în jurul unei axe fixe. Observăm că relația vectorială $\vec{l} = I \vec{\omega}$ nu este corectă în acest caz deoarece \vec{l} și $\vec{\omega}$ nu sînt dirijați în aceeași direcție. În schimb, \vec{l}_z și $\vec{\omega}$ sînt dirijați în aceeași direcție și sens, astfel încît am putut scrie ecuația (13-5) sub forma vectorială astfel $\vec{l}_z = I \vec{\omega}$.

Să adăugăm acum o altă particulă de masă m la sistemul din figura 13-3. În particular să adăugăm această particulă pe aceeași orbită, mișcîndu-se cu aceeași viteză, dar mereu în punctul diametral opus, de cealaltă parte a axei de rotație. Momentul cinetic \vec{l}_2 în raport cu O pentru această a doua particulă va avea același modul ca și \vec{l}_1 pentru prima particulă și va forma același unghi ($90^\circ - \theta$) cu axa z , dar va avea o orientare diferită față de această axă. După cum arată figura 13-4, a, \vec{l}_2 este așezat într-un plan format de $\vec{\omega}$ și \vec{l}_1 , dar va fi de cealaltă parte a axei z față de \vec{l}_1 . Vectorii \vec{l}_1 și \vec{l}_2 cuprind între ei un unghi de $180^\circ - 2\theta$.

Momentul cinetic total \vec{L} al sistemului de două particule este suma vectorială a momentelor cinetice ale celor două particule separate, adică

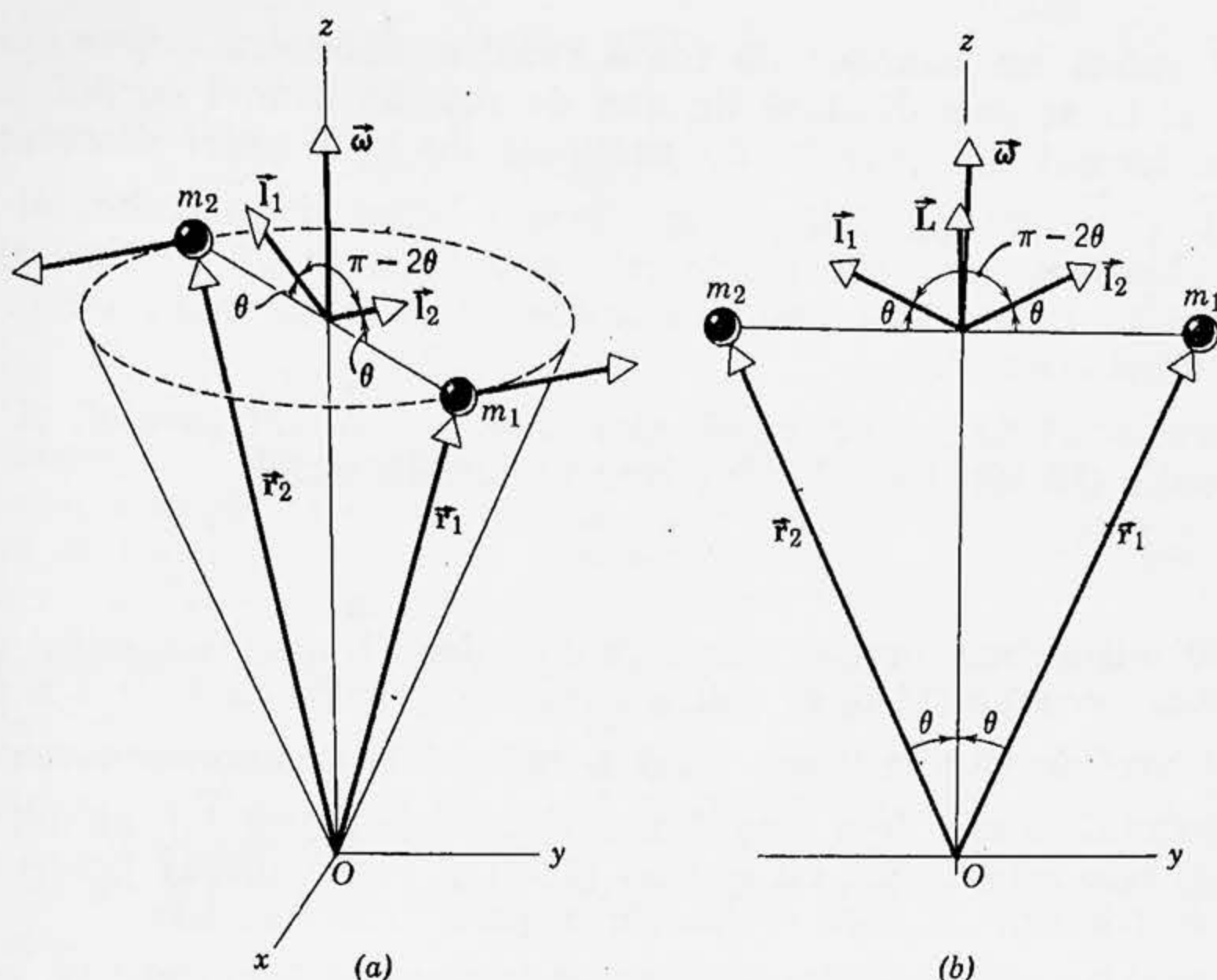


Figura 13-4. (a) Două particule de masă m care se rotesc ca în figura 13-3 dar păstrează poziții diametral opuse. (b) O secțiune transversală prin cele două particule care arată că momentul cinetic total \vec{L} ($=\vec{l}_1+\vec{l}_2$) pentru sistemul format din cele două particule este îndreptat de-a lungul axei de rotație în același sens ca $\vec{\omega}$.

$\vec{L}=\vec{l}_1+\vec{l}_2$. Vectorul rezultat \vec{L} , după cum arată figura 13-4, b, este dirijat de-a lungul axei z (în direcția lui $\vec{\omega}$) și este constant în modul. Observăm că această afirmație este adevărată indiferent unde este localizată originea O pe axa de rotație.

Faptul că $\vec{L}=\text{const}$ (în mărime și direcție), pentru acest sistem de două particule, înseamnă că $d\vec{L}/dt=0$ care, la rîndul său (ecuația 12-9), înseamnă $\vec{M}=0$ pentru acest sistem. Studentul trebuie să se convingă (fig. 13-3, b va fi utilă) că acesta este în adevăr cazul, momentele pentru cele două particule în raport cu O fiind egale în modul dar opuse ca sens, astfel încît momentul care acționează asupra sistemului format din cele două particule este zero.

Faptul că $\vec{\omega}$ și \vec{L} sînt dirijați în aceeași direcție în această problemă, dar nu ca în cazul unei singure particule individuale, se explică prin aceea că în sistemul de două particule, particulele au aceeași masă și sînt în poziții diametral opuse la aceeași distanță de axa de rotație.

Putem extinde acum sistemul nostru pînă la un corp rigid, format din mai multe particule. Dacă corpul este simetric față de axa de rotație, prin care înțelegem faptul că pentru fiecare element de masă al

corpului există un element de masă identic diametral opus primului element și la aceeași distanță de axa de rotație, atunci corpul poate fi privit ca format din perechi de particule de tipul celei discutate. Deoarece \vec{L} și $\vec{\omega}$ sînt paraleli pentru fiecare astfel de pereche, ei vor fi paraleli și pentru corpurile rigide care posedă acest tip de simetrie. Observăm că în tabela 12-1 toate sistemele cu excepția celor de la f și j verifică acest criteriu.

Pentru astfel de corpuri rigide simetrice \vec{L} și $\vec{\omega}$ sînt paraleli și putem scrie ecuația (12-18) ($L=I\omega$) sub forma vectorială astfel:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (13-6)$$

Studentul nu trebuie însă să uite faptul că dacă \vec{L} este momentul cinetic total, atunci ecuația (13-6) se aplică numai corpurilor care au o simetrie¹ în jurul axei de rotație (fixe). Dacă \vec{L} reprezintă componenta vectorială a momentului cinetic de-a lungul axei de rotație (adică \vec{L}_z), atunci ecuația (13-6) este echivalentă cu ecuația (12-8) și este valabilă pentru orice rigid, simetric sau nu, care se rotește în jurul unei axe fixe.

Exemplul 3. Să se rezolve problema de la exemplul 5, capitolul 12, aplicînd direct ecuația (12-9) ($\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$).

Sistemul din figura 12-12, constînd dintr-o roată M și un corp cu masa m , este supus la două forțe externe, atracția în jos a gravitației $m\vec{g}$ acționînd asupra corpului m și forța dirijată în sus exercitată de lagărele axului cilindrului, pe care îl luăm ca origine. Tensiunea din fir este o forță internă și nu acționează dinspre exterior asupra sistemului (roată+greutate). Numai prima dintre aceste forțe externe exercită un moment în raport cu originea și modulul lui este $(mg)R$.

Momentul cinetic al sistemului în jurul originii în fiecare moment este

$$L = I\omega + (mv)R,$$

în care $I\omega$ este momentul cinetic al discului (simetric) și $(mv)R$ este momentul cinetic ($= \text{impuls} \times \text{brațul forței}$) al masei care cade, în raport cu originea. Aceste două contribuții la L sînt dirijate în același sens, și anume perpendicular pe planul figurii 12-12 spre cititor.

Aplicînd $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$ (sub formă scalară), obținem

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt} (I\omega + mvR) = \\ &= I(d\omega/dt) + mR(dv/dt) = I\alpha + mRa. \end{aligned}$$

¹ Noi am simplificat prea mult condiția de simetrie. Oricare corp rigid, oricît de neregulată ar fi forma sa, posedă trei axe perpendiculare care trec prin centrul său de masă, în jurul fiecăreia din ele \vec{L} și $\vec{\omega}$ avînd aceeași direcție și sens și fiind legați prin $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Aceste trei axe se numesc *axe principale* (centrale). Axa unei figuri de revoluție este totdeauna o axă principală, ca și axele perpendiculare pe aceasta care trec prin centrul de masă. În general însă, \vec{L} și $\vec{\omega}$ nu sînt paraleli pentru axele care nu sînt axe principale. Vezi Arnold Sommerfeld, *Mecanica*, Capitolul IV, Academic Press. New York (1964 ediția cartonată).

Deoarece $a = a R$ și $I = \frac{1}{2} MR^2$, aceasta se reduce la

$$mgR = \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) (a/R) + mRa$$

sau

$$a = \frac{2mg}{M+2m}$$

Exemplul 4. Un exemplu simplu de rigid nesimetric este o halteră a cărei tijă face un unghi θ cu axa fixă de rotație, ce trece prin centrul său de masă. Tijă se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul acestei axe, vectorul $\vec{\omega}$ fiind deci dirijat de-a lungul acestei axe, așa cum se arată în figura 13-5. Experiența ne arată că un astfel de sistem este „neechilibrat” („strîmb”) sau „dezaxat” („descentrat”) și dacă n-ar fi fixat solid de axul vertical lângă C el s-ar desprinde de ax la viteze unghiulare mari. El ar tinde să se răsucescă pînă cînd unghiul ar deveni 90° și în această poziție limită sistemul ar deveni simetric față de axa de rotație.

(a) Să se arate calitativ că în cazul nesimetric arătat în figura 13-5, \vec{L} și $\vec{\omega}$ nu sînt paraleli.

Fiecare particulă de masă m are un moment cinetic în raport cu C dat de $\vec{r} \times \vec{p}$ pentru acea particulă. În momentul arătat în figură, particula superioară se mișcă spre planul figurii perpendicular pe acesta, iar particula inferioară se mișcă perpendicular pe planul figurii spre cititor. Vectorii moment ai celor două particule sînt deci egali în modul dar de sens opus și la fel sînt vectorii lor de poziție față de C. Prin urmare, aplicînd regula mîinii drepte pentru $\vec{r} \times \vec{p}$, găsim că \vec{l} este același pentru fiecare particulă și că suma lor, vectorul moment cinetic total \vec{L} al halterei, este sub unghi drept față de tijă în planul paginii, după cum se arată în această figură. Prin urmare, \vec{L} și $\vec{\omega}$ nu sînt paraleli în acest moment. Este clar că atunci cînd haltera se rotește, vectorul moment cinetic, deși constant în modul, se rotește în jurul axei fixe de rotație.

(b) Faptul că \vec{L} și $\vec{\omega}$ nu sînt paraleli este în deplină concordanță cu relația fundamentală $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$. Am văzut de două ori mai înainte (vezi paragraful 13-2 și exemplul 1) că vectorul moment cinetic de modul constant care se rotește în jurul unei axe fixe trebuie asociat cu un moment $\vec{\omega}$ dirijat sub unghi drept față de planul format de \vec{L} și $\vec{\omega}$. În momentul arătat în figura 13-5 acest plan este planul figurii. Există un astfel de moment în această problemă și, dacă există, de unde provine el?

Există în adevăr un astfel de moment și el provine din forțele neechilibrate centrifuge exercitate de lagăre asupra axului și transmise de ax tijei halterei. În momentul arătat în figură capătul inferior al halterei tinde să se depărteze spre dreapta. Axul va fi tras spre dreapta, împingînd lagărul superior, care la rîndul său exercită o forță \vec{F} asupra axului, dirijată spre stînga. Analog, capătul inferior

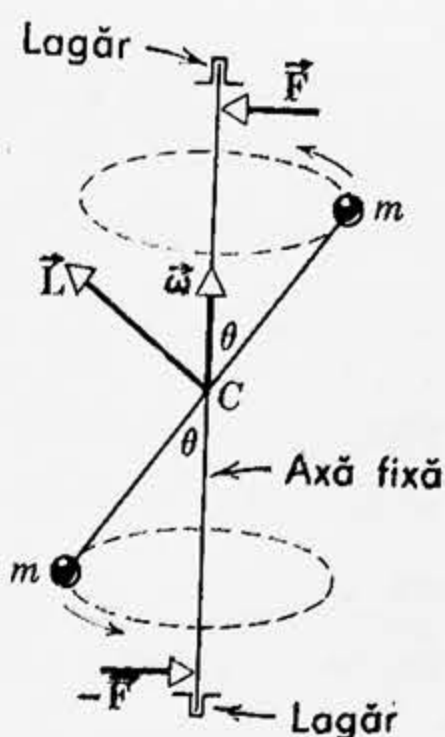


Figura 13-5.

al halterei tinde să se depărteze spre stînga. Axul va fi împins spre stînga spre lagărul inferior, care la rîndul său exercită o forță $-\vec{F}$ asupra axului, dirijată spre dreapta. Momentul \vec{M} în jurul lui C, ca rezultat al acestor forțe, este dirijat perpendicular pe figură spre cititor, sub un unghi drept față de planul format de \vec{L} și $\vec{\omega}$ și în sens corect pentru a explica mișcarea de rotație a lui \vec{L} (studentul trebuie să verifice aceasta).

Forțele \vec{F} și $-\vec{F}$ se află în planul figurii 13-5 în momentul arătat. Cînd haltera se rotește, aceste forțe și deci momentul \vec{M} , se rotesc cu ea astfel încît \vec{M} , rămîne permanent perpendicular pe planul format de $\vec{\omega}$ și \vec{L} (compară cu fig. 13-1). Forțele de rotație \vec{F} și $-\vec{F}$ produc o „clătinare” („bătăi”) în lagărul superior și cel inferior. Lagărele și suportii lor trebuie făcuți suficient de rezistenți pentru a rezista la aceste forțe. Pentru un corp simetric aflat în rotație nu există astfel de „zgîlțituri” în lagăre și axul se rotește liniștit.

Smuciturile lagărelor și tensiunile interne pot ridica probleme practice serioase atunci cînd obiecte, precum rotorii turbinelor, sînt rotite cu viteze mari. Deși prevăzute a fi simetrice, astfel de rotoare, din cauza unor mici erori de așezare a paletelor etc., pot fi ușor asimetrice. Ele pot fi ajustate pentru a fi simetrice, adăugînd sau îndepărtînd puțin metal în locuri potrivite; aceasta se face punînd în rotație roata într-un dispozitiv special astfel încît bătăile lagărelor pot fi măsurate cantitativ și poate fi calculată corecția corespunzătoare și chiar indicată automat. Cunoaștem cu toții greutatea de plumb plasate în anumite puncte pe șinele roților de automobil pentru a reduce „bătăile” la viteze mari, datorate dezechilibrărilor.

13-4. Conservarea momentului cinetic

În capitolul 12, am găsit că viteza de variație a momentului cinetic total al unui sistem de particule în jurul unui punct fix într-un sistem de referință inerțial (sau în jurul centrului de masă) este egală cu suma momentelor externe care acționează asupra sistemului, adică

$$\vec{M}_{\text{ext}} = d\vec{L}/dt. \quad (12-9)$$

Să presupunem acum că $\vec{M}_{\text{ext}} = 0$, atunci $d\vec{L}/dt = 0$ astfel încît $\vec{L} = \text{const.}$

Dacă momentul extern rezultat care acționează asupra unui sistem este nul, momentul cinetic vectorial total al sistemului rămîne constant. Acesta este principiul conservării momentului cinetic.

Pentru un sistem de n particule, momentul cinetic total \vec{L} în jurul aceluiași punct este

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n.$$

Dacă momentul extern rezultat ce acționează asupra sistemului este nul, avem

$$\vec{L} = \text{const.} = \vec{L}_0, \quad (13-7)$$

unde \vec{L}_0 este vectorul moment cinetic total constant. Momentele cinetice ale particulelor individuale pot varia, însă suma lor vectorială \vec{L}_0 rămâne constantă în absența unui moment extern net.

Momentul cinetic este o mărime vectorială, astfel încât ecuația (13-7) este echivalentă cu trei ecuații scalare, câte una pentru fiecare axă de coordonate care trece prin punctul de referință. Conservarea momentului cinetic ne furnizează astfel trei condiții asupra mișcării unui sistem la care ea se aplică.

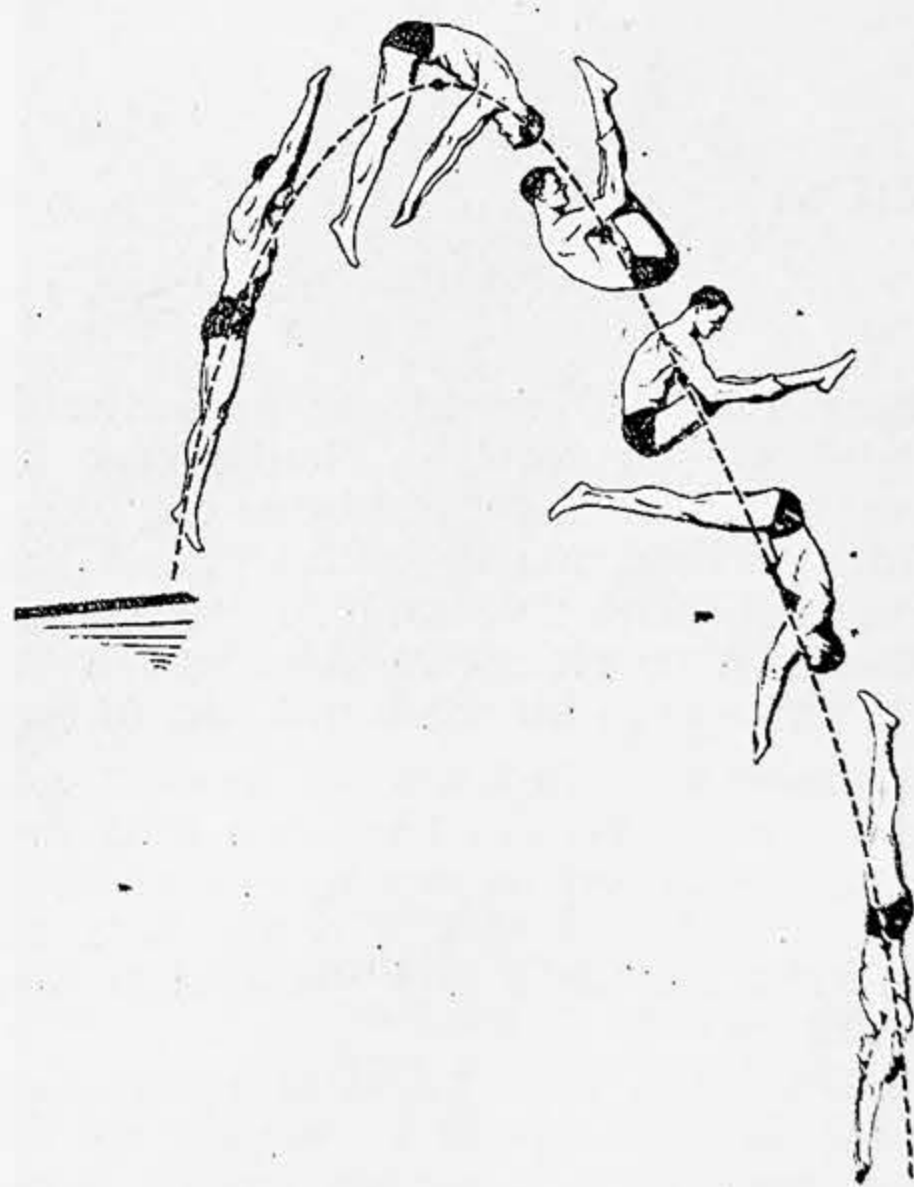
Pentru un sistem constând dintr-un rigid ce se rotește în jurul unei axe (de exemplu axa z), care este fixă într-un sistem de referință inerțial, avem

$$\vec{L}_z = I\vec{\omega}, \quad (13-6)$$

unde \vec{L}_z este componenta momentului cinetic de-a lungul axei de rotație și I este momentul de inerție față de aceeași axă. Este posibil ca momentul de inerție al unui corp în rotație să se schimbe printr-o rearanjare a părților sale. Dacă nu acționează nici un moment extern net, \vec{L}_z trebuie să rămână constant și dacă I variază, trebuie să existe o variație compensatoare a lui ω . Principiul conservării momentului cinetic se exprimă în acest caz astfel

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{const.} \quad (13-8)$$

Figura 13-6. Un plonjor părăsește trambulina cu mâinile și picioarele întinse și cu o anumită viteză unghiulară inițială. Deoarece nu se exercită nici un moment asupra sa în jurul centrului său de masă, $L (=I\omega)$ este constant în timpul cât el se găsește în aer. Când el apropie mâinile și picioarele de corp, deoarece I descrește, ω va crește. Dacă acum își întinde din nou membrele, viteza sa unghiulară scade iarăși la valoarea inițială. Observăm mișcarea parabolică a centrului său de masă comună tuturor mișcărilor bi-dimensionale sub influența gravitației.



Ecuția (13-8) este valabilă nu numai pentru rotația în jurul unei axe fixe, ci și în jurul unei axe care trece prin centrul de masă al sistemului, care se mișcă astfel încât ea rămâne permanent paralelă cu ea însăși (vezi pag. 293).

Acrobații, plonjorii, balerinii, patinatorii și alții folosesc adesea acest principiu. Deoarece I depinde de pătratul distanței componentelor corpului pînă la axa de rotație, este posibilă o variație mare, prin întinderea sau strîngerea membrelor. Să considerăm plonjorul din figura 13-6. Să presupunem că în momentul cînd părăsește trambulina el are o anumită viteză unghiulară ω_0 în jurul unei axe orizontale care trece prin centrul de masă, astfel încît el s-ar roti cu o jumătate de rotație înainte de a atinge apa. Dacă el vrea să facă o tură și jumătate, în același timp, el trebuie să tripleze viteza sa unghiulară. Dar nu există forțe externe care să acționeze asupra lui în afară de gravitație, iar gravitația nu exercită nici un moment față de centrul său de masă. Momentul său cinetic trebuie să rămînă de aceea constant, adică $I_0\omega_0 = I\omega$. Deoarece $\omega = 3\omega_0$, plonjorul trebuie să schimbe momentul de inerție în jurul axei orizontale care trece prin centrul de masă de la valoarea inițială I_0 la o valoare I astfel încît $I = \frac{1}{3} I_0$. El face aceasta strîngînd mîinile și picioarele cître

centrul corpului său. Cu cît viteza sa unghiulară inițială este mai mare și cu cît poate reduce mai mult momentul său de inerție, cu atît numărul revoluțiilor pe care le poate face într-un timp dat este mai mare.

Trebuie să observăm că energia cinetică de rotație a plonjorului nu este constantă. În adevăr, în exemplul nostru, deoarece

$$I\omega = I_0\omega_0$$

și

$$I < I_0,$$

rezultă că

$$\frac{1}{2} I\omega^2 > \frac{1}{2} I_0\omega_0^2$$

și energia cinetică de rotație a plonjorului crește. Această creștere a energiei este furnizată de plonjor care trebuie să efectueze lucru mecanic atunci cînd strînge membrele corpului său.

Într-un mod analog, patinatorii și balerinii își pot mări sau micșora viteza unghiulară de rotație în jurul unei axe verticale. O pisică reușește să aterizeze pe picioarele sale după o cădere folosind aceleași principii, coada servește ca un adaos util dar nu esențial.

Exemplul 5. Un obiect mic de masă m este legat de un fir ușor care trece printr-un tub. Tubul este ținut cu o mînă iar firul cu cealaltă. Obiectul este pus în rotație pe un cerc de rază r_1 , cu o viteză v_1 . Firul este apoi tras în jos, scur-tînd raza traiectoriei pînă la r_2 (fig. 13-7). Să se afle noua viteză liniară v_2 și noua viteză unghiulară ω_2 a obiectului în funcție de valorile inițiale v_1 și ω_1 și cele două raze.

Tracțiunea în jos a firului se transmite ca o forță radială asupra obiectului. O astfel de forță exercită un moment nul asupra obiectului față de centrul de rotație. Deoarece nu acționează nici un moment asupra obiectului în raport cu

axa de rotație, momentul său cinetic în această direcție trebuie să rămână constant. Prin urmare

momentul cinetic inițial = momentul cinetic final,

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

și

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

Cum $r_1 > r_2$, obiectul își mărește viteza dacă este tras.

În termeni de viteze unghulare, deoarece v_1 este egal cu $\omega_1 r_1$ și v_2 este egal cu $\omega_2 r_2$,

$$m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$$

și

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \omega_1$$

astfel încât există o creștere și mai mare a vitezei unghulare peste valoarea inițială (vezi problema 23). Ce efect are forța de gravitație (greutatea obiectului) asupra acestei analize?

Exemplul 6. Un student șade pe un taburet care se poate roti în jurul unei axe verticale. El ține mâinile întinse orizontal având un corp cu masă de 4 kg în fiecare mână. Instructorul îl pune în rotație cu o viteză unghulară de 0,50 rot/s. Să presupunem că frecările sînt neglijabile și nu exercită nici un moment față de axa de rotație. Presupunem că momentul de inerție al studentului rămîne constant, egal cu 6,0 kg·m² atunci cînd întinde sau apropie mâinile de corp și că variația momentului de inerție se datorește numai depărtării sau apropierii corpurilor. Luăm distanța inițială a corpurilor pînă la axa de rotație de 1,0 m și distanța lor finală 0,15 m. Să se afle viteza unghulară finală a studentului.

Singura forță externă este gravitația care acționează în centrul de masă și nu exercită nici un moment în raport cu axa de rotație. Prin urmare momentul cinetic în raport cu axa se conservă și

momentul cinetic inițial = momentul cinetic final

$$I_0 \omega_0 = I \omega.$$

Avem

$$I = I_{\text{student}} + I_{\text{corpuri}}$$

$$I_0 = 6,0 + 2 \cdot 4 \cdot (1,0)^2 = 14,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I = 6,0 + 2 \cdot 4 \cdot (0,15)^2 = 6,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_0 = 0,50 \text{ rot/s} = \pi \text{ rad/s}.$$



Figura 13-7. Exemplul 5. Un corp aflat la capătul unui fir care se mișcă pe un cerc de rază r_1 cu viteză unghulară ω_1 . Firul trece în jos printr-un tub. \vec{F} furnizează forța centripetă.

Prin urmare

$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{14,0}{6,18} \pi \text{ rad/s} = 2,27 \pi \text{ rad/s} \approx 1,2 \text{ rot/s.}$$

Viteza unghiulară finală este aproximativ dublă.

Dacă am ține seama de descreșterea lui I datorită apropierii brațelor de corp, viteza unghiulară finală ar fi fost mai mare.

Ce schimbare produce frecarea? Se conservă energia cinetică în timpul cât studentul apropie brațele și când le depărtează iarăși, presupunând că nu există frecări? Să se explice.

Exemplul 7. O demonstrație de laborator care ilustrează natura vectorială a legii de conservare a momentului cinetic merită a fi considerată.

Un student stă pe o platformă care se poate roti numai în jurul unei axe verticale. El ține în mână osia unei roți de bicicletă, încărcată cu plumb la periferie, cu axa sa verticală (roata lui Prandtl). Roata se învârtă în jurul axei sale verticale cu o viteză unghiulară ω_0 , însă studentul și platforma sunt în repaus. Studentul încearcă să schimbe direcția de rotație a roții. Ce se întâmplă?

Să alegem drept sistem studentul+platforma+roata. Momentul cinetic total inițial al acestui sistem este $I_0 \vec{\omega}_0$, provenind de la roata în rotație, I_0 fiind momentul de inerție al roții în jurul axei sale, iar $\vec{\omega}_0$ fiind dirijat vertical în sus. Figura 13-8 arată condiția inițială.

Studentul înclină acum axa roții cu un unghi θ față de verticală (pentru a face aceasta el trebuie să aplice un moment al forței; vezi exemplul 1. Acest mo-

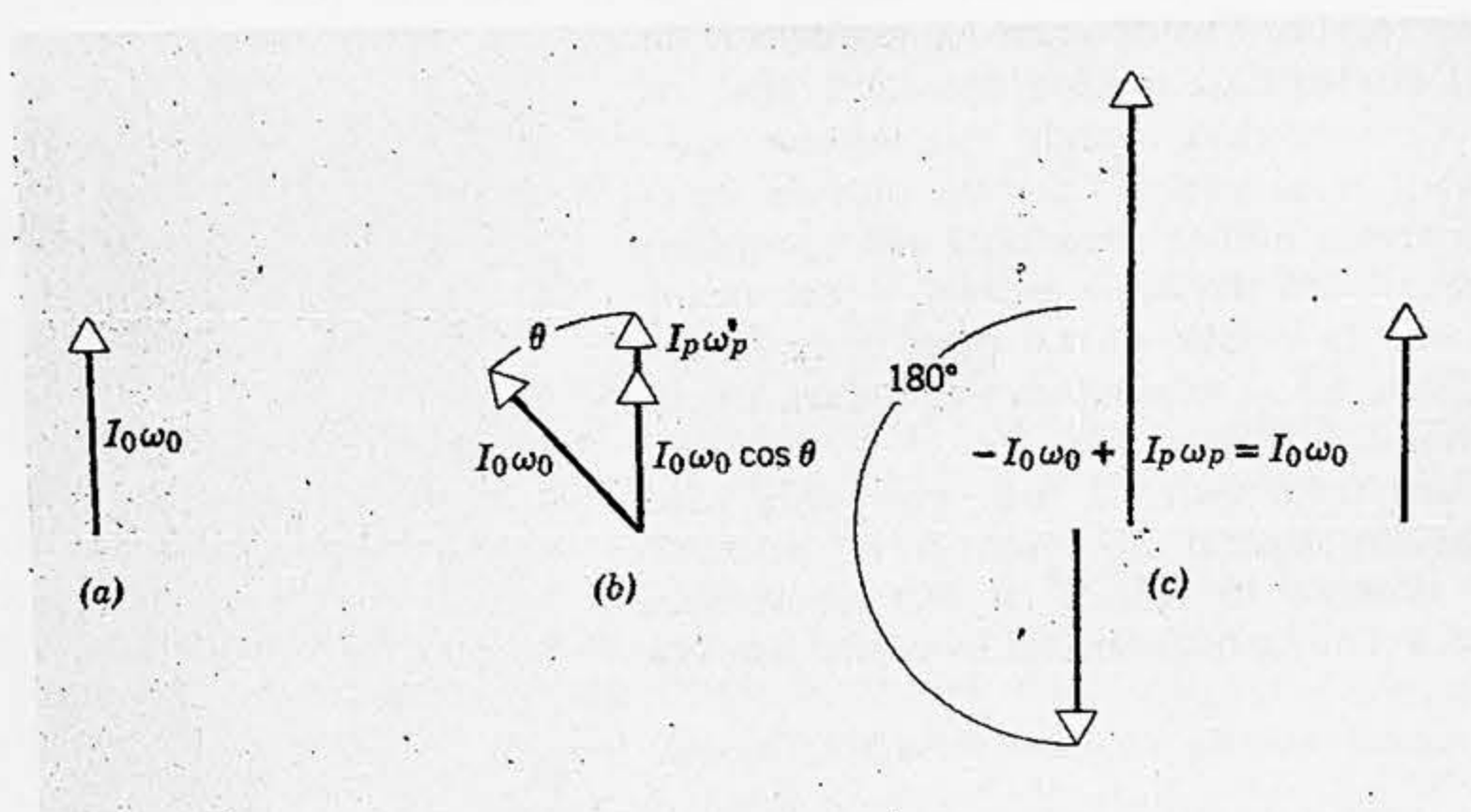


Figura 13-8. Exemplul 7. (a) Este arătat momentul cinetic inițial al sistemului. În (b) roata a fost înclinată cu un unghi θ . Deoarece nu s-a exercitat asupra sistemului nici un moment exterior pe direcția verticală, momentul cinetic în acea direcție trebuie să se conserve. Deficitul $(1 - \cos \theta) I_0 \omega_0$ este furnizat de rotația studentului și platformei. În (c) roata a fost răsturnată cu 180° . Deficitul este acum $2I_0 \omega_0$ care, ca și înainte, este acum furnizat de student și platformă.

ment este însă *intern* pentru sistemul pe care l-am definit). Deoarece nu există nici o componentă *externă* a momentului exercitat asupra sistemului, în raport cu axa verticală, componenta verticală a momentului cinetic al sistemului trebuie să se conserve. Roata, însă, se învârtă acum în jurul unei axe care face un unghi θ cu verticala, astfel încât ea contribuie la sistem cu o componentă verticală a momentului cinetic de numai $I_0 \omega_0 \cos \theta$. Prin urmare studentul și platforma trebuie să furnizeze momentul cinetic suplimentar în raport cu axa verticală și ei încep să se rotească în jurul axei verticale. Acest moment cinetic vertical suplimentar $I_p \omega_p$, adăugat fiind la $I_0 \omega_0 \cos \theta$ trebuie să fie egal cu momentul cinetic vertical inițial al sistemului $I_0 \omega_0$. Adică,

$$I_p \omega_p = I_0 \omega_0 (1 - \cos \theta).$$

Aceasta este arătat în figura 13-8, b. I_p este momentul de inerție al studentului și al platformei în raport cu axa verticală, iar ω_p este viteza lor unghiulară în jurul acestei axe.

Dacă studentul răstoarnă axa roții cu un unghi $\theta = 180^\circ$, el împreună cu platformă câștigă un moment cinetic vertical de $2I_0 \omega_0$. Momentul cinetic vertical total al sistemului se conservă din nou păstrând valoarea inițială $I_0 \omega_0$, așa cum se arată în figura 13-8, c.

Să considerăm acum numai momentul cinetic al roții. Când studentul înclină axa roții cu un unghi θ , el exercită un moment asupra ei care durează un timp Δt în care el reorientează axul roții. Componenta verticală a reacțiunii la acest „moment al impulsului” acționează asupra studentului și explică momentul cinetic vertical câștigat de el și de platformă.

Roata, ținută cu axul ei fix sub un unghi θ față de axa verticală, efectuează o mișcare de precesie în jurul axei sale exact ca titirezul din figura 13-1. La fel ca pentru titirez, un moment orizontal, care rămâne permanent sub un unghi drept față de planul definit de verticală și axa roții, trebuie furnizat în acest caz de către student.

Analiza exactă a mișcării acestui sistem depinde numai de aplicarea ecuației $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ și de natura vectorială a mărimilor implicate. Ea este lăsată ca exercițiu pentru studenții interesați.

13-5. Alte aspecte ale conservării momentului cinetic

Principiul conservării momentului cinetic este valabil atât în fizica atomică și nucleară, cât și în domeniul mecanicii cerești sau macroscopice. Deoarece mecanica newtoniană nu este valabilă în domeniul atomic și nuclear, această lege de conservare trebuie să fie mai fundamentală decât principiile lui Newton. În deducția acestui principiu noi am făcut undeva ipoteze mai rigide decât sînt necesare. Aceasta este adevărat chiar în cadrul mecanicii clasice. Studentul trebuie să observe rolul fundamental pe care l-a jucat legea a treia a lui Newton în deducerea acestui principiu de conservare. Această lege a fost folosită pentru a justifica ipoteza că suma momentelor interne este zero. A fost necesar să afirmăm nu numai că acțiunea și reacțiunea sînt egale în modul și opuse ca sens (forma „slabă” a legii a treia) ci de asemenea că aceste forțe sînt dirijate de-a lungul liniei care unește cele două particule (forma „tare” a legii a treia). Forma tare nu este respectată în unele interacții electromagnetice. În schimb presupunerea că suma momentelor interne într-un sistem de particule este nulă poate fi dove-

dită pe baza unei cerințe mult mai puțin stringente decât cea pe care o cere legea a treia¹.

Legea conservării momentului cinetic, așa cum am formulat-o, este valabilă pentru un sistem de corpuri, ori de câte ori corpurile pot fi tratate ca puncte materiale, adică ori de câte ori efectele datorite rotației corpurilor individuale pot fi neglijate. Dacă corpurile individuale au rotații, principiul conservării momentului cinetic este însă valabil, cu condiția să includem momentul cinetic datorit acestei rotații. Dar atunci corpurile nu mai sînt simple puncte materiale, a căror mișcare să poată fi descrisă de dinamica punctului material.

În fizica atomică și nucleară se găsește că „particulele elementare” cum sînt electronii, protonii, mezonii și neutronii, au moment cinetic legat de o mișcare de rotație intrinsecă pe lângă momentul cinetic legat de mișcarea orbitală în jurul unui punct exterior. Atunci cînd folosim legea conservării momentului cinetic total trebuie să includem acest moment cinetic de *spin* în momentul cinetic total. Un aspect fundamental al sistemelor atomice, moleculare și nucleare este acela că momentele lor cinetice pot lua numai valori discrete bine definite și nu un interval continuu de valori. Se spune că momentul cinetic este *cuantificat*. Prin urmare, momentul cinetic joacă un rol central în descrierea comportării unor astfel de sisteme (vezi problemele 4 și 6). Aceste idei vor fi dezvoltate în capitolele următoare.

Dacă am privi Soarele, planetele și sateliții ca particule care n-au mișcare de rotație intrinsecă, momentul cinetic al sistemului solar n-ar mai fi constant. Dar aceste corpuri au rotații intrinseci; de fapt forțele datorite mareelor transformă o parte din momentul cinetic de *spin* (intern) în moment cinetic orbital al planetelor și sateliților. Atunci cînd folosim legea conservării momentului cinetic, trebuie să includem acest moment cinetic de *spin* în cel total. Conservarea momentului cinetic joacă un rol fundamental în aprecierea teoriilor asupra originii sistemului solar, în contracția stelelor gigantice și în alte probleme de astronomie². Unele aplicații în domeniul astronomiei vor fi discutate în capitolul 16.

Baza acestui mod simplu de analiză a momentului cinetic total al sistemelor atomice sau astronomice este o teoremă (vezi problema 10) după care momentul cinetic total \vec{L} al oricărui sistem în raport cu originea unui sistem de referință inerțial poate fi calculat prin însumarea momentului cinetic în raport cu centrul său de masă (momentul cinetic de *spin*) cu momentul cinetic care provine din mișcarea centrului de masă în raport cu originea (momentul cinetic orbital).

Legile de conservare a energiei totale, a impulsului și a momentului cinetic sînt fundamentale în fizică, fiind valabile în toate teoriile fizice moderne. Vom avea ocazia să le folosim de mai multe ori în capitolele următoare.

13-6. Dinamica rotației. Rezumat

Subiectul mișcărilor de rotație ale particulelor și corpurilor rigide nu este prea complicat atît timp cît o tratare complet generală este în afara scopului nostru aici. Este recomandabil să strîngem la un loc toate ecuațiile privind dinamica mișcării de rotație și să comentăm condițiile în care ele pot fi folosite. Facem aceasta în tabela 13-1.

¹ Vezi E. Gerjuoy, *American Journal of Physics*, vol. 17, 477 (1949).

² Vezi, de exemplu, *Limitele astronomiei*, de Fred Hoyle, Harper and Brothers, 1955.

REZUMAT AL ECUAȚIILOR MIȘCĂRII DE ROTAȚIE

Tabela 13-1

Nr. ecuației	Ecuația	Observații
I. Ecuațiile de definiție		
12-1	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	Momentul asupra unei particule față de un punct O, datorit unei forțe rezultante \vec{F} .
	$\vec{M}_{ext} = \sum \vec{M}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$	Momentul cinetic rezultat al unui sistem de particule față de un punct O.
12-3	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$	Momentul cinetic al unei particule față de un punct O.
	$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$	Momentul cinetic rezultat al unui sistem de particule față de un punct O.
II. Relațiile generale		
12-7	$\vec{M} = d\vec{l}/dt$	Legea mișcării pentru o particulă individuală asupra căreia acționează un moment al forței. Ea reprezintă analogul rotațional al legii $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (ecuația 9-12). Ecuația (12-7) este valabilă numai dacă \vec{M} și \vec{l} sînt măsurați în raport cu orice punct O, fix într-un reper inerțial.
12-9	$\vec{M}_{ext} = d\vec{L}/dt$	Legea mișcării pentru un sistem de particule asupra cărora acționează un moment extern rezultat \vec{M}_{ext} . Ea este analogul rotațional al legii $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ (ecuația 9-7). Ecuația (12-9) este valabilă numai dacă \vec{M}_{ext} și \vec{L} sînt măsurați în raport cu: (a) orice punct O fix într-un reper inerțial sau (b) centrul de masă al sistemului.
III. Cazul particular al unui rigid care se rotește în jurul unei axe fixe într-un reper inerțial (vezi nota de subsol de la pag. 293)		
12-17	$M = I\alpha$	$\vec{\alpha}$ este constrins să fie orientat de-a lungul axei; I se referă de asemenea la această axă și M este componenta scalară a lui \vec{M}_{ext} dirijată de-a lungul aceleiași axe. Ea reprezintă analogul rotațional al legii $F = Ma$ de la mișcarea rectilinie.
12-18	$L = I\omega$	$\vec{\omega}$ este constrins să fie orientat de-a lungul axei; I se referă de asemenea la această axă și L este componenta scalară de-a lungul acestei axe a momentului cinetic total. Dacă axa de rotație are vreo simetrie particulară (adică dacă ea este o axă principală; vezi nota de subsol pag. 330), atunci \vec{L} și $\vec{\omega}$ sînt ambii dirijați axial. Ea reprezintă analogul rotațional al ecuației $P = Mv$ de la mișcarea rectilinie.

Întrebări

1. (a) De ce în exemplul 1 înclinarea axului însuși duce la deplasarea roții spre dreapta studentului? (b) Dacă studentul stă pe podeaua unei nave cosmice mari care se mișcă într-o regiune lipsită de gravitație, în ce mod, dacă este cazul, va afecta aceasta realizarea experimentului său?

2. Dacă titirezul din figura 13-1 nu s-ar roti, el s-ar răsturna. Dacă momentul său cinetic de spin este mare în comparație cu variația produsă de momentul aplicat, titirezul efectuează o mișcare de precesie. Ce se întâmplă când titirezul se rotește încet?

3. Un fizician cunoscut (R. W. Wood) care era amator de farse, a montat un volant în rotație rapidă într-un geamantan pe care l-a dat unui portar cu indicația de-al urma. Ce se întâmplă dacă portarul este condus iute după un colț? Să se explice folosind ecuația $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$.

4. Un aeroplan cu un singur motor trebuie să „țină direcția” pentru a zbura orizontal. (Păstrarea direcției constă în ridicarea unei eleron și coborîrea celui opus.) De ce este aceasta necesar? Este aceasta necesar pentru un aeroplan bimotor în circumstanțe normale?

5. Elicea unui avion se rotește în sens orar privită fiind din spate. Când pilotul iese din picaj, el găsește necesar să folosească cirma stângă în punctul inferior al picajului dacă vrea să mențină planul său de zbor. Să se explice.

6. Să se descrie cu ajutorul ecuației $\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$ dinamica rotației volanților de pe un tren rapid care vi-rează pe o curbă.

7. Ne plimbăm pe o cale ferată îngustă și începem să ne pierdem echi-

librul. Dacă începem să cădem spre dreapta, cum rotim corpul pentru a recâștiga echilibrul? Să se explice.

8. Pentru ca o bilă de biliard să se rostogolească fără alunecare pornind din repaus, tacul trebuie să lovească bila nu în centru (adică nu la o înălțime deasupra mesei egală cu raza bilei R), ci exact la o înălțime egală cu $\frac{2}{5} R$ deasupra centrului. Să se explice¹.

9. Un cilindru se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe care trece printr-un capăt, ca în figura 13-9. Să se aleagă o origine adecvată și să se arate calitativ vectorii \vec{L} și $\vec{\omega}$. Sînt acești vectori paraleli? Intervin aici considerații de simetrie?

10. Să se explice cu ajutorul momentului cinetic și al momentului de inerție cum putem mări amplitudinea oscilațiilor într-un leagăn?

11. Să considerăm mișcarea unei mingi de fotbal prin aer, care în același timp se rotește. Se conservă momentul cinetic în raport cu centrul de masă al mingii în timpul zborului? Modulul sau direcția vitezei unghiulare variază în raport cu axele fixe în spațiu sau fixe în corp?

12. În capitolul 1, topirea calotelor polare de gheață a fost citată ca o cauză posibilă a variației timpului de rotație a Pământului? Să se explice.

13. Spre Ecuator curg multe riuri mari. Ce efect au sedimentele pe care ele le transportă spre mare asupra rotației Pământului.

14. Un om se rotește pe o masă turnantă cu o viteză unghiulară ω . El ține două corpuri de mase egale în miinile depărtate. Fără a mișca brațele, el lasă să cadă cele două corpuri.

¹ Vezi Arnold Sommerfeld, *Mecanica, Volumul I din Lecturi privind fizica teoretică*, Academic Press, New York (1964 paperback edition) p. 158—161, pentru un supliment asupra mecanicii jocului de biliard.

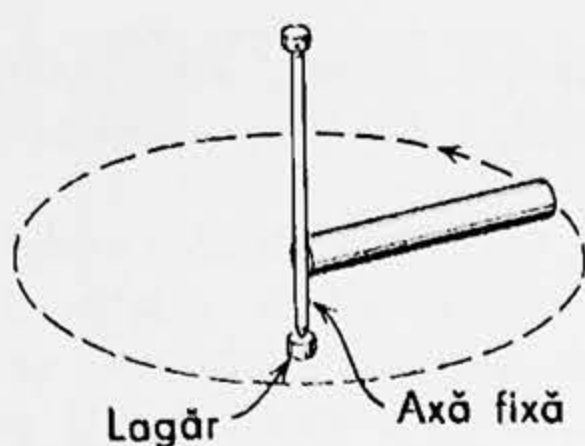


Figura 13-9.

Ce schimbare se va produce, dacă este cazul, în viteza sa unghiulară? Se conservă momentul cinetic? Să se explice.

15. În exemplul 5, dacă firul este lăsat liber, brusc, înapoi, astfel încât obiectul să revină pe cercul de rază r_1 , va recâștiga obiectul viteza sa inițială? Ce se întâmplă dacă tragem în jos și slăbim brusc firul în mod repetat? Să se explice comportarea cu ajutorul teoremei energiei cinetice și a teoremei momentului cinetic.

16. Un disc se rotește cu viteză

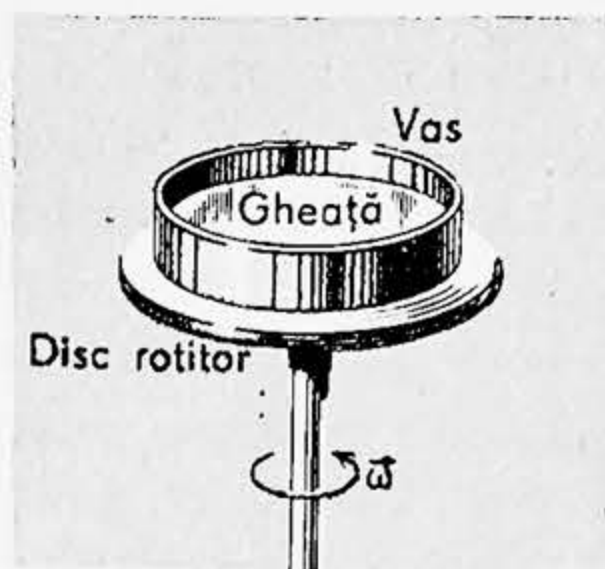


Figura 13-10.

unghiulară constantă în jurul unei axe verticale. Nu există frecări și nici moment motor. Un vas cilindric se află în repaus pe discul rotitor și se rotește împreună cu el; vezi figura 13-10. Fundul vasului este acoperit cu un strat de gheață de grosime uniformă care, desigur, se rotește împreună cu vasul. Gheața se topește, însă nu iese apă din vas. Va fi acum viteza unghiulară mai mare decât, aceeași, sau mai mică decât viteza inițială? Să se motiveze răspunsul.

Probleme

1. Un titirez se rotește cu 30 rot/s în jurul unei axe care face un unghi de 30° cu verticala. Masa sa este de 0,50 kg și momentul său de inerție este de $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Centrul de masă este la 4,0 cm deasupra punctului de sprijin (de pivotare). Dacă rotația este în sensul orar văzută fiind de sus, care ar fi modulul și direcția vitezei unghiulare de precesie?

2. O roată de bicicletă, cu butuc și spițe de masă neglijabilă, are o obadă subțire de rază 35 cm și greutate 4,0 kg; ea se poate roti pe axul său cu frecări neglijabile. Un om ține roata deasupra capului său, cu axa verticală, în timp ce el stă pe un disc turnant care se poate roti fără frecări; roata se rotește în sens orar, văzută fiind de sus, cu o viteză unghiulară

de 57,7 rad/s, iar discul turnant este inițial în repaus. Momentul de inerție al roții + om + discul turnant în jurul axei comune de rotație este de $24,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Omul oprește brusc cu mâna rotația roții (față de discul turnant). Să se determine viteza unghiulară rezultantă (modulul și direcția) a discului turnant. (b) Experiența se repetă cu frecări apreciabile introduse în axul roții, care, pornind cu aceeași viteză unghiulară inițială de 57,7 rad/s, ajunge treptat în repaus (față de discul turnant) în timp ce omul ține roata așa cum a fost descris mai sus. (Discul turnant continuă să se rotească liber fără frecări.) Să se descrie ce se întâmplă cu sistemul, dându-se maximum de informații cantitative pe care le permit datele problemei.

3. Plecînd de la ecuația (11-20, b), $\vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{v}$, pentru o particulă în mișcare circulară, să se arate că forța necesară pentru mișcarea circulară uniformă este $\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{p}$. Să se compare aceasta cu ecuația (13-2, b), $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$ și să se explice cum titirezul în mișcare de precizie poate fi privit ca un analog rotațional al mișcării circulare uniforme?

4. (a) Să presupunem că electronul se mișcă pe o orbită circulară în jurul protonului într-un atom de hidrogen. Dacă forța centripetă asupra electronului este furnizată de forța electrică $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, unde e este mărimea sarcinii electronului sau protonului, r este raza orbitei și ϵ_0 o constantă, să se arate că raza orbitei este

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2},$$

unde m este masa electronului și v viteza sa.

(b) Să presupunem acum că momentul cinetic al electronului în jurul nucleului poate avea numai valori care sînt multipli întregi n ai lui $h/2\pi$, unde h este o constantă numită constanta lui Planck. Să se arate că sînt posibile numai orbitele electronice ale căror raze sînt

$$r = \frac{nh}{2\pi mv}.$$

(c) Să se combine aceste r e rezultate pentru a elimina pe v și să se arate că singurele orbite compatibile cu ambele condiții au razele

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}.$$

Prin urmare razele permise sînt proporționale cu pătratul numerelor întregi $n=1, 2, 3$ etc. Pentru $n=1$, r are valoarea cea mai mică și anume $0,528 \cdot 10^{-10}$ m.

5. Să se arate că $\vec{L} = I\vec{\omega}$ pentru sistemul format din două particule din figura 13-4.

6. În 1913 Niels Bohr a postulat că orice sistem mecanic în rotație cu momentul de inerție I poate avea un moment cinetic ale cărui valori pot fi numai multipli întregi ai numărului $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J.s. Acest număr este $1/2\pi$ din constanta h a lui Planck.) Cu alte cuvinte,

$$L = I\omega = n\hbar,$$

unde n este un număr întreg pozitiv sau nul. Spunem că L este cuantificat, deoarece nu este permis să mai ia alte valori. (a) Să se arate că acest postulat duce la restricția ca energia cinetică a unui sistem în rotație să ia un șir de valori discrete, adică energia este cuantificată. (b) Să considerăm așa-numitul *rotator rigid* care constă dintr-un corp de masă m obligat să se rotească pe un cerc de rază R . Cu ce viteze unghiulare s-ar putea roti corpul dacă postulatul ar fi corect? Ce valori ale energiei cinetice poate avea? (c) Să se traseze o diagramă a nivelelor de energie care să indice cum se schimbă distanța dintre nivelele de energie cînd n crește? Această diagramă ar putea semăna cu cea din figura 13-11. Este sigur că anumite molecule biatomice la energii joase se comportă ca un rotator rigid.

7. Figura 13-12 arată un corp rigid simetric care se rotește în jurul unei axe fixe. Originea coordonatelor este aleasă pentru conveniență în centrul de masă. Să se arate prin însumarea contribuțiilor aduse la momentul cinetic de către toate elementele de masă m_i în care este divizat corpul că $\vec{L} = I\vec{\omega}$, unde \vec{L} este momentul cinetic total.

8. Un cilindru se rostogolește în jos pe un plan înclinat de unghi θ . Să se arate, prin aplicarea directă a ecuației (12-9) ($\vec{\mathcal{M}} = d\vec{L}/dt$), că accelerația cen-

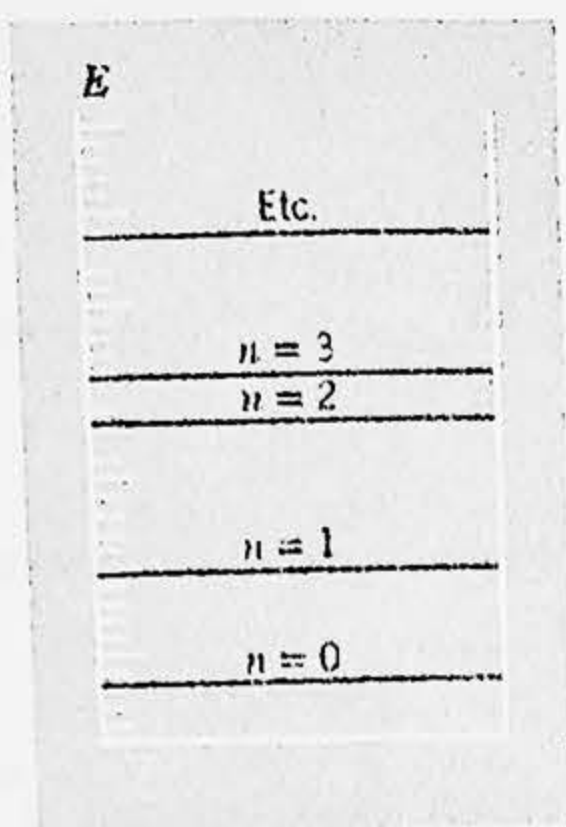


Figura 13-11.

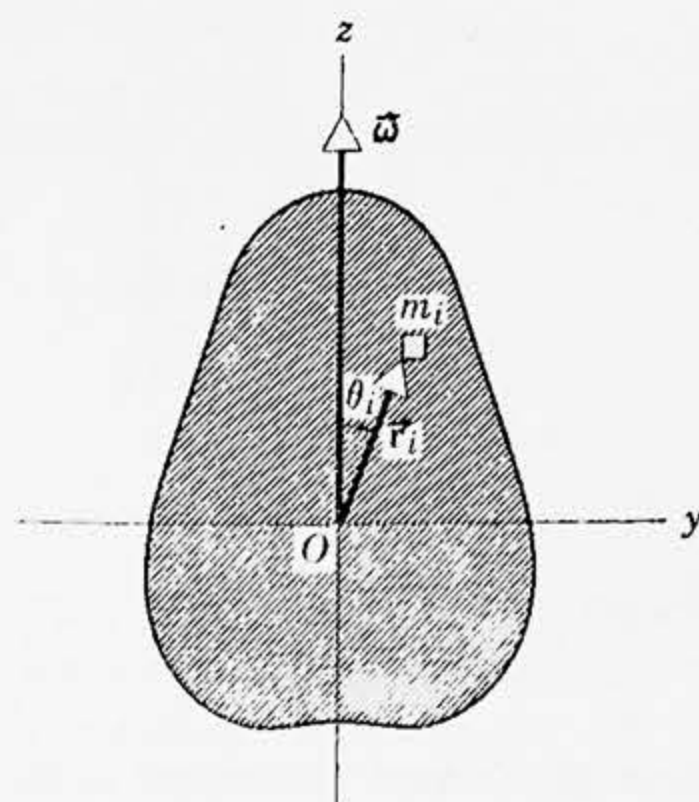


Figura 13-12.

trului său de masă este $\frac{2}{3}g \sin \theta$. Să se compare această metodă cu cea folosită în exemplul 10 din capitolul 12.

9. O bandă rectangulară subțire de lungime a și lățime b se rotește în jurul uneia din diagonalele sale cu o viteză unghiulară constantă ω , axa fiind fixă într-un sistem de referință inertial. Să se afle direcția și mărimea momentului cinetic \vec{L} față de originea aleasă în centrul de masă.

10. Relația dintre momentul cinetic total al unui sistem de particule și momentele cinetice orbital și de spin. Momentul cinetic total al unui sistem de particule față de originea O a unui reper inertial este dat de $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, unde \vec{r}_i și \vec{p}_i sînt măsurați în raport cu O .

(a) Să se folosească relațiile $\vec{r}_i = -\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$ și $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_{cm} + \vec{p}_i'$ de la problema 8, capitolul 12, pentru a exprima pe \vec{L} prin pozițiile \vec{r}_i' și momentele \vec{p}_i' față de centrul de masă C . (b) Să se folosească definiția centrului de masă și definiția momentului cinetic \vec{L}' față de centrul de masă (problema 8, capitolul 12) pentru a obține $\vec{L} =$

$-\vec{L}' + \vec{r}_{cm} \times M \vec{v}_{cm}$. (c) Să se arate cum poate fi interpretat acest rezultat, dacă privim momentul cinetic total ca fiind egal cu suma dintre momentul cinetic de spin (momentul cinetic față de centrul de masă) și momentul cinetic orbital (momentul cinetic al mișcării centrului de masă C față de O dacă întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în C).

11. Luna se rotește în jurul Pământului astfel încît noi vedem mereu aceeași față a Lunii. (a) Cum sînt legate între ele partea de spin și partea orbitală ale momentului cinetic al Lunii față de Pământ? (b) Cu cît ar trebui să se schimbe momentul cinetic de spin al Lunii pentru ca să putem vedea întreaga suprafață a Lunii în timpul unei luni de zile?

12. Folosind datele din anexă, să se afle: (a) momentul cinetic al rotației Pământului în jurul axei sale proprii. (b) Momentul cinetic al mișcării orbitale a Pământului în jurul Soarelui.

13. Pe un teren de joc există un dispozitiv mic cu călușei de rază 1,20 m și masă 175 kg. Raza de girație (vezi problema 12, capitolul 12) este de 0,90 m. Un copil cu masa de 45 kg aleargă cu o viteză de 3,0 m/s la peri-

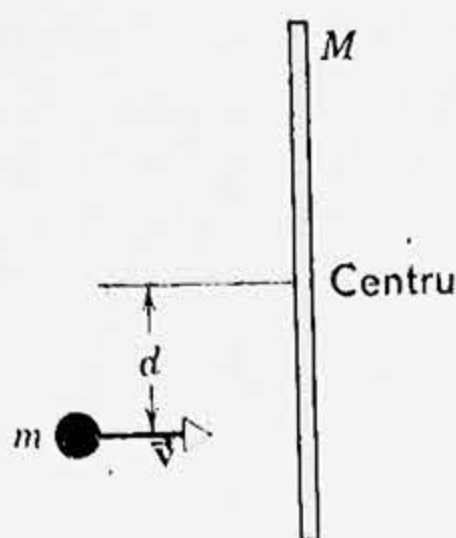


Figura 13-13.

feria platformei călușeilor atunci când aceasta este în repaus și apoi sare pe platformă. Neglijând frecările să se afle viteza unghiulară a platformei și copilului.

14. Integrala în raport cu timpul a unui moment se numește *impuls unghiular*. Plecând de la $\vec{\omega} = d\vec{L}/dt$, să se arate că impulsul unghiular rezultat este egal cu variația momentului cinetic. Aceasta este analogul rotațional al teoremei impulsului.

15. O riglă cu lungimea de 1 m se află pe o masă orizontală fără frecări. Ea are masa M și este liberă să se miște oricum pe masă. Un puc de hochei de masă m , mișcându-se ca în figura 13-13 cu viteza v se ciocnește elastic cu rigla. (a) Care mărimi se conservă în ciocnire? (b) Care trebuie să fie masa m a pucului astfel încât el să rămână în repaus imediat după ciocnire?

16. O tijă are o masă de 3,0 kg și o lungime de 1,2 m. Ea este inițial în repaus pe un plan orizontal fără frecări și este lovită perpendicular cu o forță impulsivă cu percuția de 15 N·s la o distanță $l=0,60$ m de centru. Să se determine mișcarea ulterioară.

17. O bilă de biliard, inițial în repaus, capătă un impuls scurt de la un tac. Tacul este ținut orizontal la o înălțime h deasupra liniei centrului ca în figura 13-14. Bila capătă o viteză v_0 și datorită șocului („direct“)

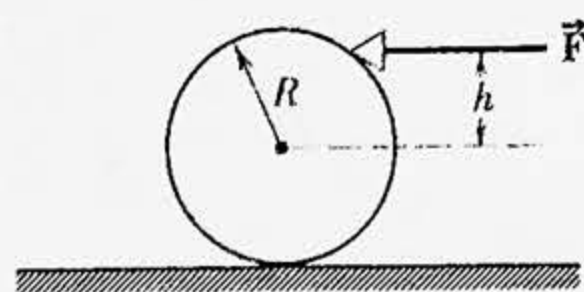


Figura 13-14.

primit câștigă pînă la urmă o viteză finală de $\frac{9}{7} v_0$. Să se arate că

$$h = \frac{4}{5} R,$$

unde R este raza bilei.

18. În problema precedentă să ne imaginăm că \vec{F} este aplicată sub linia centrului. Să se arate că este imposibil să se reducă cu ajutorul acestui șoc „inversat” viteza de avansare pînă la zero dacă $h \neq R$. Să se arate în mod analog că este imposibil de imprimat bilei o viteză retrogradă, dacă \vec{F} nu are o componentă (verticală) în jos.

19. O roată se rotește cu o viteză unghiulară de 500 rot/min pe un ax al cărui moment de inerție este neglijabil. O a doua roată identică, inițial în repaus, este cuplată brusc pe același ax. Care este viteza unghiulară a combinației rezultante formată din ax și cele două roți?

20. Doi cilindri avînd razele R_1 și R_2 și momentele de inerție I_1 și respectiv I_2 , sînt susținuți de axe fixe perpendiculare pe planul figurii 13-15. Cilindrul mare este inițial în rotație cu viteza unghiulară ω_0 . Cilindrul mic se mișcă spre dreapta pînă cînd atinge cilindrul mare și este forțat să se rotească de către forțele de frecare dintre cei doi cilindri. Pînă la urmă, alunecarea încetează și cei doi cilindri se rotesc cu viteze constante în sensuri

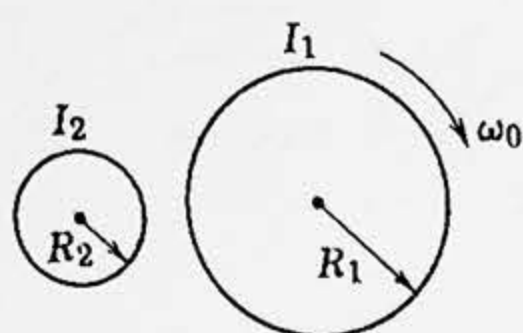


Figura 13-15.

opuse. Să se afle viteza unghiulară finală ω_2 a cilindrului mic în funcție de I_1 , I_2 , R_1 , R_2 și ω_0 . Se conservă momentul cinetic total în acest caz?

21. Axa cilindrului din figura 13-16 este fixă. Cilindrul este inițial în repaus. Blocul de masă M se mișcă inițial spre dreapta fără frecare cu viteza v_1 . El trece peste cilindru în poziția punctată. Când intră prima dată în contact cu cilindrul blocul alunecă pe cilindru, dar frecarea este suficient de mare astfel încât alunecarea încetează înainte ca M să piardă contactul cu cilindrul. Cilindrul are raza R și momentul de inerție I . Să se afle viteza finală v_2 în funcție de v_1 , M , I și R . Aceasta se poate face cel mai ușor folosind relația dintre impulsul forței și variația impulsului corpului.

22. Un om stă pe o platformă în rotație fără frecări, care se rotește cu o viteză de 1,0 rot/s; mâinile sale sînt întinse lateral și în fiecare mînă ține cîte un corp greu. Cu mâinile în această poziție momentul de inerție total al omului, corpurilor și platformei este $6,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Dacă prin strîngerea brațelor cu greutatea omul micșorează momentul de inerție pînă la $2,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, (a) care va fi viteza unghiulară rezultantă a platformei? (b) Cu cît crește energia cinetică?

23. În exemplul 5 să se compare energiile cinetice ale obiectului pe două orbite diferite. Să se folosească teorema energiei cinetice pentru a explica diferența cantitativ.

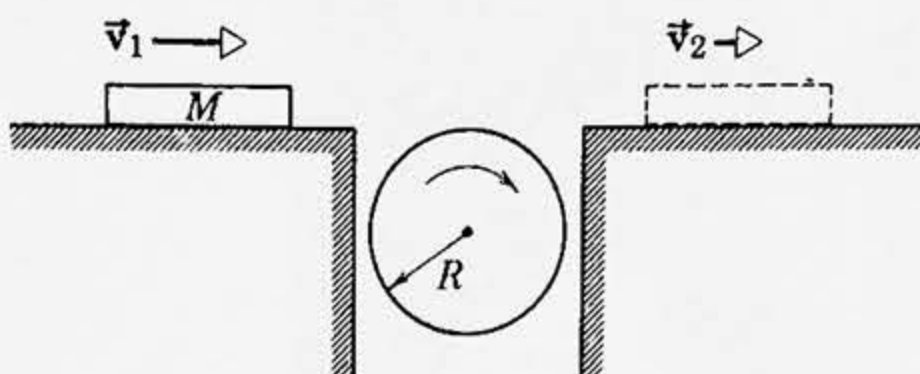


Figura 13-16.

24. Un gîndac de masă m fuge în sens trigonometric pe periferia unei farfurii circulare montate pe un ax vertical de rază R și moment de inerție I , cu lagăre fără frecări. Viteza gîndacului (față de pămînt) este v în timp ce farfuria se rotește în sens orar cu viteza unghiulară ω_0 . Gîndacul găsește o fărămitură de pîine pe periferia farfuriei și, desigur, se oprește. Care va fi viteza unghiulară a farfuriei după oprirea gîndacului? Se conservă energia?

25. O particulă este lansată orizontal pe suprafața interioară a unei emisfere netede de rază r care este ținută în repaus (fig. 13-17). Vrem să aflăm viteza inițială v_0 necesară particulei ca să ajungă exact la marginea emisferei. Să se afle v_0 în funcție de θ_0 , poziția unghiulară inițială a particulei. (Indicație: se vor folosi principiile de conservare.)

26. Un disc plat uniform de masă M și rază R se rotește în jurul unei axe orizontale trecînd prin centrul său cu viteza unghiulară ω_0 . (a) Care este energia sa cinetică? Momentul său cinetic? (b) O așchie de masă m se desprinde de la marginea discului

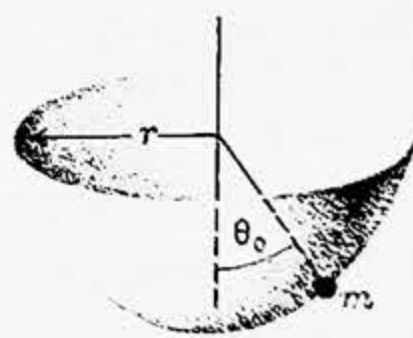


Figura 13-17.

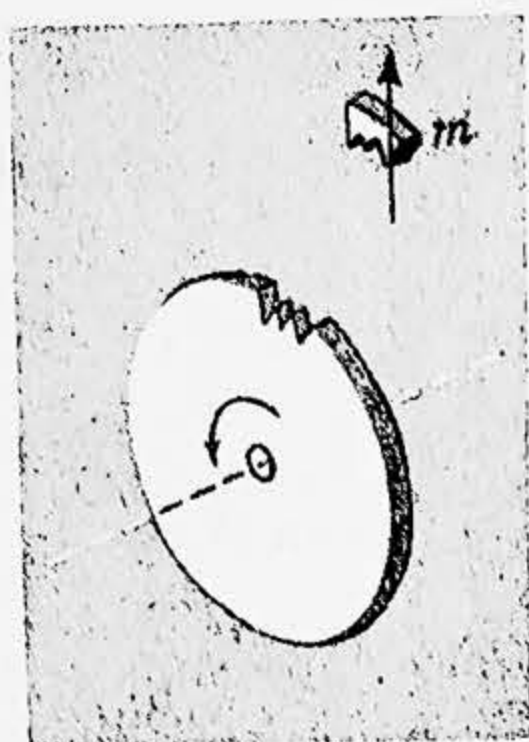


Figura 13-18.

Într-un astfel de moment încît așchia zboară *vertical* de-asupra punctului din care se desprinde (fig. 13-18). Cît de sus se ridică așchia înainte de a începe să cadă? (c) Care este viteza unghiulară finală a discului ciobit? Momentul cinetic final și energia finală?

27. Doi patinatori, fiecare cu masa de 50 kg, se apropie unu de altul de-a lungul unor traiectorii paralele, separate cu 3,0 m. Ei au viteze egale în modul și opuse ca sens de 10 m/s. Primul patinator duce o prăjină ușoară de 3,0 m lungime iar al doilea patinator o apucă de capăt în momentul cînd trece în dreptul său. (Se presupune gheața fără frecări.) (a) Să se descrie cantitativ mișcarea patinatorilor după ce s-au cuplat prin prăjină. (b) Trăgînd de prăjină, patinatorii reduc distanța dintre ei pînă la 1,0 m. Care va fi mișcarea lor după aceea? (c) Să se compare energia cinetică a

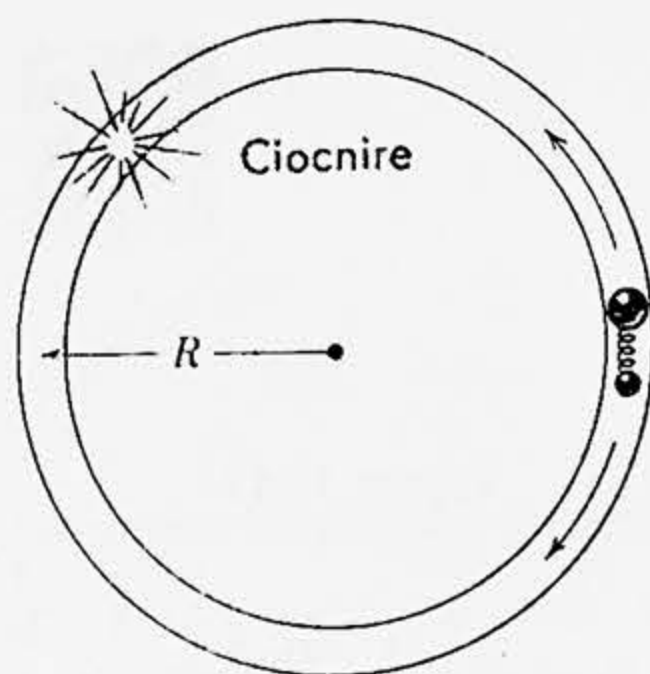


Figura 13-19.

sistemului de la punctele (a) și (b). De unde provine diferența?

28. Pe un jgheab circular orizontal mare, fără frecări, de rază R , se află două corpuri de mase mici m și M libere să alunece pe jgheab. Între cele două corpuri este comprimat un resort care însă *nu este legat* de m sau M . Cele două corpuri sînt legate printr-un fir. (a) Dacă firul se rupe, resortul comprimat (presupus fără masă) azvîrle cele două corpuri în sensuri opuse; resortul rămîne în urmă. Bilele se ciocnesc după ce se întîlnesc din nou pe jgheab (fig. 13-19). Unde va avea loc această ciocnire? (Ar putea fi convenabil să exprimați răspunsul prin unghiurile descrise de m și M .) (b) Dacă energia potențială înmagazinată inițial în resort era U_0 , cît timp trece de la ruperea firului pînă la producerea ciocnirii? (c) Presupunînd că ciocnirea este perfect elastică și frontală, unde se vor ciocni din nou bilele după prima ciocnire?

Echilibrul corpurilor rigide

14-1. Corpuri rigide

Pilonii care suportă un pod suspendat trebuie să fie suficient de rezistenți astfel încât să nu cedeze sub greutatea podului și a vehiculelor; roțile (trenul) de aterizare ale unui avion nu trebuie să cedeze dacă pilotul face o aterizare forțată; dinții unei furculițe nu trebuie să se îndoaie atunci când tăiem o bucată de carne tare. În toate aceste probleme inginerul are grijă ca aceste structuri, presupuse rigide, să rămână în adevăr rigide sub acțiunea forțelor și a momentelor asociate, care acționează asupra lor.

În astfel de probleme inginerul trebuie să pună două întrebări: (1) Ce forțe și momente acționează asupra corpului presupus rigid? (2) Ținând seama de scopul obiectului și materialele folosite, va rămâne corpul rigid sub acțiunea acestor forțe și momente? În acest capitol ne vom ocupa numai de primele două chestiuni; studentul în inginerie se va ocupa pe îndelete cu a doua chestiune la alte cursuri.

14-2. Echilibrul unui corp rigid

Observăm că corpurile presupuse rigide de la paragraful precedent (adică pilonii unui pod, trenul de aterizare și furculița) sînt în *echilibru mecanic*. Un corp rigid este în echilibru mecanic dacă, considerat fiind într-un sistem de referință inerțial, (1) accelerația liniară \vec{a}_{cm} a centrului său de masă este nulă și (2) accelerația sa unghiulară $\vec{\alpha}$ în jurul oricărei axe fixe în acest reper este nulă.

Această definiție nu cere ca rigidul să fie în repaus față de observator ci numai să nu fie accelerat. Centrul său de masă de exemplu se

poate mișca cu o viteză constantă \vec{v}_{cm} și corpul se poate roti în jurul unei axe fixe cu o viteză unghiulară $\vec{\omega}$ constantă. Dacă corpul este în adevăr în repaus (astfel încât $\vec{v}_{cm}=0$ și $\vec{\omega}=0$), spunem adesea că el este în *echilibru static*. După cum vom vedea însă, restricțiile impuse asupra forțelor și momentelor sînt aceleași, indiferent dacă echilibrul este sau nu static. Mai mult, putem transforma oricare caz de echilibru (nestic) într-un echilibru static alegînd un nou sistem de referință convenabil.

Mișcarea de translație a unui rigid de masă M este guvernată de ecuația (9-10) sau

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm},$$

în care \vec{F}_{ext} este suma vectorială a tuturor forțelor externe care acționează asupra corpului. Deoarece \vec{a}_{cm} trebuie să fie zero la echilibru, prima condiție de echilibru (static sau nu) este: *Suma vectorială a tuturor forțelor externe care acționează asupra unui corp în echilibru trebuie să fie nulă.*

Putem scrie condiția (1) astfel

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0, \quad (14-1)$$

în care am omis indicele la \vec{F}_{ext} pentru conveniență. Această ecuație vectorială ne conduce la trei ecuații scalare:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots = 0, \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots = 0, \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (14-2)$$

care afirmă că suma componentelor forțelor de-a lungul fiecăreia din cele trei direcții perpendiculare între ele este nulă.

Cea de a doua condiție de echilibru este ca $\vec{\alpha}=0$ pentru orice axă. Deoarece accelerația unghiulară a unui rigid se datorește unui moment al forței — reamintim că $\mathcal{M} = I\alpha$ pentru o axă fixă — putem formula această a doua condiție de echilibru (static sau nu) astfel: *Suma vectorială a tuturor momentelor exterioare care acționează asupra unui corp în echilibru trebuie să fie nulă.*

Putem scrie condiția (2) astfel

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2 + \dots = 0. \quad (14-3)$$

Această ecuație vectorială ne conduce la trei ecuații scalare

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \mathcal{M}_{1x} + \mathcal{M}_{2x} + \dots = 0, \\ \mathcal{M}_y &= \mathcal{M}_{1y} + \mathcal{M}_{2y} + \dots = 0, \\ \mathcal{M}_z &= \mathcal{M}_{1z} + \mathcal{M}_{2z} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (14-4)$$

care afirmă că la echilibru suma componentelor momentelor care acționează asupra unui corp, de-a lungul fiecăreia din cele trei axe perpendiculare între ele, este nulă.

Momentul rezultat \vec{M} din ecuația (14-3) care trebuie să fie zero pentru echilibrul mecanic, este definit în raport cu o origină particulară O . Mărimile M_x , M_y și M_z din ecuația (14-4) sînt componentele scalare ale lui \vec{M} și se referă la oricare sistem de trei axe perpendiculare între ele a căror origină este în O , indiferent cum sînt orientate aceste axe în spațiu. Aceasta rezultă din faptul că, dacă un vector este zero, componentele sale scalare trebuie să fie zero indiferent cum orientăm axele sistemului de referință. Studentul se poate întreba dacă alegerea originii este esențială. Răspunsul — după cum vom arăta mai jos — este că această alegere nu este esențială deoarece (pentru un corp în echilibru de translație), dacă $\vec{M}=0$ pentru o anumită origină O , el va fi de asemenea zero pentru

oricare altă origină în sistemul de referință. Esența acestui paragraf constă atunci în faptul că condiția (2) este satisfăcută pentru un corp în echilibru de translație dacă putem arăta, fie că (a) $\vec{M}=0$ în raport cu oricare punct (ecuația 14-3), fie că (b) componentele momentului de-a lungul oricăror trei axe perpendiculare între ele sînt nule (ecuația 14-4).

Să presupunem acum că avem un rigid în echilibru de translație, astfel încît $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots=0$ (ecuația 14-1). Vrem acum să arătăm că momentul în jurul oricărui punct (cum este P din figura 14-1) va fi zero dacă momentul în jurul unui punct particular (cum este O din fig. 14-1) este zero. Figura arată trei din cele n forțe, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ aplicate în diferite puncte ale unui rigid și îndreptate în diferite direcții. Punctele de aplicație sînt specificate față de O cu ajutorul vectorilor de poziție, cum este de exemplu \vec{r}_1 . Punctul arbitrar P este specificat de vectorul de poziție \vec{r}_P ; vectorul $\vec{r}_1-\vec{r}_P$ specifică punctul de aplicație a lui \vec{F}_1 în raport cu punctul P .

Putem scrie pentru momentul rezultat în jurul lui O (vezi ecuația 12-1).

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

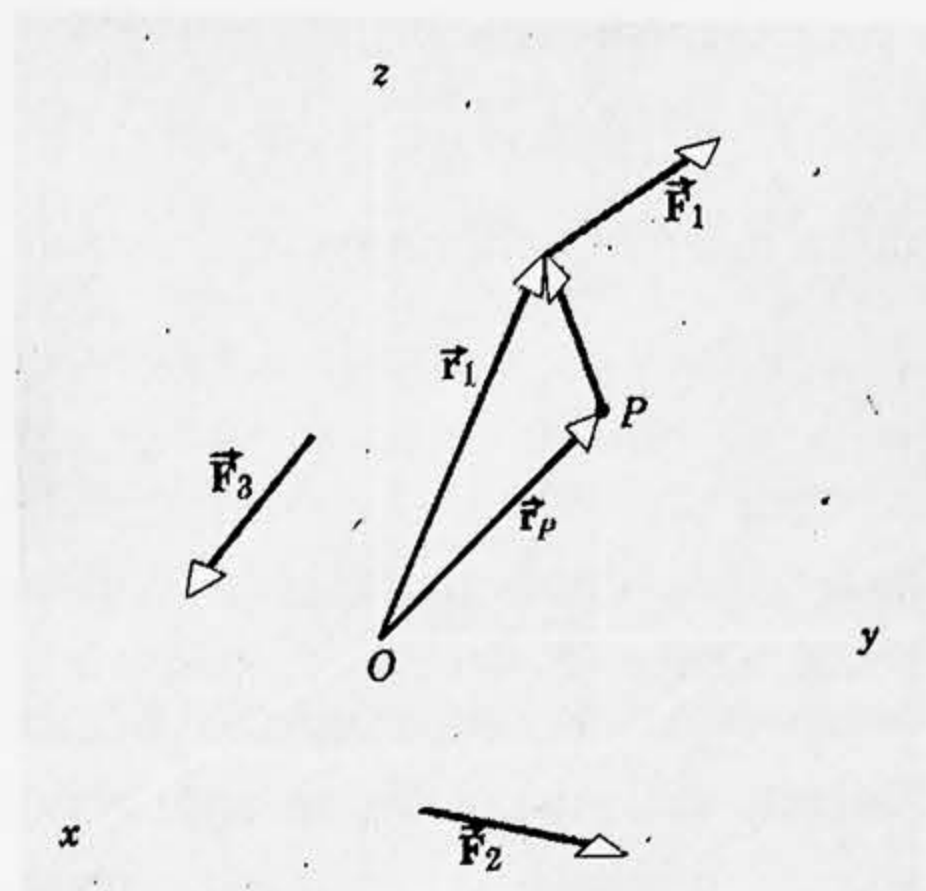


Figura 14-1. Trei din cele n forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ care acționează asupra unui corp rigid, care nu este arătat în figură. Am arătat în text că dacă $\vec{M}=0$ pentru un punct O , atunci el se anulează pentru oricare alt punct, cum ar fi P , dacă se presupune că corpul este în echilibru de translație.

și pentru momentul în jurul lui P

$$\vec{M}_P = (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \times \vec{F}_n.$$

Putem dezvolta ultima ecuație astfel

$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n] - \\ &\quad - [\vec{r}_P \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)]. \end{aligned}$$

Dacă acum, după cum am presupus, prima condiție de echilibru este satisfăcută, atunci $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$ și termenul al doilea de mai sus din parantezele mari se anulează. Primul termen din parantezele mari este \vec{M}_O (vezi mai sus), astfel încât în aceste condiții

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O,$$

În modul acesta, pentru un corp în echilibru de translație, dacă $\vec{M}_O = 0$, atunci $\vec{M}_P = 0$, unde P este un punct arbitrar.

Prin urmare, avem șase condiții independente asupra forțelor pentru ca un corp să fie în echilibru. Aceste condiții sînt cele șase relații algebrice din ecuațiile (14-2) și (14-4). Aceste șase condiții reprezintă cîte o condiție asupra fiecăruia din cele șase grade de libertate ale unui rigid, trei de translație și trei de rotație.

Adesea avem de a face cu probleme în care toate forțele se află într-un plan. Atunci avem numai trei condiții pentru forțele noastre: suma componentelor lor trebuie să fie zero pentru fiecare din cele două direcții perpendiculare arbitrare din plan și suma momentelor lor în jurul oricărei axe perpendiculare pe plan trebuie să fie zero. Aceste condiții corespund celor trei grade de libertate pentru mișcarea într-un plan, două de translație și una de rotație.

Ne vom restrînge de aceea, de cele mai multe ori, la probleme plane pentru a simplifica calculele. Aceasta nu impune nici o restricție fundamentală asupra principiilor generale. De asemenea, ca o chestiune de conveniență, vom considera numai cazul echilibrului static, în care corpurile sînt în adevăr în repaus.

14-3. Centrul de greutate

Una din forțele întîlnite în mișcările rigidului, este forța de gravitație. În realitate, pentru un corp extins, aceasta nu este doar o singură forță ci rezultanta unui mare număr de forțe. Fiecare particulă din corp este acționată de o forță gravitațională. Dacă ne imaginăm corpul de masă M divizat într-un număr mare de particule, să zicem n , forța gravitațională exercitată de către Pămînt asupra particulei i de masă m_i este $m_i \vec{g}$. Această forță este îndreptată în jos către centrul Pămîntului. Dacă accelerația datorită gravitației \vec{g} este aceeași peste tot în regiunea

considerată, spunem că acolo există un câmp gravitațional uniform; adică \vec{g} are aceeași mărime și direcție peste tot în acea regiune. Pentru un rigid aflat într-un câmp gravitațional uniform, \vec{g} trebuie să fie același pentru fiecare particulă din corp și forțele de greutate ale particulelor trebuie să fie paralele între ele. Dacă presupunem că câmpul gravitațional terestru este uniform, putem arăta că toate forțele de greutate individuale care acționează asupra unui corp pot fi înlocuite printr-o singură forță $M\vec{g}$ care acționează în centrul de masă al corpului. Aceasta este echivalent cu a arăta că forțele de greutate individuale, care acționează în jos, pot fi contracarate în ceea ce privește efectele lor de accelerare de o singură forță $\vec{F} (= -M\vec{g})$ care acționează în sus, cu condiția ca această forță \vec{F} să fie aplicată în centrul de masă al corpului.

Figura 14-2 arată două particule tipice sau două elemente de masă m_1 și m_2 alese din cele n astfel de elemente în care a fost împărțit corpul rigid. O forță dirijată în sus $\vec{F} (= -M\vec{g})$ este aplicată într-un anumit punct O . Rămîne de arătat că corpul este în echilibru mecanic dacă (și numai dacă) punctul O este centrul de masă. Condiția 1 de echilibru (ecuația 14-1) a fost deja satisfăcută prin alegerea mărimii și direcției lui \vec{F} . Adică

$$\vec{F} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \dots + m_n\vec{g} = 0$$

sau

$$\vec{F} = -(m_1 + m_2 + \dots + m_n)\vec{g} = -M\vec{g},$$

ceea ce corespunde ipotezei noastre.

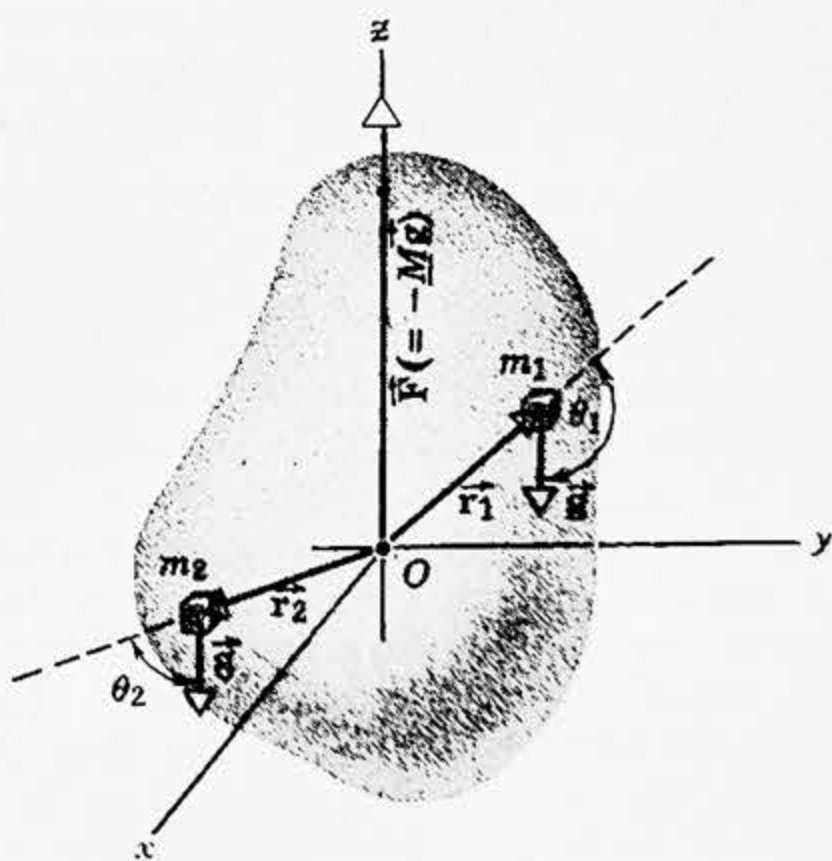


Figura 14-2. Un corp neregulat este împărțit în n elemente de masă dintre care sînt arătate două elemente tipice m_1 și m_2 . Am demonstrat în text că corpul poate fi menținut în echilibru de translație și de rotație cu ajutorul unei singure forțe $\vec{F} (= -M\vec{g})$ dirijată în sus și aplicată în centrul de masă al corpului.

Rămîne să arătăm că $\vec{M}=0$ pentru oricare punct individual al solidului, cum este O . Aceasta este cea de a doua condiție de echilibru. Prin alegerea lui O drept origine, ne asigurăm de faptul că momentul lui \vec{F} în jurul acestui punct este nul, deoarece brațul forței \vec{F} este zero pentru acest punct. Momentul în raport cu O datorit atracției gravitaționale asupra elementelor de masă este

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} + \dots + \vec{r}_n \times m_n \vec{g},$$

relație pe care o putem scrie astfel (deoarece m_1, m_2 etc. sînt scalari)

$$\vec{M} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{g} + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{g} + \dots + m_n \vec{r}_n \times \vec{g}.$$

Deoarece \vec{g} este același în fiecare termen, îl putem scoate ca factor comun, obținînd

$$\vec{M} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n) \times \vec{g} = \left(\sum_1^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g},$$

în care suma se ia asupra tuturor elementelor de masă care formează corpul.

Dacă acum punctul O este centrul de masă al corpului, suma de mai sus este nulă. Aceasta rezultă din definiția centrului de masă [vezi ecuația (9-5, b) și discuția care urmează acolo]. Tragem concluzia că *dacă* (și numai dacă) punctul O este centrul de masă, atunci $\vec{M}=0$ și cea de a doua condiție de echilibru mecanic este satisfăcută.

În modul acesta, forțele gravitaționale care acționează asupra elementelor de masă individuale care formează un rigid sînt echivalente în ceea ce privește efectele lor de translație și de rotație cu o singură forță egală cu Mg , greutatea totală a corpului, care acționează în centrul de masă. Putem obține același rezultat dacă corpul este un mediu continuu și împărțit într-un număr infinit de particule. Studentul trebuie să fie în stare să obțină aceasta cu ajutorul metodelor calculului integral (vezi paragraful 9-1). Punctul de aplicație al forței gravitaționale rezultante echivalente, se numește *centrul de greutate*.

Coincidența centrului de greutate cu centrul de masă se datorește ipotezei că cîmpul gravitațional terestru este presupus uniform. În realitate această ipoteză nu este strict adevărată, deoarece mărimea lui \vec{g} variază cu distanța pînă la centrul Pămîntului și, mai mult decît atît, direcția lui \vec{g} nu este exact radial către centrul Pămîntului în fiecare punct (capitolul 16). Pentru a vedea ce efect are aceasta, să considerăm o bară uniformă cu o lungime de mai mulți kilometri, înclinată față de verticală, în cîmpul gravitațional terestru ca în figura 14-3. Centrul de greutate al unui corp este punctul în care acționează asupra lui forța gravitațională rezultantă echivalentă. Acest punct trebuie să fie același cu punctul în care trebuie aplicată o singură forță îndreptată în sens opus pentru a ține corpul în echilibru. Dacă cîmpul ar fi uniform, o singură forță de mărime Mg aplicată în centrul de masă și orientată în sus ar menține bara în echilibrul de translație și de rotație. Dar cîmpul nu este uniform și valoarea lui g în punc-

tul m_1 este mai mică decât valoarea lui g în punctul m_n . Punctul în care trebuie aplicată o singură forță pentru a ține corpul în echilibru se află deci într-un punct P ceva mai jos de centrul de masă. Mai mult, dacă orientarea corpului se schimbă, poziția punctului P , necesară pentru aplicarea unei forțe de echilibru, variază. Prin urmare centrul de greutate are în realitate puțin folos într-un astfel de caz. Nu numai că el nu coincide cu centrul de masă, dar poziția sa variază față de corp atunci când acesta se mișcă.

Deoarece aproape toate problemele de mecanică se referă la obiecte care au dimensiuni mici în comparație cu

distanțele pe care \vec{g} variază apreciabil, putem presupune că \vec{g} este uniform în cuprinsul corpului. Centrul de masă și centrul de greutate pot fi atunci luate în același punct. În fapt, putem folosi această coincidență pentru a determina experimental centrul de masă în corpurile de formă neregulată. De exemplu, să găsim poziția centrului de masă al unei plăci subțiri de formă neregulată ca în figura 14-4. Suspendăm corpul printr-un fir de un punct oarecare A de pe marginea sa. Când corpul este în repaus, centrul de greutate trebuie să se afle direct sub punctul de suspensie undeva pe linia Aa , deoarece numai atunci momentul dat de fir și de greutatea corpului pot da un moment resultant nul. Suspendăm apoi corpul de un alt punct B de pe marginea sa. Din nou centrul de greutate trebuie să se găsească undeva pe linia Bb . Singurul punct comun liniilor Aa și Bb este O , punctul de intersecție, astfel încât acest punct trebuie să fie centrul de greutate. Dacă acum suspendăm corpul de un alt punct de pe margine, cum este C , linia verticală Cc va trece prin O . Deoarece am presupus un câmp uniform, centrul de greutate coincide cu centrul de masă care este deci localizat în O .

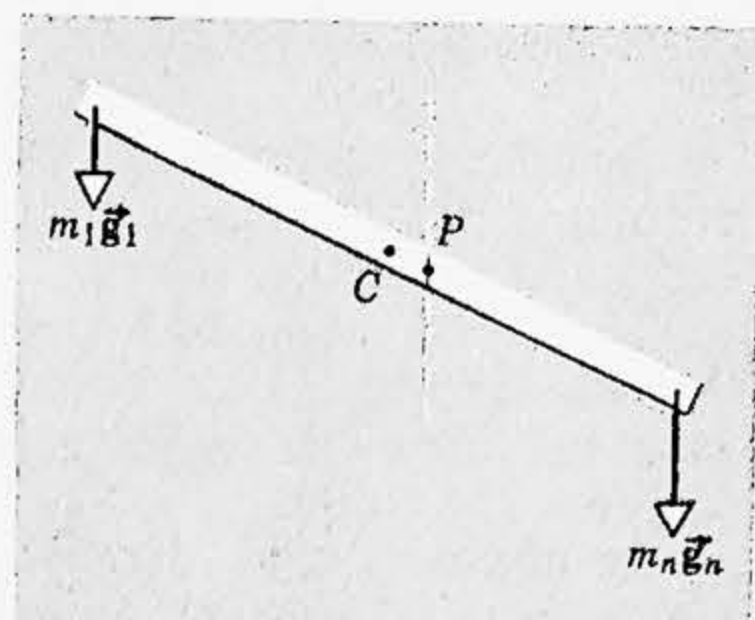


Figura 14-3. Centrul de masă C și centrul de greutate P nu coincid în realitate, deoarece câmpul gravitațional terestru nu este uniform.

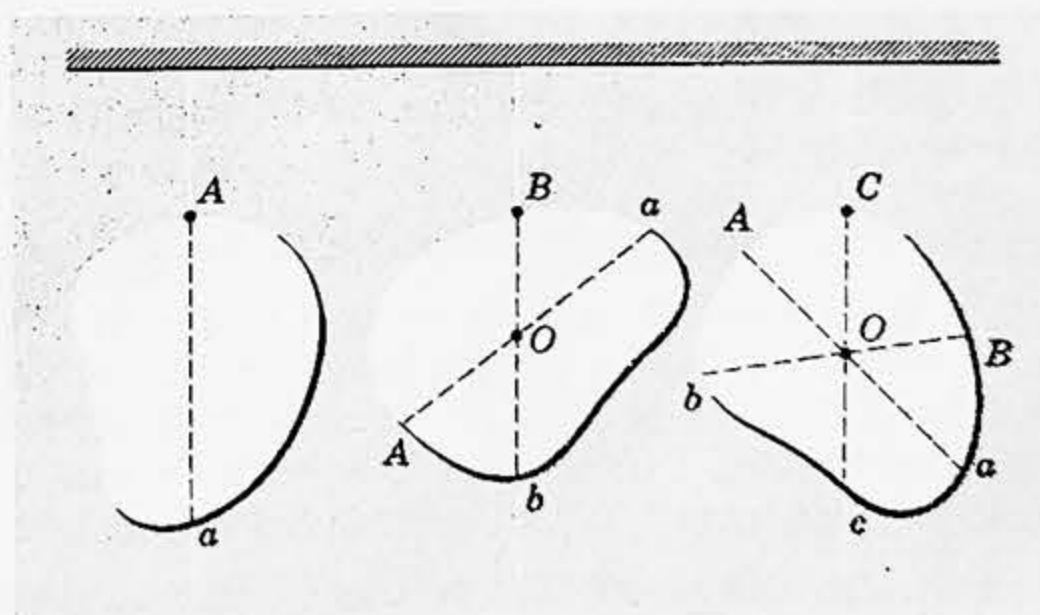


Figura 14-4. Deoarece centrul de masă O se află totdeauna direct sub punctul de suspensie, atârând o placă în două puncte diferite putem determina pe O .

14-4. Exemple de echilibru

În aplicarea condițiilor de echilibru (forță rezultantă nulă și moment rezultant nul în raport cu orice axă), putem clarifica și simplifica procedeul în mai multe moduri.

Întâi ducem o frontieră imaginară în jurul sistemului considerat. Aceasta ne asigură că vedem clar care anume corp sau sistem de corpuri este cel cărui îi aplicăm legile echilibrului. Acest proces se cheamă izolarea sistemului.

În al doilea rând, desenăm vectorii care să reprezinte modulul, direcția, sensul și punctul de aplicație a tuturor forțelor externe. O forță externă este aceea care acționează din afara frontierei care a fost trasată înainte. Exemple de forțe externe des întâlnite sînt: forțele gravitaționale și forțele transmise prin fire, sîrme, tije și bare (grinzii) care traversează frontiera. Uneori se ridică problema sensului unei forțe. În acest caz facem o tăietură imaginară prin agentul care transmite forța, în punctul în care el traversează frontiera. Dacă capetele acestei tăieturi tind să se apropie, forța acționează spre exterior. Dacă avem dubii, alegem sensul arbitrar. O valoare negativă pentru forță în soluția problemei înseamnă că forța acționează în sensul opus celui presupus. Observăm că numai forțele externe care acționează asupra sistemului trebuie considerate; toate forțele interne se reduc două cîte două.

În al treilea rând, alegem un sistem de referință convenabil și descompunem, după axele sale, forțele externe înainte de a aplica prima condiție de echilibru (ecuația 14-2). Scopul este aici de a simplifica calculele. Sistemul de referință preferabil este de obicei evident.

În al patrulea rând, alegem un sistem de referință convenabil și descompunem momentele externe după axele acestui sistem înainte de a aplica cea de a doua condiție de echilibru (ecuația 14-4). Scopul este din nou de a simplifica calculele și putem folosi repere diferite în aplicarea celor două condiții pentru echilibru static, dacă aceasta se dovedește a fi convenabil. Să presupunem că o axă trece prin punctul în care sînt concurente două forțe și este perpendiculară pe planul format de aceste forțe; aceste forțe vor avea automat componenta momentului de-a lungul (sau în jurul) acestei axe nulă. Componentele momentului care rezultă de la toate forțele externe trebuie să fie zero în raport cu oricare axă pentru condiția de echilibru. Momentele interne se vor reduce două cîte două și nu trebuie luate în considerație.

Exemplul 1. (a) O riglă uniformă de metal este așezată în repaus cu capetele pe două dinamometre (fig. 14-5). Riglă cîntărește 40 N. Să se afle indicațiile dinamometrelor.

Sistemul nostru este bara (rigla). Forțele care acționează asupra barei sînt \vec{G} , forța gravitațională care acționează în jos în centrul de greutate și \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , forțele exercitate în sus asupra barei la capete de către dinamometre. Acestea sînt arătate în figura 14-5, a. În virtutea legii a treia a lui Newton, forța exercitată de dinamometru asupra barei este egală în modul și opusă ca sens cu forța exercitată de bară asupra dinamometrului. Prin urmare, pentru a obține indicațiile dinamometrelor trebuie să determinăm valorile absolute ale lui \vec{F}_1 și \vec{F}_2 .

Toa
nev

treb
că c
dicu
pend
rezul
alege
orar
rotaț

sau

Comb

Fiecar
Da
rezulta
drept

sau

23•

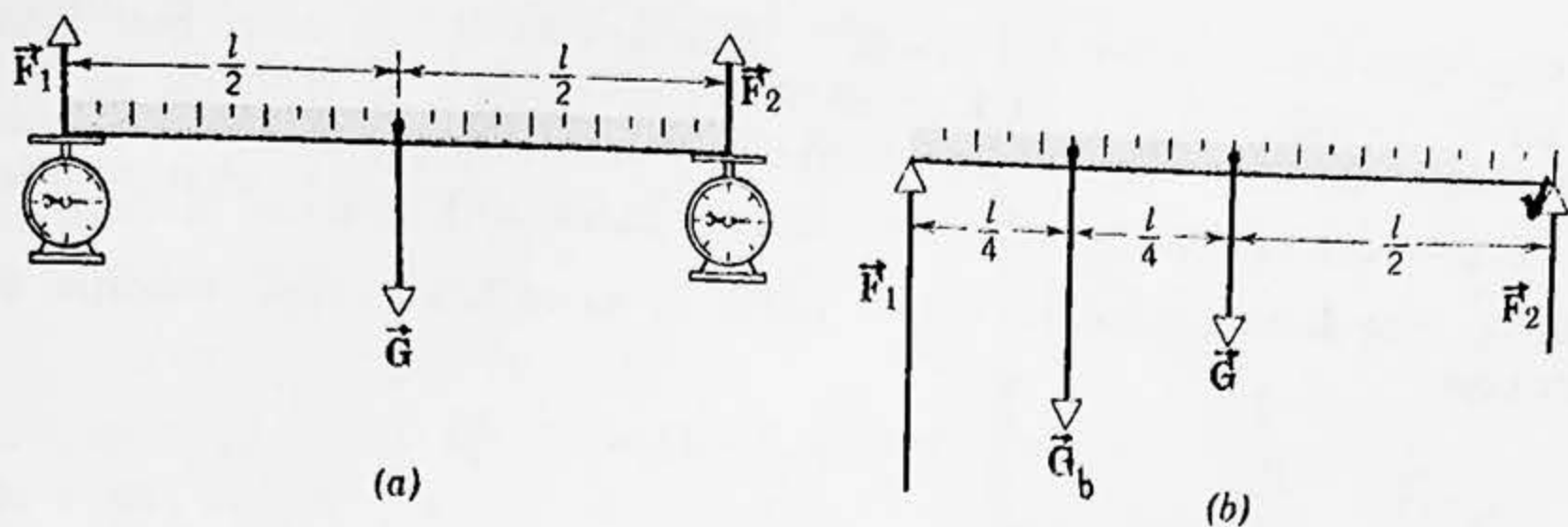


Figura 14-5. (a) Exemplul 1, a. O bară omogenă de oțel stă în repaus pe două dinamometre. (b) Exemplul 1, b. Un corp suspendat la o distanță față de capăt egală cu un sfert din lungimea barei pînă la un capăt.

Pentru echilibrul de translație (ecuația 14-1) condiția este

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0.$$

Toate forțele acționează vertical, astfel încît dacă alegem axa y verticală, nu este nevoie să considerăm alte axe. Atunci obținem ecuația scalară

$$F_1 + F_2 - 40 \text{ N} = 0.$$

Pentru echilibrul de rotație, componenta momentului rezultat asupra barei trebuie să fie zero în raport cu orice axă. Am văzut că este suficient să arătăm că componentele momentului sînt nule pentru orice sistem de trei axe perpendiculare între ele. Aceste componente sînt sigur nule pentru oricare două axe perpendiculare aflate în planul figurii 14-5, a. (De ce?) Rămîne să cerem ca momentul rezultat să fie nul în raport cu orice axă perpendiculară pe planul figurii. Să alegem o axă care trece prin centrul de greutate. Atunci alegem rotația în sens orar ca pozitivă și rotația în sens antiorar ca negativă, condiția de echilibru la rotații (ecuația 14-4) este

$$F_1 \frac{l}{2} - F_2 \frac{l}{2} + G \cdot 0 = 0$$

sau

$$F_1 - F_2 = 0.$$

Combinînd cele două ecuații, obținem

$$F_1 + F_2 - 2F_1 - 2F_2 = 40 \text{ N},$$

$$F_1 - F_2 = 20 \text{ N}.$$

Fiecare dinamometru indică 20 N după cum era de așteptat.

Dacă am alege o axă trecînd printr-un capăt al barei, am fi obținut același rezultat. De exemplu, luînd momentele în raport cu axa care trece prin capătul drept obținem

$$F_1 l - G \frac{l}{2} + F_2 \cdot 0 = 0$$

sau

$$F_1 - \frac{G}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ N}.$$

Combinând aceasta cu $F_1 + F_2 = 40$ N, obținem $F_2 = 20$ N ca și mai înainte.

(b) Să presupunem că un bloc de 60 N este așezat la distanța de 25 cm pe bara noastră de 1 m lungime. Ce vor indica acum dinamometrele?

Forțele externe care acționează asupra barei sînt arătate în figura 14-5, b, unde \vec{G}_b este forța exercitată asupra barei de către bloc. Prima condiție de echilibru este

$$F_1 + F_2 - G - G_b = 0.$$

Cu $G = 40$ N și $G_b = 60$ N, obținem

$$F_1 + F_2 = 100 \text{ N}.$$

Dacă alegem o axă trecînd prin capătul stîng al barei, condiția a doua de echilibru va fi

$$G_b \frac{l}{4} + G \frac{l}{2} - F_2 l = 0.$$

Cu $G = 40$ N și $G_b = 60$ N obținem

$$F_2 = 35 \text{ N}.$$

Introducînd acest rezultat în prima ecuație, obținem

$$F_1 + 35 \text{ N} = 100 \text{ N},$$

$$F_1 = 65 \text{ N}.$$

Dinamometrul din stînga indică 65 N iar cel din dreapta indică 35 N la echilibru.

De ce obținem numai două condiții pentru forțe în această problemă în locul celor trei condiții la care ne așteptăm pentru problemele în care toate forțele se află într-un plan?

Exemplul 2. (a) O scară de 6,0 m cîntărind 500 N se sprijină pe un perete într-un punct situat la 4,8 m deasupra solului. Centrul de greutate al scării este la o treime pe scară. Un om de 800 N se urcă pînă la jumătatea scării. Presupunînd că peretele este fără frecări, să se afle forțele exercitate de către sistem asupra solului și asupra peretelui.

Forțele care acționează asupra scării sînt arătate în figura 14-6. \vec{G} este greutatea omului care se află pe scară și \vec{G}_s este greutatea scării. O forță \vec{F}_1 este exercitată de către sol asupra scării. \vec{F}_{1v} este componenta, verticală iar \vec{F}_{1h} este componenta orizontală a acestei forțe (datorită frecării). Peretele, fiind fără frecări, poate exercita numai o forță normală pe suprafața sa, notată cu \vec{F}_2 . Ni se dau următoarele date:

$$G = 800 \text{ N}, \quad G_s = 500 \text{ N},$$

$$a = 4,8 \text{ m}, \quad c = 6,0 \text{ m}.$$

Din geometria figurii tragem concluzia că $b = 3,6$ m. Linia de acțiune a lui \vec{G} intersectează solul la o distanță $b/2$ de la perete și linia de acțiune a lui \vec{G}_s intersectează solul la o distanță $2b/3$ de la perete.

Alegem axa x de-a lungul solului și axa y de-a lungul peretelui. Atunci condițiile asupra forțelor pentru echilibrul de translație (ecuația 14-2) sînt

$$F_2 - F_{1o} = 0,$$

$$F_{1v} - G - G_s = 0.$$

Pentru echilibrul de rotație (ecuația 14-4) alegem o axă trecînd prin punctul de contact al scării cu solul și obținem

$$F_2 \cdot a - G \frac{b}{2} - G_s \frac{b}{3} = 0.$$

Folosind datele problemei, obținem

$$F_2 \cdot 4,8 \text{ m} - 800 \text{ N} \cdot 1,8 \text{ m} - 500 \text{ N} \cdot 1,2 \text{ m} = 0$$

$$F_2 = 425 \text{ N},$$

$$F_{1o} = F_2 = 425 \text{ N},$$

$$F_{1v} = 800 \text{ N} + 500 \text{ N} = 1300 \text{ N}.$$

În virtutea legii a treia a lui Newton, forțele exercitate de către sol și de către perete asupra scării sînt egale în modul dar de sens opus cu forțele exercitate de către scară asupra solului și respectiv asupra peretelui. Prin urmare, forța normală asupra peretelui este de 425 N, iar forța exercitată asupra solului are componentele de 1300 N în jos și 425 N spre dreapta.

(b) Dacă coeficientul de frecare statică dintre sol și scară este $\mu_s = 0,40$ cît de sus se poate urca omul pe scară înainte ca scara să înceapă să alunece?

Fie x fracțiunea din lungimea totală a scării pe care se poate urca omul înainte de a începe alunecarea. Atunci condițiile noastre de echilibru sînt

$$F_2 - F_{1o} = 0,$$

$$F_{1v} - G - G_s = 0$$

și

$$F_2 a - Gbx - G_s \frac{b}{3} = 0.$$

Obținem acum

$$F_2 \cdot 4,8 \text{ m} = 800 \text{ N} \cdot 3,6 \text{ m} \cdot x + 500 \text{ N} \cdot 1,2 \text{ m},$$

$$F_2 = (600x + 125) \text{ N}$$

Prin urmare

$$F_{1o} = (600x + 125) \text{ N}$$

și, ca mai înainte

$$F_{1v} = 1300 \text{ N}.$$

Forța maximă de frecare statică este dată de

$$F_{1o} = \mu_s F_{1v} = 0,40 \cdot 1300 \text{ N} = 520 \text{ N}.$$

Prin urmare

$$F_{1o} = (600x + 125) \text{ N} = 520 \text{ N}$$

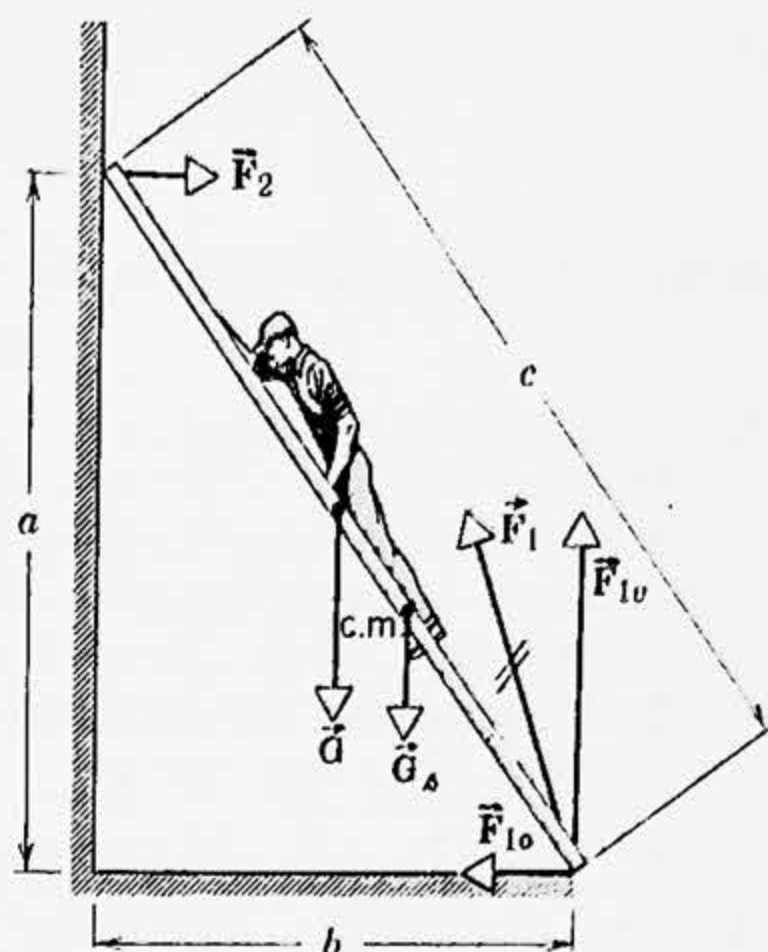


Figura 14-6. Exemplul 2.

și

$$x = \frac{395}{600},$$

astfel încît omul poate urca pe scară

$$6,0 \cdot x \text{ m} = 3,95 \text{ m}$$

pînă la începerea alunecării.

În acest exemplu scara este tratată ca un obiect unidimensional, cu un singur punct de contact cu peretele și solul. Studentul ar trebui să reflecteze asupra felului cum aceasta limitează considerarea cazului mai puțin artificial a două puncte de contact la fiecare capăt.

Răspunsul pentru care am presupus că peretele este fără frecări se discută mai târziu. Puteți bănuți care este ea?

Exemplul 3. O bară uniformă este articulată la un perete. O sîrmă legată de perete la o distanță d deasupra articulației este legată de celălalt capăt al barei. Bara face un unghi de 30° cu orizontala atunci cînd un corp cu greutatea G_1 este atîrnat printr-un fir fixat de capătul barei. Dacă bara are o greutate G și o lungime l să se afle tensiunea din sîrmă și forțele exercitate de articulație asupra barei.

Situația este descrisă în figura 14-7, în care sînt arătate toate forțele ce acționează asupra barei. Sîrma care trage de bară face un unghi α cu orizontala astfel încît tensiunea \vec{T} din sîrmă are o componentă orizontală \vec{T}_o și o componentă verticală \vec{T}_v așa cum este arătat. Forța \vec{F} exercitată de articulație asupra barei are de asemenea o componentă orizontală \vec{F}_o și o componentă verticală \vec{F}_v . \vec{G} este greutatea barei care acționează în centrul său de greutate iar \vec{G}_1 este tensiunea în firul care transmite greutatea corpului suspendat spre bară.

Alegînd axele noastre, una orizontală și una verticală, obținem pentru echilibrul de translație

$$F_o + T_o - G - G_1 = 0$$

și

$$F_v - T_v = 0.$$

Alegînd o axă care să treacă prin punctul de intersecție a lui \vec{T} și \vec{G}_1 (de ce?), obținem pentru echilibrul de rotație

$$\begin{aligned} F_o \cdot l \cos 30^\circ - F_v \cdot l \sin 30^\circ - \\ - \frac{1}{2} G \cdot l \cos 30^\circ = 0 \end{aligned}$$

Necunoscutele noastre sînt T_o , T_v , F_o și F_v . Să dăm următoarele valori celorlalte mărimi:

$$G = 300 \text{ N}, G_1 = 200 \text{ N}, l = 1,0 \text{ m},$$

$$d = 0,60 \text{ m}.$$

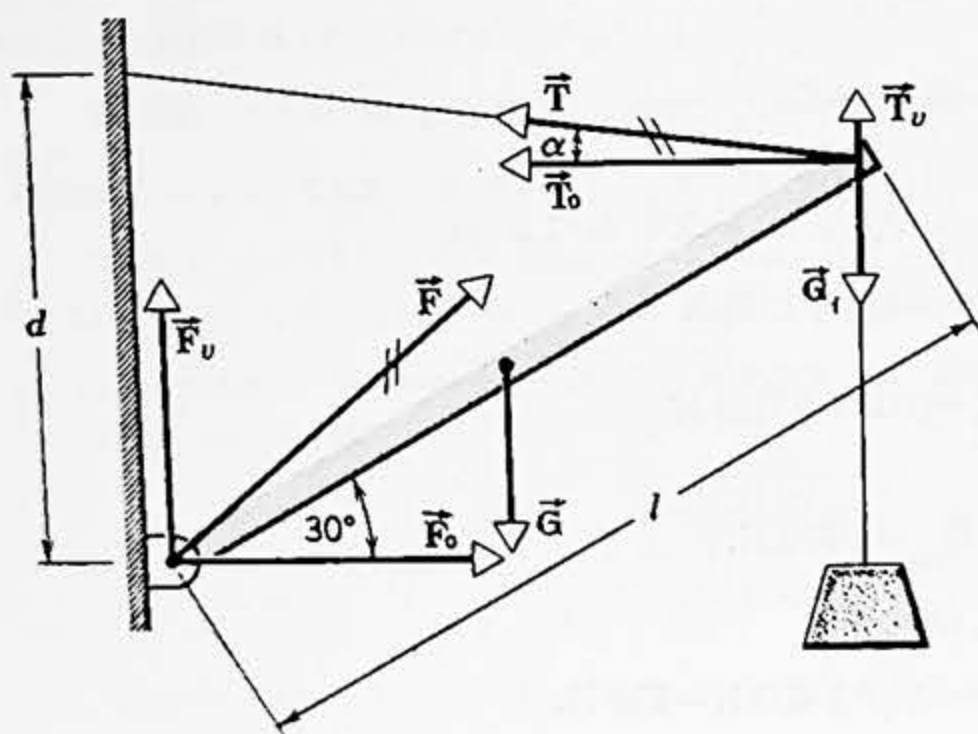


Figura 14-7. Exemplul 3.

Prin urmare,

$$(1) \quad F_v + T_v = 500 \text{ N},$$

$$(2) \quad F_o = T_o$$

și

$$F_o \cdot (1,0) \cdot (0,866) = F_o \cdot 0,50 + 300 \cdot (0,50) \cdot (0,866)$$

sau

$$(3) \quad F_o = F_o \cdot (5,0/8,66) + 150 \text{ N}.$$

Reamintim că avem patru necunoscute și anume: F_v , F_o , T_v și T_o . Avem nevoie de încă o relație între aceste mărimi dacă vrem să rezolvăm problema. Această relație rezultă din faptul că \vec{T}_v și \vec{T}_o , adunate fiind, trebuie să dea un vector rezultat \vec{T} dirijat de-a lungul sîrmei. Sîrma nu poate furniza sau suporta o forță transversală pe direcția sa. (Observăm că aceasta nu este însă adevărat pentru o grindă.) Prin urmare cea de a patra relație este

$$T_v = T_o \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{unde } \operatorname{tg} \alpha = (d - l \sin 30^\circ) / l \cos 30^\circ = 1,0/8,66$$

astfel încît

$$(4) \quad T_v = T_o/8,66.$$

Combinînd (1) cu (4), obținem

$$F_v = 500 \text{ N} - T_o/8,66.$$

Combinînd (2) cu (3) obținem

$$F_o = T_o \cdot (5,0/8,66) + 150 \text{ N}$$

Rezolvînd aceste ecuații, obținem:

$$T_o = 505 \text{ N}$$

și

$$F_v = 442 \text{ N}.$$

Din (2) obținem

$$F_o = 505 \text{ N}.$$

Din (1) obținem

$$T_v = 58 \text{ N}.$$

Tensiunea din sîrmă va fi atunci

$$T = \sqrt{T_o^2 + T_v^2} = 509 \text{ N}$$

și articulația va exercita o forță orizontală de 505 N și o forță verticală de 442 N asupra barei.

În exemplele precedente am avut grijă să limităm numărul forțelor necunoscute la numărul ecuațiilor independente care leagă aceste forțe. Atunci cînd toate forțele acționează într-un plan, putem avea numai trei ecuații independente de echilibru, una pentru echilibrul de rotație

în jurul unei axe perpendiculare pe plan, și alte două ecuații pentru echilibrul de translație în plan. Totuși avem adesea mai mult decât trei forțe necunoscute. De exemplu în problema scării de la exemplul 2a, dacă înlăturăm ipoteza artificială a peretelui fără frecări, avem patru mărimi scalare necunoscute, și anume componentele orizontală și verticală ale forței care acționează asupra scării la perete și componentele orizontală și verticală ale forței care acționează asupra scării la sol. Deoarece avem numai trei ecuații scalare aceste forțe nu pot fi determinate. Atribuind o valoare uneia din forțele necunoscute, celelalte trei forțe pot fi determinate. Dar dacă nu avem nici o bază pentru a atribui vreo valoare particulară unei forțe necunoscute, există un număr infinit de soluții posibile din punct de vedere matematic. Trebuie de aceea să găsim o altă relație independentă pentru forțele necunoscute dacă vrem să rezolvăm problema în mod unic.

Un alt exemplu simplu de asemenea structuri nedeterminate este automobilul. În acest caz vrem să determinăm forțele exercitate de sol asupra fiecăreia din cele patru anvelope atunci când automobilul este în repaus pe o suprafață orizontală. Dacă presupunem că aceste forțe sînt perpendiculare pe sol avem patru mărimi scalare necunoscute. Toate celelalte forțe, cum este greutatea automobilului și a pasagerilor, acționează perpendicular pe sol. De aceea avem numai trei ecuații independente care dau condițiile de echilibru, una pentru echilibrul de translație în singura direcție a tuturor forțelor, și două pentru echilibrul de rotație în jurul a două axe perpendiculare între ele situate în planul orizontal. Iarăși soluția problemei este nedeterminată din punct de vedere matematic. O masă cu patru picioare avînd toate picioarele sale în contact cu podeaua reprezintă un exemplu analog.

Deoarece există în realitate o soluție unică a oricărei probleme fizice reale, trebuie desigur să găsim o bază fizică pentru relația independentă suplimentară dintre forțe care să ne permită să rezolvăm problema. Dificultatea se înlătură dacă ținem seama de faptul că structurile nu sînt niciodată perfect rigide așa cum le-am presupus în mod tacit. În realitate structurile noastre vor fi puțin deformatе. De exemplu anvelopele automobilului și pămîntul vor fi deformatе la fel ca și scara și peretele. Legile elasticității și proprietățile elastice ale structurii determină natura deformației și vor furniza relația suplimentară necesară dintre cele patru forțe. O analiză completă necesită de aceea nu numai legile mecanicii corpului rigid, ci și legile elasticității. În cursurile de tehnologie civilă și mecanică, se întîlnesc multe asemenea probleme, analizate în acest mod. Noi nu vom mai considera această chestiune aici.

14-5. Echilibrul stabil, instabil și neutru al corpurilor rigide într-un câmp gravitațional

În capitolul 8 am văzut că forța gravitațională este o forță conservativă. Pentru forțele conservative putem defini funcția energiei potențiale $E_p(x, y, z)$, unde E_p este legat de \vec{F} prin

$$F_x = -\partial E_p / \partial x, F_y = -\partial E_p / \partial y, F_z = -\partial E_p / \partial z.$$

În punctele unde $\partial E_p / \partial x$ este egal cu zero, o particulă supusă acestei forțe conservative va fi în echilibru de translație în direcția x , deoarece atunci F_x este egal cu zero. Analog, în punctele unde $\partial E_p / \partial y$ sau $\partial E_p / \partial z$ sînt nule, o particulă va fi în echilibru de translație în direcția y , respectiv z . Derivata lui E_p într-un punct va fi zero dacă E_p are o valoare extremă (maxim sau minim) în acel punct sau dacă E_p este constant în raport cu coordonata variabilă.

Dacă E_p este minim, particula se află în echilibru *stabil*; orice deplasare din această poziție va da naștere la o forță de restabilire care tinde să readucă particula la poziția de echilibru. Un alt mod de a enunța aceasta este de a spune că dacă un corp este în echilibru stabil, atunci trebuie efectuat lucru mecanic asupra lui de către un agent extern pentru a-i schimba poziția. Aceasta va duce la o creștere a energiei sale potențiale.

Dacă E_p este maxim, particula se află în echilibru *instabil*; orice deplasare din această poziție va da naștere la o forță care tinde să împingă particula mai departe de poziția de echilibru. În acest caz nu trebuie efectuat nici un fel de lucru mecanic asupra particulei de vreun agent extern pentru a-i schimba poziția; lucrul mecanic pentru deplasarea corpului este furnizat intern de către forța conservativă, ducînd la o descreștere a energiei potențiale.

Dacă E_p este constant, particula este în echilibru *neutru* sau *indiferent*. În acest caz o particulă poate fi deplasată ușor fără a suferi vreo forță de respingere sau de atracție.

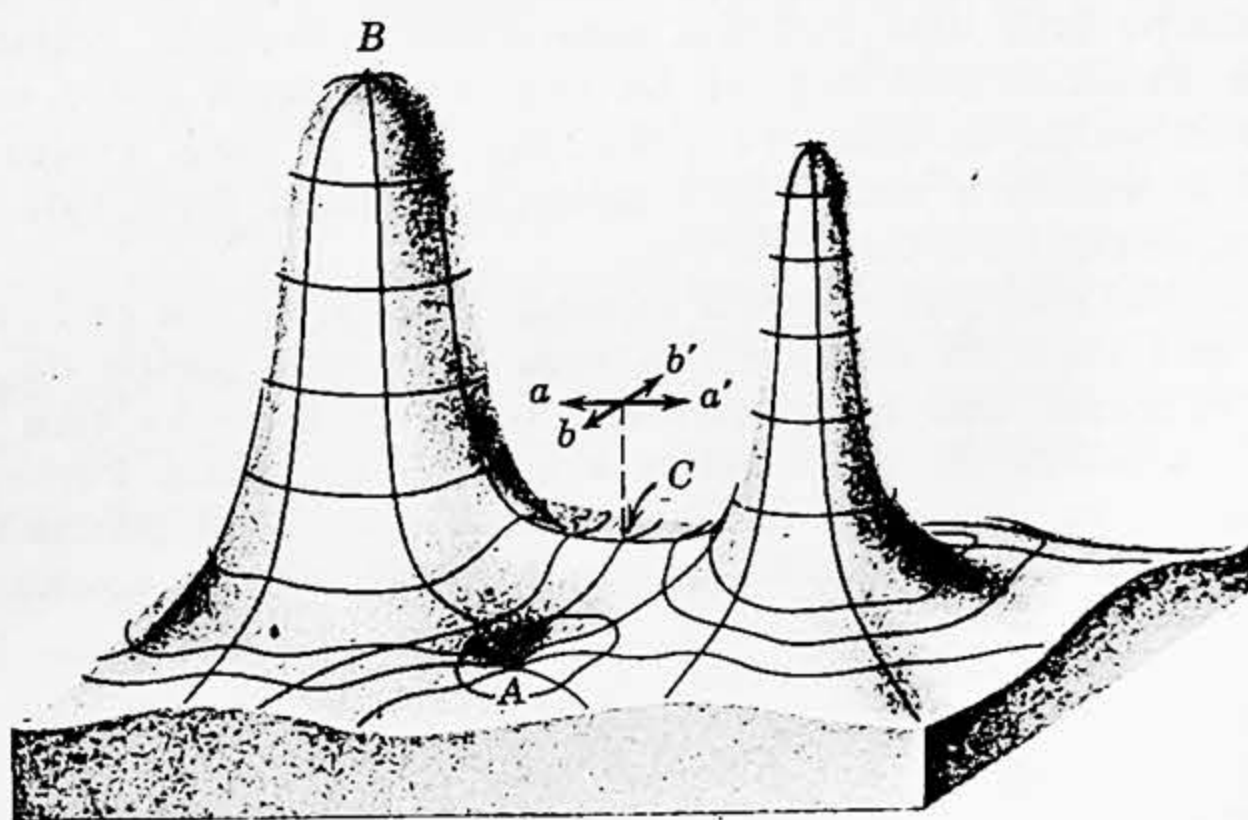


Figura 14-8. O suprafață potențială gravitațională, care poate fi privită ca o suprafață reală. O particulă așezată în A, B sau C rămîne în repaus; un plan tangent la oricare din aceste puncte este orizontal. Spunem că acolo particula este în echilibru. În A dacă deplasăm ușor particula, ea tinde să se întoarcă în A. A reprezintă un punct de echilibru stabil. În B dacă deplasăm particula ușor ea tinde să se îndepărteze și mai mult. Astfel, B reprezintă un punct de echilibru instabil. În C particula deplasată puțin în direcția aa' tinde să se întoarcă în C, dar dacă este deplasată în direcția bb', ea tinde să se depărteze și mai mult. C se cheamă *punct de șa* deoarece o șa are această formă. Nu este ilustrat echilibrul indiferent în care s-ar afla o particulă oriunde pe o suprafață plană orizontală.

Observăm că o particulă poate fi în echilibru în raport cu o coordonată fără a fi neapărat în echilibru în raport cu o altă coordonată, cum este de exemplu o minge care cade liber. Mai mult, o particulă poate fi în echilibru stabil în raport cu o coordonată și în echilibru instabil în raport cu o altă coordonată, cum este de exemplu o particulă într-un punct-șa (fig. 14-8).

Toate aceste observații se aplică particulelor (punctelor materiale), adică mișcării de translație. Să presupunem acum că studiem un corp rigid. Trebuie să considerăm atât echilibrul de rotație cât și echilibrul de translație. Problema unui rigid într-un câmp gravitațional este însă deosebit de simplă, deoarece toate forțele gravitaționale asupra particulelor rigidului pot fi considerate ca acționând într-un singur punct, atât în cazul translației cât și în cazul rotației. Putem înlocui întregul rigid, în cazul studierii echilibrului sub acțiunea forțelor gravitaționale, printr-o singură particulă având masa echivalentă în centrul de greutate.

De exemplu, să considerăm un cub în repaus așezat cu o față a sa pe o masă orizontală. Centrul de greutate este arătat în centrul secțiunii transversale centrale a cubului în figura 14-9, a. Să aplicăm o forță cubului astfel încât să-l rotim fără alunecare în jurul unei axe de-a lungul muchiei. Observăm că centrul de greutate va urca și asupra cubului trebuie efectuat lucru mecanic, care mărește energia sa potențială. Dacă forța este înlăturată, cubul tinde să revină la poziția sa inițială, energia sa potențială mărită fiind transformată în energie cinetică atunci când el cade înapoi. Această poziție inițială este deci o poziție de echilibru stabil. În termenii unei particule de masă echivalentă situată în centrul de greutate, acest proces este descris prin linia punctată care indică traiectoria urmată de centrul de greutate în timpul acestei mișcări. Se vede că particula are o energie potențială minimă în poziția de echilibru stabil, așa cum se cere. Putem conchide că rigidul va fi în echilibru stabil dacă aplicarea oricărei forțe ridică centrul de greutate al corpului și nu îl coboară.

Dacă cubul este rotit pînă cînd stă în echilibru pe o muchie ca în figura 14-9, b, atunci cubul este iarăși în echilibru. Se vede că această poziție de echilibru nu este stabilă. Aplicarea unei forțe orizontale oricît de slabe va face ca cubul să cadă din această poziție cu o descreștere a energiei potențiale. Particula de masă echivalentă situată în centrul de greutate urmează traiectoria punctată arătată. În poziția de echilibru instabil această particulă are o energie potențială maximă,

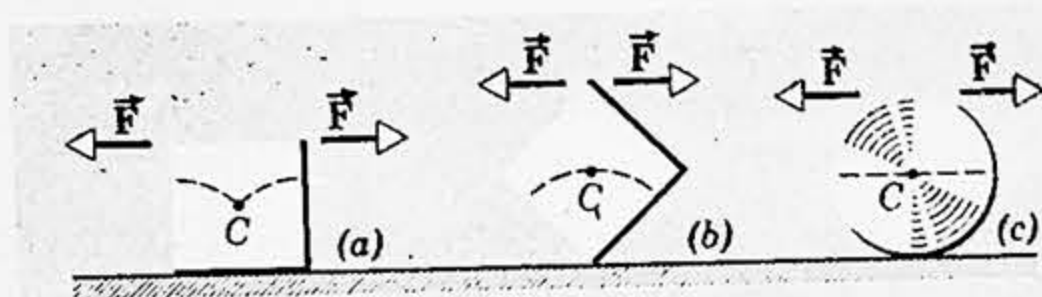


Figura 14-9. Echilibrul unui corp extins. (a) Un cub așezat pe o față se găsește în echilibru stabil deoarece centrul său de greutate C urcă atunci cînd cubul este răsturnat de o forță orizontală \vec{F} . (b) Un cub care stă pe o muchie se găsește în echilibru instabil, deoarece C coboară atunci cînd cubul este răsturnat de \vec{F} . (c) O sferă sau un cilindru se găsesc în echilibru indiferent deoarece C nici nu urcă și nici nu coboară atunci cînd se aplică \vec{F} . A se compara aceste criterii de echilibru cu cele date în figura 14-8. Cum sînt legate între ele criteriile din cele două figuri?

după cum trebuie. Putem trage concluzia că rigidul va fi în echilibru instabil dacă aplicarea oricărei forțe orizontale tinde să coboare centrul de greutate al corpului.

Echilibrul indiferent al unui corp rigid este ilustrat de o sferă așezată pe o masă orizontală (fig. 14-9, c). Dacă sfera este supusă la o forță orizontală, centrul de greutate nu este nici ridicat nici coborât, ci se mișcă de-a lungul liniei orizontale punctate. Energia potențială a sferei este constantă în timpul deplasării, cum este și energia potențială a particulei de masă echivalentă situată în centrul de greutate. Sistemul nu are nici o tendință de a se mișca în vreo direcție dacă forța aplicată este înlăturată. Un corp rigid va fi în echilibru indiferent dacă aplicarea oricărei forțe orizontale nici nu ridică nici nu coboară centrul de greutate al corpului.

În ce circumstanțe un corp rigid suspendat va fi în echilibru stabil? Când un corp rigid suspendat va fi în echilibru instabil și când va fi el în echilibru indiferent?

Întrebări

1. Constitue cele două ecuații (14-1) și (14-3) condițiile necesare și suficiente pentru echilibrul mecanic? Pentru echilibrul static?

2. O roată care se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul unei axe fixe se găsește în echilibru mecanic, deoarece asupra ei nu acționează nici o forță externă netă și nici un moment extern. Totuși, particulele care alcătuiesc roata suferă o accelerație centripetă \vec{a} îndreptată spre axă.

Deoarece $\vec{a} \neq 0$ cum putem spune că roata este în echilibru?

3. Să se dea mai multe exemple de corp care nu este în echilibru, chiar dacă rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra lui este nulă.

4. Dacă un corp nu este în echilibru de translație, va fi momentul față de orice punct egal cu zero dacă momentul față de un punct particular este zero?

5. Care se va uza și rupe mai repede, un hamac întins tare între doi copaci sau unul care se lasă puțin? Să se justifice răspunsurile.

6. O scară este în repaus cu capătul superior pe un perete și cu cel inferior pe sol. Când pericolul de alu-

necare este mai mare, atunci când un om stă la baza scării sau când stă în vârful scării? Să se explice.

7. În exemplul 6, dacă peretele ar fi aspru, ne-ar furniza oare legile empirice ale frecării condiția suplimentară necesară pentru a determina forța suplimentară (verticală) exercitată de perete asupra scării?

8. În exemplul 2, de ce nu este necesar să considerăm frecarea din articulație?

9. Un tablou atâră pe un perete cu ajutorul a două fire. Ce orientare trebuie să aibă firele pentru ca să sufere o tensiune minimă? Să se explice cum de este posibil echilibrul cu oricare orientare și tensiune, chiar dacă tabloul are o masă bine definită?

10. Să se arate cum se poate folosi un dinamometru pentru a cântări obiecte a căror greutate este mai mare decât indicația maximă a dinamometrului.

11. Coincide centrul de masă cu centrul de greutate pentru o clădire? Pentru un lac? În ce condiții diferența dintre centrul de masă și centrul de greutate al unui corp devine importantă?

12. Dacă un rigid este aruncat în aer fără rotație, el nu se va roti în timpul zborului, cu condiția ca rezistența aerului să poată fi neglijată. Ce implicație are acest rezultat simplu asupra poziției centrului de greutate?

13. Un bloc uniform avînd forma unui paralelipiped rectangular cu laturile în proporția 1:2:3, se află pe o suprafață orizontală. În care poziție, adică pe care dintre cele trei fețe, el este mai stabil, dacă este cazul?

14. Un virus aflat într-o centrifugă în rotație, umplută cu lichid, este în mișcare circulară uniformă

(adică într-o mișcare accelerată), văzut fiind de un observator din laborator. Un observator care se rotește odată cu centrifuga, va declara însă că particula de virus *nu* este accelerată. Să se explice cum virusul poate fi în echilibru pentru acest al doilea observator și pentru primul *nu*.

15. În capitolul 5 am definit forța cu ajutorul accelerației din relația $\vec{F} = m\vec{a}$. Pentru un corp în echilibru nu există însă nici un fel de accelerație. Cum putem atunci atribui sens forțelor care acționează asupra unui astfel de corp?

Probleme

1. Ce forță F , aplicată orizontal asupra axului unei roți, este necesară pentru a urca roata peste un obstacol de înălțime h ? Raza roții este r și greutatea sa G (fig. 14-10).

2. O grindă este dusă de trei oameni, un om la un capăt iar ceilalți doi susținînd grinda pe o bară transversală astfel plasată, încît sarcina este distribuită în mod egal asupra celor trei oameni. Să se afle unde este plasată bara? Se neglijează masa barei.

3. O riglă de un metru este în echilibru pe muchia unui cuțit în dreptul diviziunii 50,0 cm. Dacă două monede sînt lipite pe diviziunea 12,0 cm, rigla astfel încărcată este în echilibru

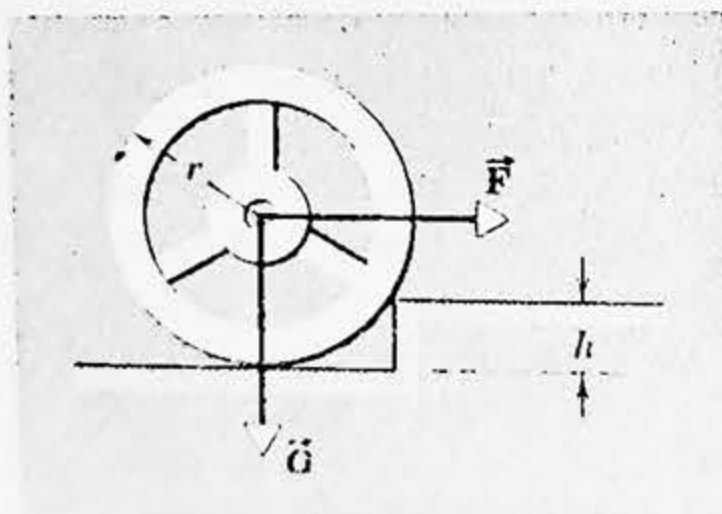


Figura 14-10.

în dreptul diviziunii 45,5 cm. O monedă are o masă de 5,0 g. Care este masa riglei? Încercați să realizați această experiență și verificați răspunsul dv. experimental.

4. Să se arate că dacă asupra unui corp în echilibru acționează numai trei forțe, ele trebuie să fie coplanare și liniile lor de acțiune trebuie să fie concurente într-un punct sau la infinit.

5. O secțiune circulară de rază r este tăiată dintr-un disc uniform de rază R , centrul găurii fiind la o distanță $R/2$ pînă la centrul discului inițial. Să se afle poziția centrului de greutate al corpului rezultat.

6. În figura 14-11 un om încearcă să-și scoată automobilul din noroi, pe o șosea. El leagă un capăt al unei sfori de bara de protecție a automobilului, iar celălalt capăt de un stîlp de



Figura 14-11.

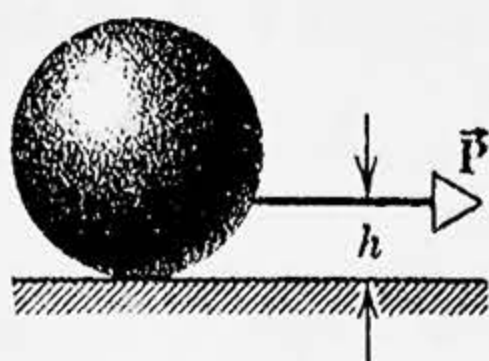


Figura 14-12.

telefon, aflat la o distanță de 20 m. El trage apoi lateral de mijlocul sforii cu o forță de 600 N, deplasând-i centrul cu 0,30 m față de direcția sa inițială și automobilul pornește. Ce forță exercită sfoara asupra automobilului? (Sfoara se întinde puțin sub acțiunea tensiunii.)

7. O sferă omogenă, de rază r și greutatea \vec{G} , alunecă pe podea sub acțiunea unei forțe orizontale constante \vec{P} aplicată unei sfori, așa cum se arată în figura 14-12. (a) Să se arate că dacă μ este coeficientul de frecare dintre sferă și podea, înălțimea h este dată de $h = r(1 - \mu G/P)$. (b) Să se arate că sfera nu este în echilibru de translație în aceste condiții. Există vreun punct în jurul căruia sfera este în echilibru de rotație? (c) Se poate face ca sfera să fie atât în echilibru de rotație cât și în echilibru de translație printr-o altă alegere a lui h ? ... Printr-o altă alegere a direcției lui \vec{P} ? Să se explice.

8. O bară orizontală subțire AB de greutate neglijabilă și de lungime l este prinsă printr-o articulație de un perete în punctul A și susținută în punctul B printr-o sîrmă subțire BC care face un unghi θ cu orizontala. Un corp de greutate P se poate deplasa de-a lungul barei, distanța lui pînă la perete fiind x (fig. 14-13). (a) Să se afle forța de tensiune T din sîrmă în funcție de x . (b) Să se afle componenta orizontală și cea verticală a forței exercitate asupra barei de articulație din A .

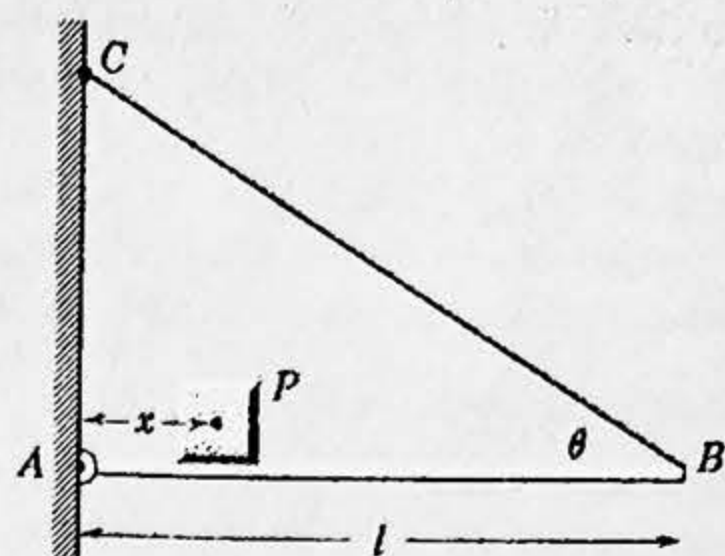


Figura 14-13.

9. O bară neuniformă de greutate \vec{G} este suspendată în repaus într-o poziție orizontală cu ajutorul a două fire, așa cum este arătat în figura 14-14. Unghiul pe care-l face un fir cu verticala este $\theta = 36,9^\circ$, iar celălalt fir face unghiul $\Phi = 53,1^\circ$ cu verticala. Dacă lungimea l a barei este de 6,0 m, să se calculeze distanța x de la capătul stîng pînă la centrul de greutate.

10. O problemă bine cunoscută este următoarea (vezi de exemplu *Scientific American*, noiembrie 1964, p. 128): cărămizi uniforme sînt puse una peste alta în așa fel încît să obținem o deplasare orizontală maximă. Aceasta se realizează dacă centrul de greutate al cărămizii din virf cade exact deasupra marginii cărămizii de sub ea, centrul de greutate al sistemului format din două cărămizi succesive de sus cade exact deasupra marginii următoarei cărămizi de sub ele etc. (a) Să se justifice acest criteriu pentru obținerea deplasării maxime. (b) Să se arate că dacă procesul



Figura 14-14.

continuă în jos, se poate obține o deplasare oricât de mare. (Martin Gardner afirmă în articolul citat: „Cu 52 cărți de joc, prima fiind plasată astfel încât capătul său este exact la marginea mesei, partea maximă leșită în afară ajunge la ceva mai mult de $2\frac{1}{4}$ din lungimea cărții...”). (c) Să presupunem acum că așezăm cărămizile uniforme astfel încât capătul uneia este deplasat față de cel al alteia de dedesubt cu o fracțiune constantă $1/n$ din lungimea l a unei cărămizi. Câte cărămizi N putem așeza în acest proces înainte ca stiva să cadă? Verificați plauzibilitatea răspunsului pentru $n=1$, $n=2$, $n=\infty$.

11. Patru cărămizi, fiecare de lungime l , sînt puse una peste alta (vezi fig. 14-15) în așa fel încît o parte din fiecare cărămidă depășește pe cea de dedesubt. Să se arate că deplasarea orizontală maximă de echilibru are loc atunci cînd: (a) cărămidă cea mai de sus este deplasată cu $l/2$ față de cărămidă de dedesubt, (b) cea de a doua cărămidă de sus este deplasată față de cea de sub ea cu $l/4$ și (c) cea de-a treia cărămidă de sus este deplasată față de cărămidă de la bază cu $l/6$.

12. O ușă de 2,0 m înălțime și 0,80 m lățime are o greutate 300 N. O balama situată la 0,30 m de vîrf și o altă balama situată la 0,30 m față de bază suportă fiecare jumătate din greutatea ușii. Se presupune că centrul de greutate se află în centrul geometric al ușii. Să se determine componenta orizontală și cea verticală a

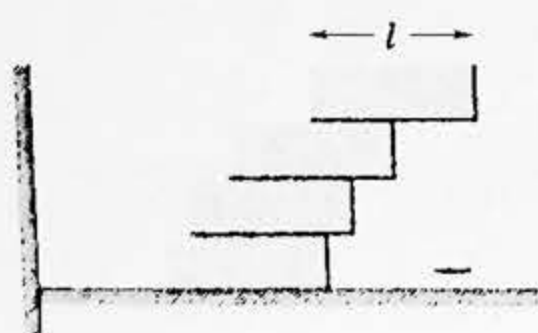


Figura 14-15.

forței exercitate de fiecare balama asupra ușii.

13. Un automobil cîntărind 1360 kg are lungimea oslei între roți de 3,05 m. Centrul său de greutate se află la 1,77 m în spatele axului frontal. Să se determine forța exercitată asupra fiecărei roți frontale (presupuse egale) și forța exercitată asupra fiecărei roți posterioare (presupuse egale) de către solul orizontal.

14. O balanță este formată dintr-o tijă rigidă, liberă să se rotească în jurul unui punct diferit de centrul tijei. Ea este echilibrată de corpuri cu mase inegale plasate pe talerele de la capetele tijei. Dacă un corp cu masa necunoscută m este plasat pe talerul stîng el este echilibrat de un corp cu masa m_1 așezat pe talerul drept, și analog, dacă acest corp de masă m este așezat pe talerul drept, el este echilibrat de un corp de masă m_2 de pe talerul stîng. Să se arate că

$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

și să se formuleze ipotezele făcute pentru a deduce această relație.

15. Pentru scara arătată în figura 14-16, AC și CE sînt de 2,4 m lungime și articulate în C . BD este o tijă de legătură de 0,75 m lungime fixată la jumătatea scării. Un om cu masa de 87 kg urcă 1,8 m pe scară.

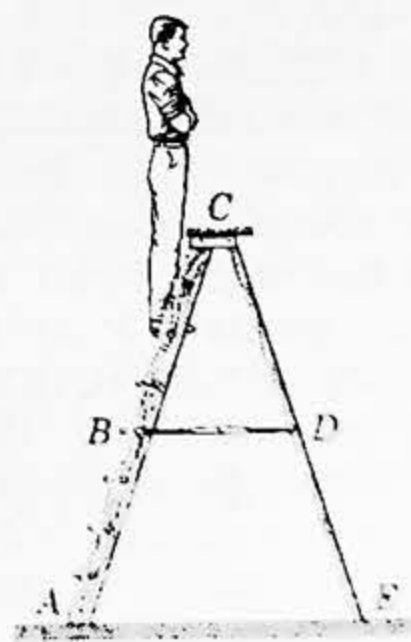


Figura 14-16.

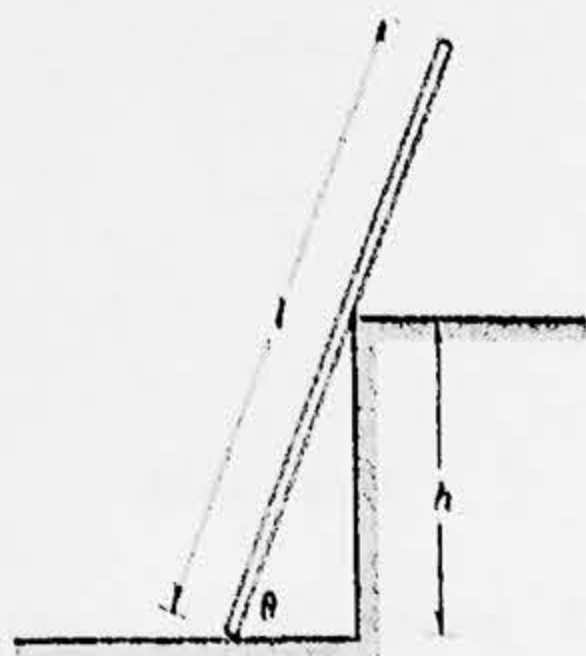


Figura 14-17.

Presupunând că podeaua este fără frecări și neglijând greutatea scării, să se afle tensiunea din tija de legătură și forțele exercitate de podea asupra scării. (Indicație: este util de izolat părți ale scării pentru a aplica condițiile de echilibru.)

16. O scindură cu greutatea de 500 N și lungimea $l=6,0$ m, stă pe sol și se sprijină pe o rolă fără frecări aflată în vârful unui perete de înălțime $h=3,0$ m (vezi fig. 14-17). Centrul de greutate al scindurii se află în centrul său. Scindura rămâne în echilibru pentru orice valoare a lui $\theta \geq 70^\circ$ dar alunecă dacă $\theta < 70^\circ$. (a) Să se traseze o diagramă care să arate toate forțele ce acționează asupra scindurii. (b) Să se afle coeficientul de frecare dintre scindură și sol.

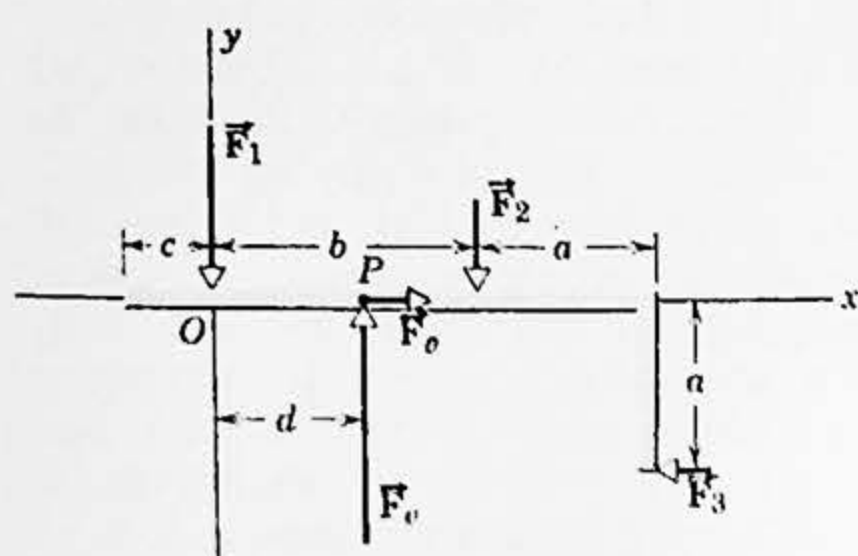


Figura 14-18.

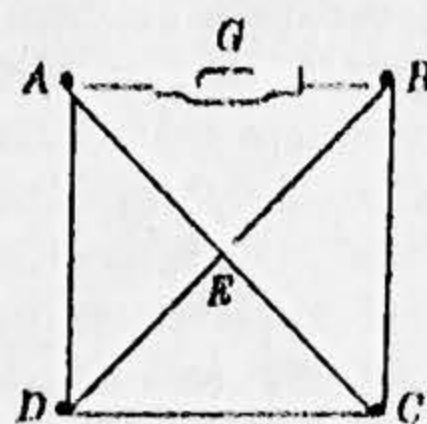


Figura 14-19.

17. Asupra structurii din fig. 14-18 acționează forțele \vec{F}_1 , \vec{F}_2 și \vec{F}_3 așa cum se arată în figură. Vrem să aducem structura în echilibru prin aplicarea unei forțe, într-un punct P, ale cărei componente vectoriale sînt \vec{F}_x și \vec{F}_y . Ni se dau valorile: $a=2,0$ m, $b=3,0$ m, $c=1,0$ m, $F_1=200$ N, $F_2=100$ N și $F_3=50$ N. Să se afle F_x , F_y și d .

18. Cu ajutorul unui întinzător cu filet G, în bara AB din cadrul pătratic ABCD, este produsă o forță de tensiune \vec{T} , așa cum se arată în fig. 14-19. Să se determine forțele produse în celelalte bare. Diagonalele AC și BD trec una pe lângă alta fără atingere în E. Să se arate cum considerațiile de simetrie pot duce la o simplificare considerabilă a acestei probleme și a altora similare.

19. Un lanț flexibil de greutate G este atârnat între două puncte, A și B, aflate la același nivel, așa cum se arată în figura 14-20. Să se afle: (a) forța exercitată de lanț asupra fiecărui capăt și (b) tensiunea din lanț în punctul inferior.



Figura 14-20.

20. O emisferă de rază r se află în repaus pe o masă orizontală. Să se arate că emisfera se va afla în echilibru stabil în jurul punctului central, de la fundul său, numai dacă centrul de masă al materialului cu care este umplută nu este mai sus de r .

31. Un cub de densitate uniformă și cu muchia a este în echilibru pe o suprafață cilindrică de rază r , ca în figura 14-21. Să se arate că criteriul pentru echilibrul stabil al cubului este

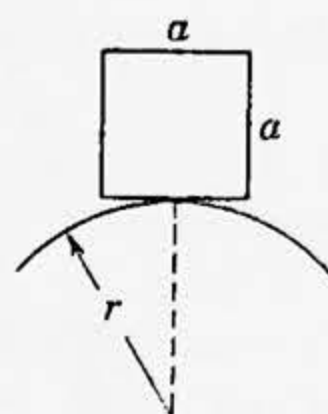


Figura 14-21.

$r > a/2$, presupunând că frecarea este suficientă pentru a împiedica alunecarea.

Oscilații

15-1. Oscilații

Orice mișcare care se repetă la intervale egale de timp se cheamă mișcare *periodică*. După cum vom vedea, deplasarea unei particule în mișcare periodică poate fi totdeauna exprimată prin funcțiile sinus și cosinus. Deoarece expresiilor care conțin aceste funcții li se aplică termenul de armonic, mișcarea periodică este adesea numită *mișcare armonică*.

Dacă o particulă în mișcare periodică se mișcă înainte și înapoi pe aceeași traiectorie, mișcarea se numește *oscilatorie sau vibratorie*. Lumea este plină de mișcări oscilatorii. Unele exemple sînt date de oscilațiile: balansierului unui ceasornic, corzii de vioară, unui corp legat de un resort, atomilor din molecule sau dintr-o rețea cristalină și moleculelor de aer într-o undă sonoră.

Multe corpuri care oscilează nu se mișcă înainte și înapoi între limite fixe precise, deoarece forțele de frecare disipează energia mișcării. Astfel, o coardă de vioară încetează să mai vibreze și un pendul încetează să oscileze. Numim astfel de mișcări — mișcări armonice *amortizate*. Deși nu putem elimina frecările din mișcările periodice ale obiectelor macroscopice, putem adesea anula efectul lor de amortizare furnizînd energie sistemelor oscilante, astfel încît să compensăm energia disipată prin frecare. Resortul unui ceasornic și greutatea care cade la un ceasornic cu pendul furnizează o energie externă în așa fel încît sistemul oscilant, adică balansierul sau pendulul, se mișcă ca și cum ar fi neamortizate.

Nu numai sistemele mecanice pot oscila. Undele radio, microundele și lumina vizibilă sînt vectori ai cîmpului electric și magnetic care oscilează. Astfel, circuitul oscilant (acordat) într-un aparat de radio și o cavitate metalică închisă pusă în legătură cu un generator de microunde,

pot oscila electromagnetic. Analogia este strînsă, fiind bazată pe faptul că oscilațiile mecanice și cele electromagnetice sînt descrise de aceleași ecuații matematice fundamentale. Vom evidenția această analogie în special în capitolele următoare.

Perioada T a unei mișcări armonice este timpul necesar pentru a efectua o oscilație completă sau un *ciclu*. Frecvența ν a mișcării este numărul oscilațiilor (sau ciclurilor) din unitatea de timp. Frecvența este deci inversul perioadei:

$$\nu = 1/T. \quad (15-1)$$

Unitatea de frecvență în sistemul MKS este ciclul pe secundă sau *hertzul* (Hz)¹. Poziția în care nu acționează nici o forță netă asupra particulei oscilante, se cheamă poziția ei de *echilibru*. Elongația (liniară sau unghiulară) este distanța (liniară sau unghiulară) a particulei oscilante pînă la poziția sa de echilibru în fiecare moment.

Să ne concentrăm atenția asupra unei particule care oscilează înainte și înapoi de-a lungul unei drepte între limite fixe. Elongația sa \vec{x} variază periodic ca mărime și sens. Viteza sa \vec{v} și accelerația \vec{a} variază de asemenea periodic în mărime și sens și, în baza relației $\vec{F} = m\vec{a}$, tot astfel variază și forța \vec{F} care acționează asupra particulei.

Forțele asociate cu mișcarea armonică sînt tipurile cele mai generale de forțe pe care le-am discutat pînă acum. În capitolele precedente am avut de a face numai cu forțe (și accelerații) constante. Mai tîrziu, cînd am considerat forțe care nu erau constante și variau în timp, am examinat o forță (și deci o accelerație) care variau ca direcție deși modulul ei era constant (forța centripetă de la paragraful 6-3) și o forță (și deci o accelerație) care varia ca modul, deși direcția sa era constantă (forța impulsivă de la paragraful 10-1). Alci în mișcarea armonică forța și accelerația variază atît ca sens cît și ca modul.

Din punctul de vedere al energiei putem spune că o particulă supusă mișcării armonice trece înainte și înapoi printr-un punct (poziția sa de echilibru) în care energia sa potențială este minimă. Un pendul care oscilează este un bun exemplu, energia sa potențială fiind minimă în punctul inferior al oscilațiilor adică în poziția de echilibru. Figura 15-1, a arată o particulă care oscilează între limitele x_1 și x_2 , O fiind poziția de echilibru. Figura 15-1, b arată curba corespunzătoare a energiei potențiale, care are o valoare minimă în acea poziție. Forța care acționează asupra particulei în orice punct derivă din energia potențială. Ea este dată de ecuația (8-7):

$$F = -dE_p/dx \quad (8-7)$$

și este arătată în figura 15-1, c. Forța este nulă în poziția de echilibru O , este îndreptată spre dreapta (adică are o valoare pozitivă) cînd particula

¹ Această unitate de frecvență este numită în cinstea lui Heinrich Hertz (1857—1894) ale cărui cercetări în electromagnetism au fost universal recunoscute ca oferind o confirmare experimentală a undelor electromagnetice prezise de Maxwell.

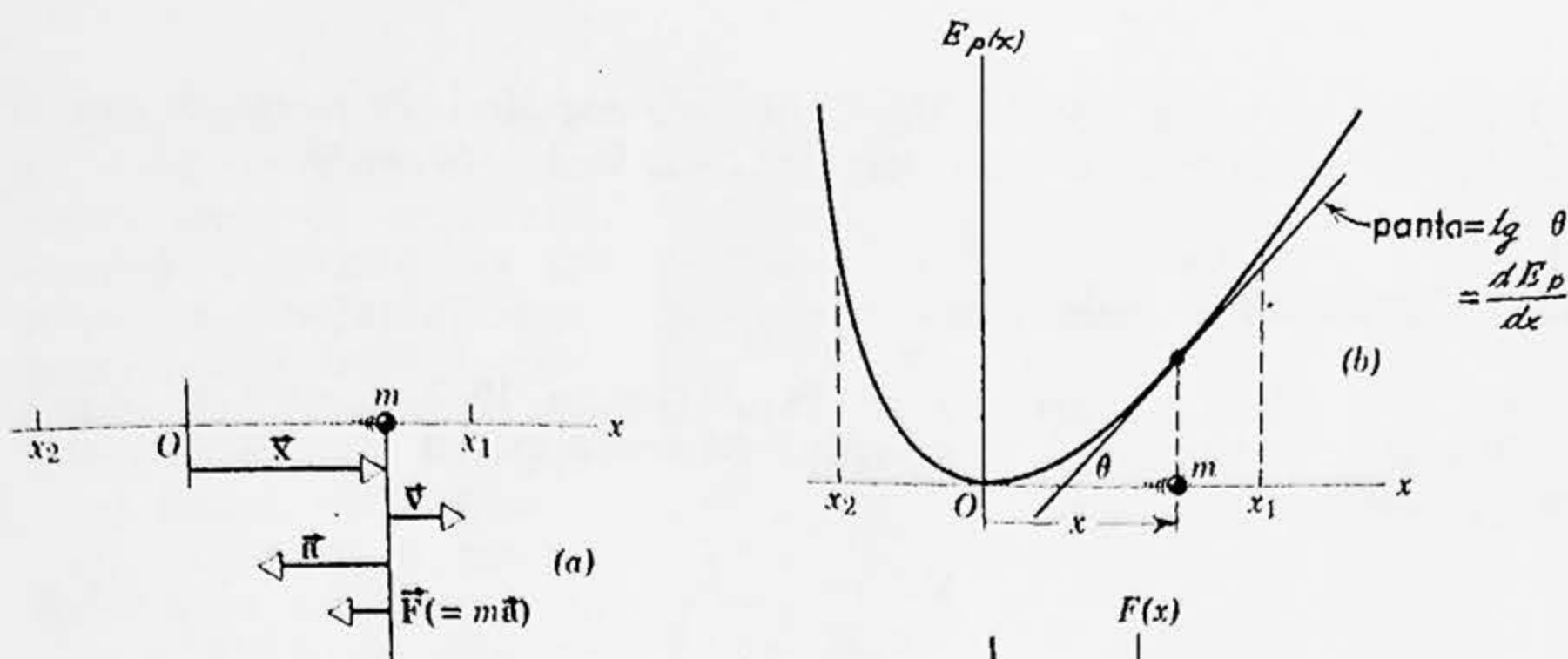


Figura 15-1. (a) O particulă de masă m oscilează armonic între punctele x_1 și x_2 , O fiind poziția de echilibru. (b) Energia potențială a particulei în funcție de poziție. Forța care acționează asupra particulei în punctul x este dată de $F = -dE_p/dx$. (c) Forța care acționează asupra particulei în funcție de x ; observăm că forța este dirijată spre poziția de echilibru.

este în stînga lui O și este îndreptată spre stînga (adică are o valoare negativă) cînd particula este în dreapta lui O . Forța este o *forță atractivă* (de *restabilire*) deoarece ea acționează totdeauna în sensul de a accelera particula către poziția de echilibru. Prin urmare în mișcarea armonică poziția de echilibru este totdeauna o poziție de *echilibru stabil*.

Energia mecanică totală E a unei particule oscilante este suma dintre energia sa cinetică și energia sa potențială:

$$E = E_c + E_p \quad (15-2)$$

în care E rămîne constant dacă nu acționează forțe neconservative cum este forța de frecare. Figura 15-2 arată pe E pentru mișcarea din figura 15-1. Să se observe cum ecuația (15-2) este satisfăcută pentru particula în poziția tipică arătată. Particula nu se poate mișca în afara limitelor x_1 și x_2 , deoarece în aceste regiuni E_p este mai mare decît E . Aceasta ar cere, după cum arată ecuația (15-2), o energie cinetică negativă, ceea ce este o imposibilitate.

Pentru un mediu înconjurător dat, adică pentru o funcție $E_p(x)$ dată, o particulă oscilantă poate avea mai multe energii depinzînd de modul în care ea a fost pusă în mișcare inițial. Astfel ener-

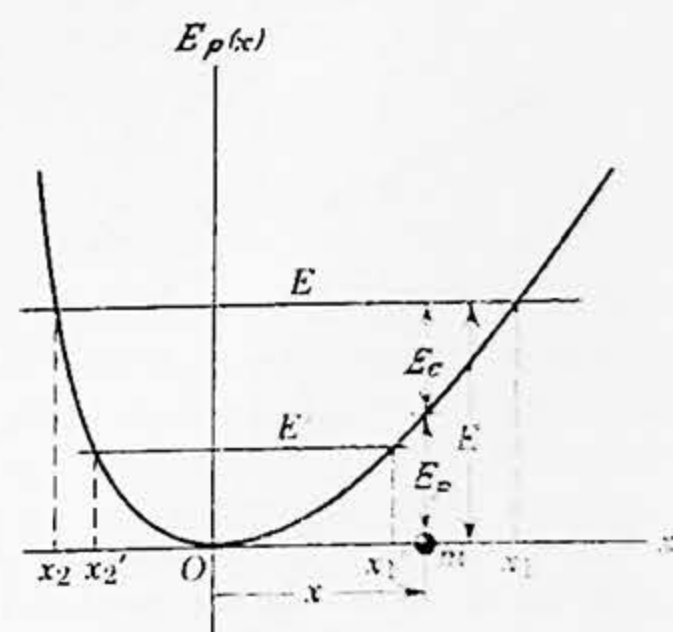


Figura 15-2. Este arătată energia mecanică totală E pentru mișcarea din figura 15-1. Dacă energia mecanică totală a particulei oscilante este redusă la E' , limitele oscilației se reduc la x'_1 și respectiv x'_2 .

gia totală poate fi E' , în loc de E , în care caz limitele oscilației vor fi x'_1 și x'_2 , așa cum se arată în figura 15-2, în loc de x_1 și x_2 .

15-2. Oscilatorul armonic simplu

Să considerăm o particulă oscilantă (figura 15-3, a) care se mișcă înainte și înapoi în jurul unei poziții de echilibru cu un potențial care variază astfel

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (15-3)$$

în care k este o constantă; vezi figura 15-3, b. Forța care acționează asupra particulei este dată de ecuația (8-7) sau

$$F(x) = -dE_p/dx = -d(\frac{1}{2} kx^2)/dx = -kx; \quad (15-4)$$

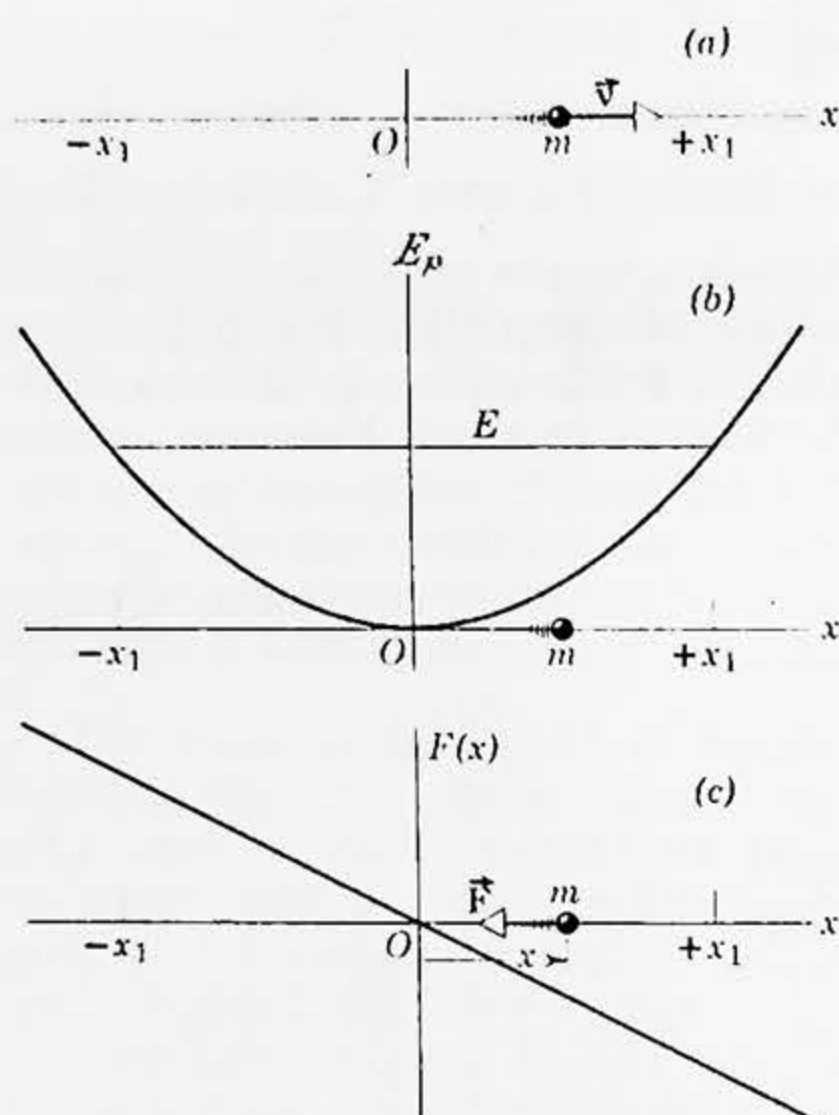


Figura 15-3. (a) O particulă de masă m oscilează într-o mișcare armonică simplă între punctele $+x_1$ și $-x_1$, O fiind poziția de echilibru. (b) Energia potențială și energia mecanică totală. (c) Forța care acționează asupra particulei. Studentul trebuie să compare această figură cu figura 15-1 care ilustrează cazul general al mișcării armonice.

vezi figura 15-3, c. O astfel de particulă oscilantă se cheamă *oscilator armonic simplu*, și mișcarea sa se numește *mișcare armonică simplă*. Într-o astfel de mișcare, după cum arată ecuația (15-3), curba energiei potențiale variază ca rădăcina pătrată din elongație și, după cum arată ecuația (15-4), forța care acționează asupra particulei este proporțională cu elongația, dar este de sens opus. În mișcarea armonică simplă limitele oscilației sînt egal depărtate de poziția de echilibru. Aceasta nu este adevărat pentru mișcarea mai generală din figura 15-1, care, deși armonică, nu este armonică simplă. Valoarea elongației maxime, adică cantitatea x_1 din figura 15-3, luată totdeauna pozitivă, se numește *amplitudinea* mișcării armonice simple.

Studentul va recunoaște ecuația (15-3) [$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$] ca expresia

energiei potențiale pentru un resort „ideal”, comprimat sau întins cu o distanță x ; vezi paragraful 8-4. În același paragraf resortul ideal a fost definit ca fiind unul în care forța exercitată de către resortul întins sau comprimat este dată de $F(x) = -kx$ (vezi ecuația 15-4), k fiind numit *constanta elastică*.

Prin urmare, un corp de masă m legat de un resort ideal cu constanta elastică k și liber să se miște pe o suprafață orizontală fără frecări, constituie un exemplu de oscilator armonic simplu (vezi figura 15-4). Observăm că există o poziție (poziția de echilibru; vezi figura 15-4, b), în care resortul nu exercită nici o forță asupra corpului. Dacă corpul este deplasat spre dreapta (ca în figura 15-4, a) forța exercitată de resort asupra corpului este îndreptată spre stînga și este dată de $F = -kx$. Dacă corpul este deplasat spre stînga (ca în figura 15-4, c) forța este îndreptată spre dreapta și este de asemenea dată de $F = -kx$. În fiecare caz forța este de tip *atractiv* (de restabilire). Mișcarea corpului oscilant este o *mișcare armonică simplă*.

Să aplicăm legea a doua a lui Newton, $F = ma$, mișcării din figura 15-4. În locul lui F substituim $-kx$ (din ecuația 15-4), în locul accelerației a punem $d^2x/dt^2 (= dv/dt)$. Aceasta ne dă

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (15-5)$$

Această ecuație conține derivate și de aceea se numește o *ecuație diferențială*. A rezolva această ecuație înseamnă a determina cum depinde elongația x a particulei de timpul t , astfel încît ecuația să fie verificată. Cînd știm cum depinde x de timp, cunoaștem mișcarea particulei; astfel ecuația (15-5) se numește *ecuația mișcării* unui oscilator armonic simplu. Vom rezolva această ecuație și vom descrie mișcarea în detaliu în paragraful următor.

Problema oscilatorului armonic simplu este importantă din două motive. Întîi, cele mai multe probleme care privesc vibrațiile mecanice, se reduc la problema oscilatorului armonic simplu la amplitudini mici de vibrație, sau la o combinație a unor astfel de vibrații. Aceasta este echivalent cu a spune că dacă considerăm o porțiune suficient de mică a curbei forței atractive din figura 15-1, c (în jurul originii), ea devine oricît de apropiată de o linie dreaptă care, după cum arată figura 15-3, c,

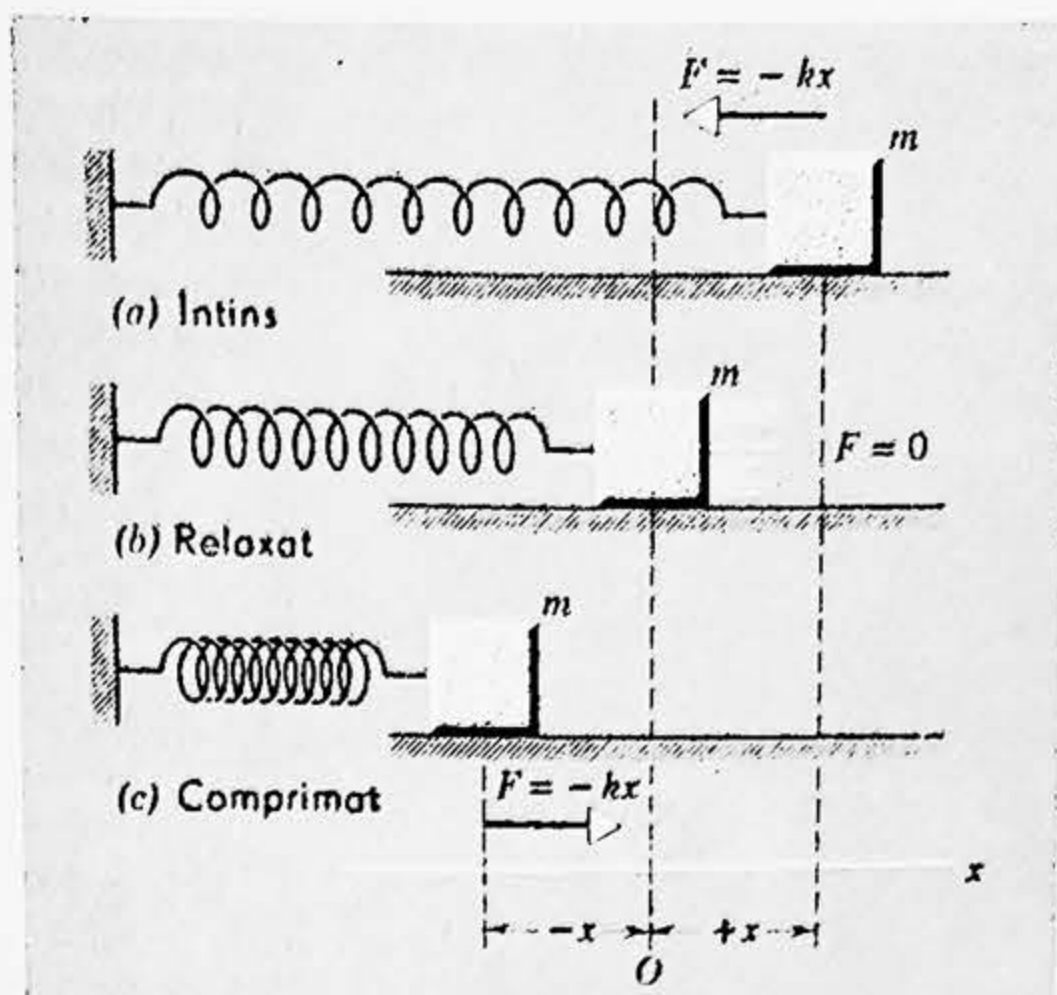


Figura 15-4. Un oscilator armonic simplu. Forța exercitată de resort este arătată în fiecare caz. Blocul aluneca pe o masă orizontală fără frecări.

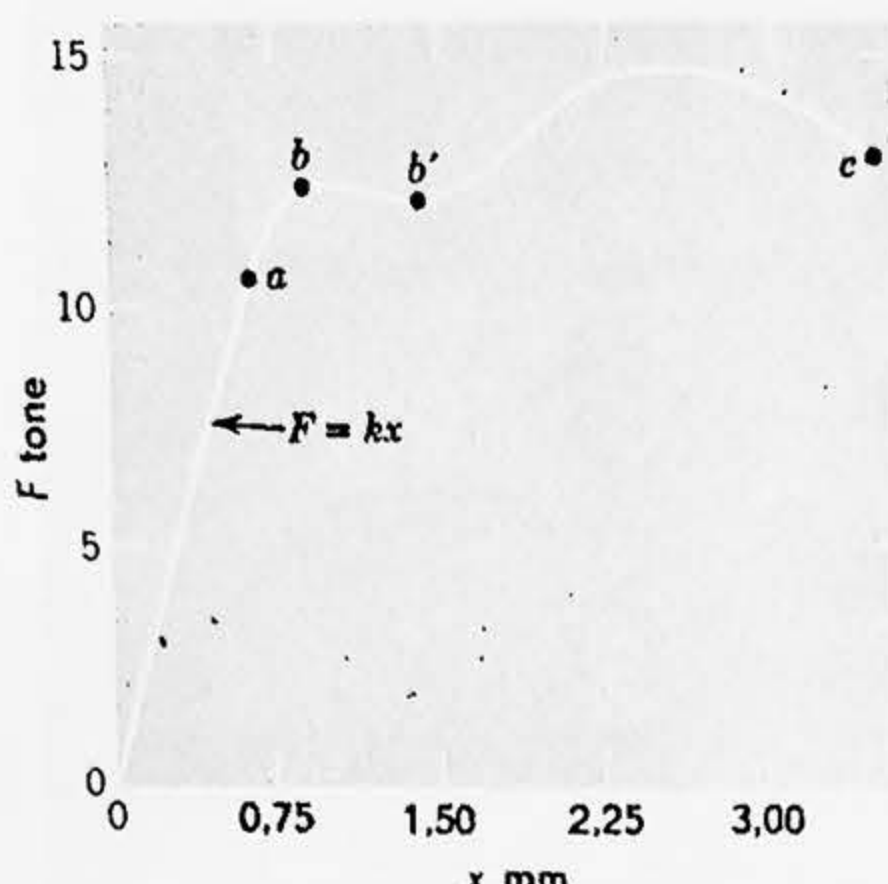


Figura 15-5. Un grafic tipic al forței aplicate F în funcție de alungirea rezultantă a unei bare de aluminiu supusă tensiunii (tracțiunii). Epruveta are o lungime de 30 cm și o secțiune transversală de 6 mm². Observăm că putem scrie $F=kx$ numai pentru porțiunea Oa , deoarece dincolo de acest punct panta nu mai este constantă, ci variază într-un mod complicat cu x . Într-un anumit punct b (limita de elasticitate) epruveta nu revine la lungimea sa inițială atunci când forța aplicată este înlăturată. Între b și b' alungirea crește, chiar dacă forța este menținută constantă; materialul curge ca un fluid viscos. În punctul c epruveta nu mai poate fi întinsă; orice creștere a alungirii duce la

ruperea epruvetei. Forța aplicată este egală ca mărime cu forța de restabilire, astfel încît nu apare semnul minus în relația $f=kx$.

este caracteristică pentru mișcarea armonică simplă. Cu alte cuvinte, curba energiei potențiale din figura 15-1, b pentru mișcarea oscilatorie generală se reduce la cea din figura 15-3, b pentru oscilația armonică simplă dacă amplitudinea vibrației este suficient de mică în jurul poziției de echilibru O .

În al doilea rînd, după cum am indicat, ecuații de tipul (15-5) se întîlnesc în multe probleme fizice, în acustică, în optică, în mecanică, în circuite electrice și chiar în fizica atomică. Oscilatorul armonic simplu evidențiază trăsături comune multor sisteme fizice.

Ecuația (15-4) ($F=-kx$) este o relație empirică, cunoscută sub numele de *legea lui Hooke*. Ea este un caz particular al unei relații mai generale, privind deformarea corpurilor elastice, descoperită de Robert Hooke (1635—1703)¹. Ea este valabilă la resorturi și alte corpuri elastice cu condiția ca deformarea să nu fie prea mare. Dacă solidul este deformat dincolo de un anumit punct, numit *limita elastică*, el nu va mai reveni la forma sa inițială după ce forța aplicată este îndepărtată (figura 15-5). Se constată că legea lui Hooke este valabilă pînă aproape de limita elastică pentru multe materiale obișnuite. Intervalul forțelor aplicate pentru care este valabilă legea lui Hooke se numește „regiunea de proporționalitate”. Dincolo de limita elastică, forța nu mai poate fi specificată printr-o funcție a energiei potențiale, deoarece forța depinde atunci de mulți factori inclusiv viteza de deformare și de istoria precedentă a solidului.

Observăm că forța de restabilire și energia potențială a oscilatorului armonic simplu sînt aceleași ca și pentru un solid deformat unidimen-

¹ Robert Hooke a exprimat legea sa în cuvintele latine: *Ut tensio sic vis* „(ex)tenșiunea este proporțională cu forța”. Deși el a descoperit această lege în 1660, el nu a publicat-o decît după 16 ani și atunci numai sub forma criptogrammei *c e i t i n o s s t t u v*. Hooke era animat de dorința de a stabili prioritatea sa fără a dezvălui informația altor cercetători.

sional în regiunea de proporționalitate. Dacă solidul deformat este lăsat liber, el va vibra, exact ca un oscilator armonic simplu. Prin urmare, atâta timp cât amplitudinea vibrațiilor este suficient de mică, adică atâta timp cât deformarea rămâne în regiunea de proporționalitate, vibrațiile mecanice se comportă exact ca oscilațiile armonice simple. Este ușor de generalizat această discuție pentru a arăta că orice problemă implicând vibrații mecanice de amplitudine mică în spațiul tridimensional se reduce la o combinație de oscilatori armonici simpli.

Coarda vibrantă sau membrana vibrantă, vibrațiile sonore, vibrațiile atomilor în solide și oscilațiile electrice sau acustice într-o cavitate, pot fi descrise toate într-o formă care este identică din punct de vedere matematic cu un sistem de oscilatori armonici. Analogia ne permite să rezolvăm probleme într-un domeniu folosind tehnica dezvoltată în alte domenii.

15-3. Mișcarea armonică simplă

Să rezolvăm acum ecuația mișcării oscilatorului armonic simplu,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (15-6)$$

Reamintim că orice sistem de masă m asupra căruia acționează o forță $F = -kx$ va fi guvernat de această ecuație. În cazul unui resort constanta de proporționalitate k este constanta elastică a resortului, determinată de rigiditatea resortului. În alte sisteme oscilante, constanta de proporționalitate k poate fi legată de alte trăsături fizice ale sistemului, după cum vom vedea mai târziu. Putem folosi resortul oscilant ca un prototip.

Ecuația (15-6) este o ecuație diferențială; ea dă o relație între o funcție de timp $x(t)$ și derivata sa de ordinul 2 în raport cu timpul d^2x/dt^2 . Pentru a afla poziția particulei în funcție de timp, trebuie să găsim o funcție $x(t)$ care să satisfacă această relație.

Putem retranscrie ecuația (15-6) astfel:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (15-7)$$

Ecuația (15-7) cere ca $x(t)$ să fie o funcție a cărei derivată de ordinul doi să fie însăși funcția cu semn schimbat, cu un factor constant de proporționalitate k/m . Știm de la calculul diferențial și integral că funcția sinus sau funcția cosinus au această proprietate.¹ De exemplu,

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \text{ și } \frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t.$$

Această proprietate nu se schimbă dacă înmulțim funcția cosinus cu o constantă A . Putem ține seama de faptul că funcția sinus verifică aceeași

¹ Mișcarea armonică este nu numai periodică ci și mărginită. Numai funcția sinus și funcția cosinus (sau combinații ale acestora) au ambele aceste proprietăți.

proprietate și de faptul că ecuația (15-7) conține un factor constant, scriind ca o soluție probabilă a ecuației (15-7)

$$x = A \cos (\omega t + \delta). \quad (15-8)$$

Deoarece

$$\cos (\omega t + \delta) = \cos \delta \cos \omega t - \sin \delta \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

constanta δ permite orice combinație de sinus și cosinus a soluțiilor. Prin urmare, cu constantele (deocamdată) necunoscute A , ω și δ am scris soluția generală a ecuației (15-7) cum am putut. Pentru a determina aceste constante astfel încât ecuația (15-8) să fie într-adevăr soluția ecuației (15-7), derivăm ecuația (15-8) de două ori în raport cu timpul. Avem

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin (\omega t + \delta)$$

și

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \delta).$$

Introducând aceasta în ecuația (15-7), obținem

$$-\omega^2 A \cos (\omega t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos (\omega t + \delta).$$

Prin urmare, dacă alegem constanta ω astfel încât

$$\omega^2 = k/m, \quad (15-9)$$

atunci

$$x = A \cos (\omega t + \delta)$$

este în adevăr o soluție a ecuației unui oscilator armonic simplu.

Constantele A și δ sînt încă nedeterminate și deci încă complet arbitrare. Aceasta înseamnă că orice alegere a lui A și δ va satisface oricum ecuația (15-7) astfel încît este posibilă o largă varietate de mișcări pentru oscilator. În adevăr, aceasta este o caracteristică a unei ecuații diferențiale a mișcării, deoarece o astfel de ecuație nu descrie numai o singură mișcare, ci un grup sau o familie de mișcări posibile care au anumite trăsături comune, dar diferite în alte privințe. În cazul nostru ω este comun tuturor mișcărilor permise, însă A și δ pot diferi de la o mișcare la alta. Vom vedea mai tîrziu că A și δ sînt determinate pentru o mișcare armonică particulară prin condițiile în care pornește sau începe mișcarea.

Să găsim semnificația fizică a constantei ω . Dacă timpul t din ecuația (15-8) crește cu $2\pi/\omega$, funcția devine

$$\begin{aligned} x &= A \cos [\omega(t + 2\pi/\omega) + \delta] = \\ &= A \cos (\omega t + 2\pi + \delta) = \\ &= A \cos (\omega t + \delta), \end{aligned}$$

adică funcția se repetă după un timp $2\pi/\omega$. Prin urmare $2\pi/\omega$ este perioada T a mișcării. Deoarece $\omega^2 = k/m$, avem

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (15-10)$$

Prin urmare, toate mișcările date de ecuația (15-7) au aceeași perioadă a oscilației și aceasta este determinată numai de masa m a particulei vibrante și de constanta elastică k . Frecvența ν a oscilatorului este numărul de vibrații complete în unitatea de timp și este dată de

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (15-11)$$

Prin urmare

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (15-12)$$

Mărimea ω se numește *frecvență unghiulară*; ea diferă de frecvența ν printr-un factor 2π . Ea are dimensiunea inversului unui timp (aceeași ca a vitezei unghiulare) și unitatea sa este rad/s. În paragraful 15-6 vom da un sens geometric acestei frecvențe unghiulare.

Constanta A are o semnificație fizică simplă. Funcția cosinus ia valori între -1 și 1 . *Elongația* x de la poziția centrală de echilibru $x=0$ are deci o valoare maximă egală cu A . Prin urmare $A(=x_{\max})$ este *amplitudinea* mișcării. Deoarece A nu este fixat de ecuația noastră diferențială, sînt posibile mișcări cu diferite amplitudini, dar toate au aceeași frecvență și aceeași perioadă. *Frecvența unei mișcări armonice simple este independentă de amplitudinea mișcării.*

Mărimea $(\omega t + \delta)$ se numește *faza* mișcării. Constanta δ se cheamă *constantă fazei* sau *faza inițială*. Două mișcări pot avea aceeași amplitudine și aceeași frecvență, dar să difere ca fază. Dacă de exemplu $\delta = -\pi/2$,

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \delta) = A \cos(\omega t - 90^\circ) = \\ &= A \sin \omega t, \end{aligned}$$

astfel încît elongația este zero la momentul $t=0$. Dacă $\delta=0$, elongația $x=A \cos \omega t$ este maximă în momentul $t=0$, alte elongații inițiale corespund la alte faze inițiale.

Amplitudinea A și faza inițială δ ale oscilației sînt determinate de poziția inițială și viteza inițială ale particulei. Aceste două condiții inițiale determină pe A și δ în mod unic¹. Odată mișcarea pornită însă, particula va continua să oscileze cu amplitudine constantă și faza inițială dată, cu o frecvență fixă, dacă alte forțe nu perturbă sistemul.

În figura (15-6) este reprezentată elongația x în funcție de t pentru mai multe mișcări armonice simple. Sînt făcute trei comparații. În figura 15-6, a, I și II au aceeași amplitudine și aceeași frecvență dar diferă ca fază prin $\delta = \pi/4$ sau 45° . În figura 15-6, b, I și III au aceeași frecvență și aceeași fază inițială dar diferă ca amplitudine printr-un

¹ Faza inițială poate fi mărită cu orice multiplu întreg de 2π sau de 360° și ea va descrie încă la fel de bine mișcarea.

factor 2. În figura 15-6, c I și IV au aceeași amplitudine și aceeași fază inițială dar diferă ca frecvență printr-un factor 1/2 sau ca perioadă printr-un factor 2. Studentul trebuie să studieze cu atenție aceste curbe pentru a deveni familiar cu terminologia folosită în mișcarea armonică simplă.

O altă trăsătură distinctivă a mișcării armonice simple este relația dintre elongația, viteza și accelerația particulei oscilante. Să comparăm aceste mărimi pentru curba I din figura 15-6, care este tipică. În figura 15-7 sînt reprezentate separat elongația x în funcție de timpul t , viteza $v=dx/dt$ în funcție de timpul t și accelerația $a=d^2x/dt^2$ în funcție de timpul t . Ecuațiile acestor curbe sînt

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \delta), \\v &= \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta), \\a &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta).\end{aligned}\tag{15-13}$$

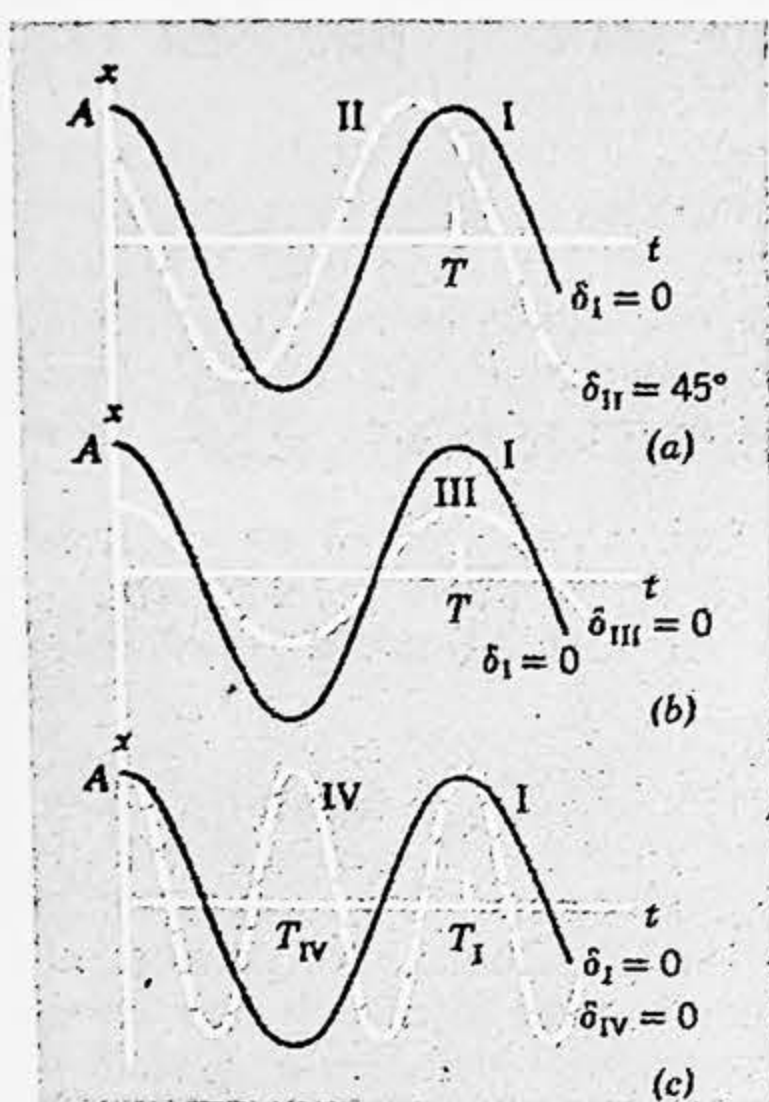


Figura 15-6. Mai multe soluții ale ecuației oscilatorului armonic simplu. (a) Cele două soluții au aceeași amplitudine și aceeași perioadă dar diferă ca fază cu 45° . (b) Cele două soluții au aceeași perioadă și aceeași fază inițială dar diferă ca amplitudine printr-un factor 2. (c) Cele două soluții au aceeași fază inițială și aceeași amplitudine dar diferă ca perioadă cu un factor 2.

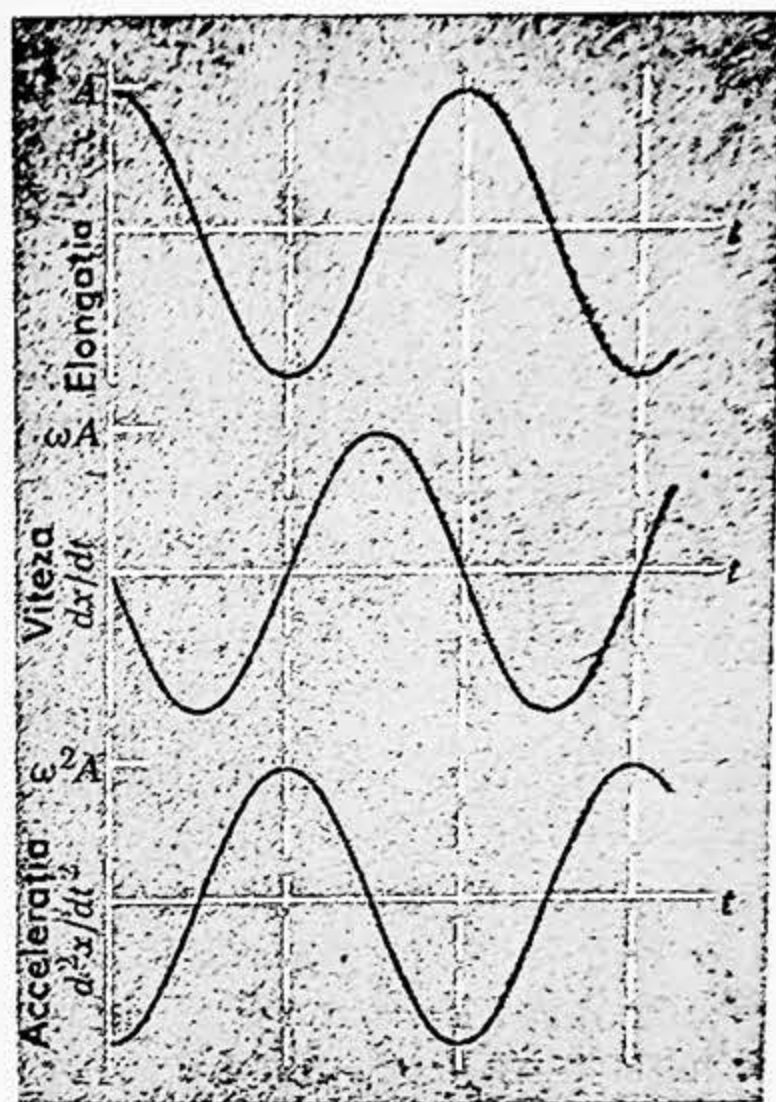


Figura 15-7. Relațiile dintre elongație, viteză și accelerație într-o mișcare armonică simplă. Faza inițială δ este nulă în acest caz particular, deoarece elongația este maximă la $t=0$, vezi ecuația (15-8).

Pentru cazul reprezentat am luat $\delta=0$. Unitățile și scalele pentru elongație, viteză și accelerație sînt omise pentru a simplifica comparația. Observăm că elongația maximă este A , viteza maximă este ωA și accelerația maximă este $\omega^2 A$.

Cînd elongația este maximă în fiecare sens, viteza este nulă, deoarece viteza trebuie să-și schimbe acolo sensul. Accelerația în acest moment, la fel ca și forța de restabilire, are o valoare maximă dar este îndreptată în sens opus față de elongație. Cînd elongația este nulă, viteza particulei este maximă și accelerația este nulă, corespunzător unei forțe de restabilire egală cu zero. Viteza crește cînd particula se mișcă spre poziția de echilibru și apoi descrește cînd ea se mișcă spre elongația maximă, exact ca pentru bila unui pendul.

În figura 15-8 se arată valorile instantanee ale lui \vec{x} , \vec{v} și \vec{a} pentru patru momente ale mișcării unei particule care oscilează la capătul unui resort.

15-4. Considerații energetice în mișcarea armonică simplă

Ecuția (15-2) ne spune că pentru mișcarea armonică, inclusiv mișcarea armonică simplă, în care nu acționează forțe disipative, energia

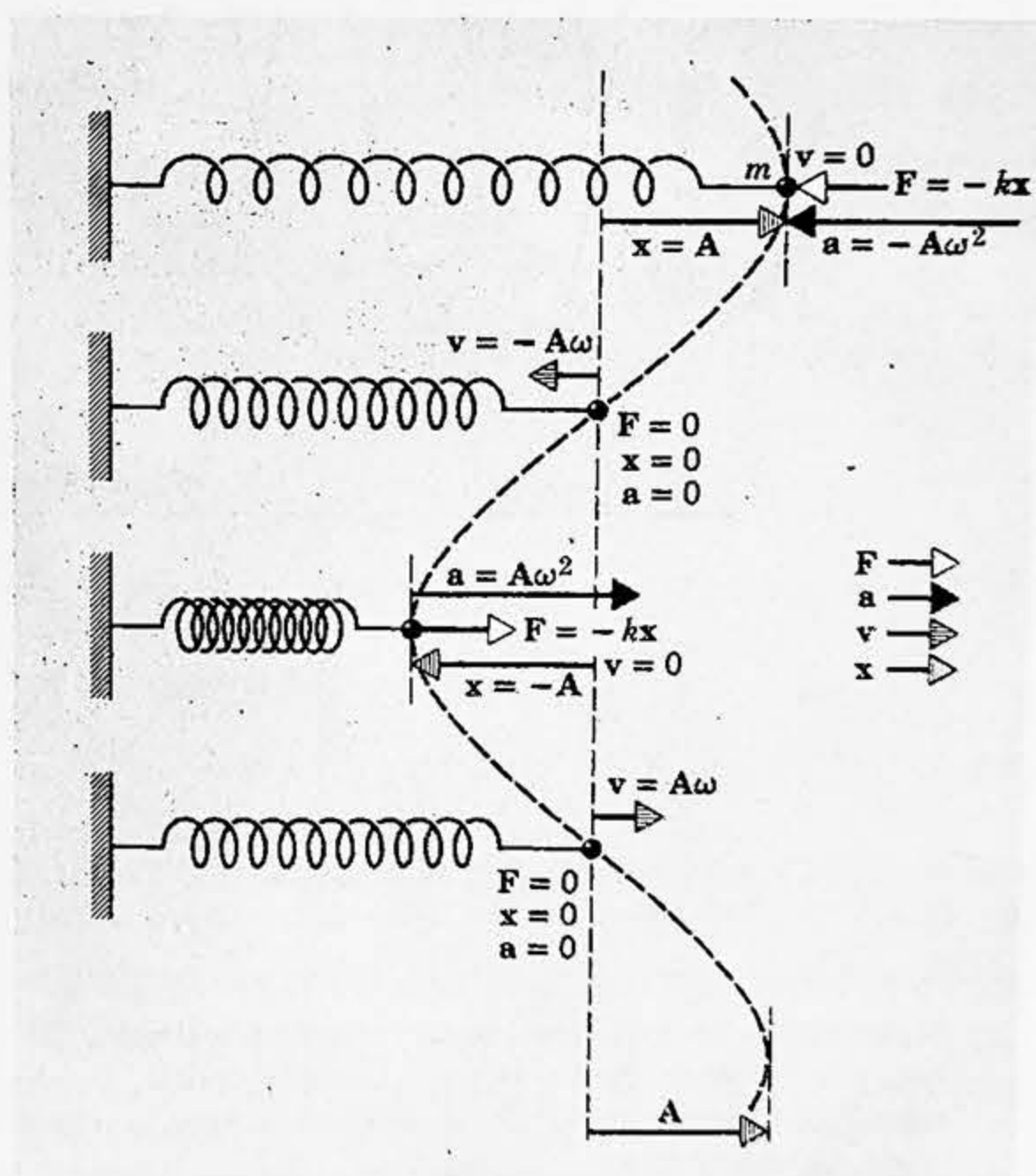


Figura 15-8. Forța care acționează asupra unei particule: accelerația, viteza și elongația particulei de masă m care execută o mișcare armonică simplă. A se compara cu figura 15-7.

mecanică totală $E (=E_c + E_p)$ se conservă. Putem studia acum aceasta mai detaliat în cazul particular al mișcării armonice simple, pentru care elongația este dată de

$$x = A \cos (\omega t + \delta). \quad (15-8)$$

Energia potențială E_p în fiecare moment este dată de

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega t + \delta). \quad (15-14)$$

Energia potențială are o valoare maximă egală cu $\frac{1}{2} kA^2$. În timpul mișcării energia potențială variază între zero și valoarea sa maximă, după cum arată curbele din figura 15-9, a și 15-9, b.

Energia cinetică E_c în fiecare moment este: $\frac{1}{2} mv^2$. Folosind relațiile

$$v = dx/dt = -\omega A \sin (\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = k/m,$$

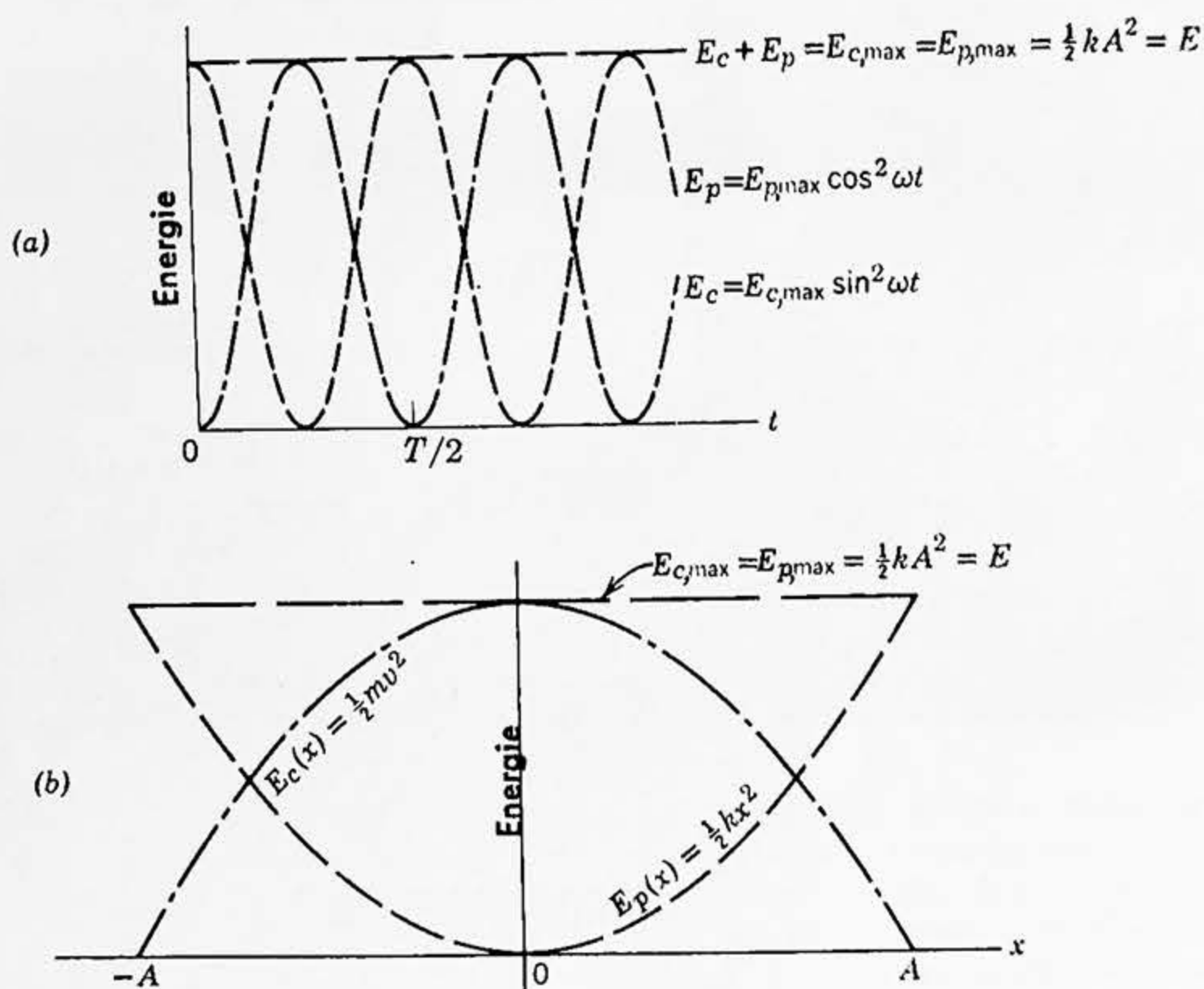


Figura 15-9. Energiile unui oscilator armonic simplu. (a) Energia potențială (---), energia cinetică (- - - -) și energia totală (—) reprezentate în funcție de timp. (b) Energia potențială, cinetică și totală reprezentate în funcție de elongație. A se compara cu figura 8-4.

obținem

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \delta) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 (\omega t + \delta). \quad (15-15)$$

Energia cinetică are deci o valoare maximă egală cu $\frac{1}{2} kA^2$ sau $\frac{1}{2} m(\omega A)^2$, în concordanță cu viteza maximă ωA , notată anterior. În timpul mișcării energia cinetică variază între zero și valoarea sa maximă, așa cum este arătat de curbele din figura 15-9, a și 15-9, b.

Energia mecanică totală este egală cu suma dintre energia cinetică și energia potențială. Folosind ecuațiile (15-14) și (15-15), obținem

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 (\omega t + \delta) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega t + \delta) = \\ &= \frac{1}{2} kA^2 \end{aligned} \quad (15-16)$$

Vedem că energia mecanică totală este constantă, după cum era de așteptat, și are valoarea $\frac{1}{2} kA^2$. În punctul de elongație maximă energia cinetică este nulă, însă energia potențială are valoarea $\frac{1}{2} kA^2$. În poziția de echilibru, energia potențială este nulă, însă energia cinetică are valoarea $\frac{1}{2} kA^2$. În alte poziții energia cinetică și energia potențială contribuie fiecare la energia totală, suma lor fiind totdeauna $\frac{1}{2} kA^2$. Această energie totală constantă este arătată în figura 15-9, a și 15-9, b. *Energia totală a unei particule care execută o mișcare armonică simplă este proporțională cu pătratul amplitudinii mișcării.* Este clar din figura 15-9, a că energia cinetică medie pentru mișcarea pe timpul unei perioade este exact egală cu energia potențială medie și că fiecare din aceste valori medii este $\frac{1}{4} kA^2$.

Ecuația (15-16) poate fi scrisă sub forma generală astfel

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2. \quad (15-17)$$

Din această relație obținem $v^2 = (k/m)(A^2 - x^2)$ sau

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}. \quad (15-18)$$

Această relație arată clar că viteza este maximă în poziția de echilibru $x=0$ și este nulă la elongația maximă $x=A$. În adevăr, putem pleca de la principiul conservării energiei, ecuația (15-17) (în care $\frac{1}{2} kA^2 = E$) și prin integrarea ecuației (15-18) se obține elongația în funcție de timp. Rezultatul este identic cu ecuația (15-8) pe care am dedus-o din ecuația diferențială a mișcării, ecuația (15-6). (Vezi problema 18.)

Efectul forțelor disipative va fi discutat în paragraful 15-9.

Exemplul 1. Resortul orizontal din figura 15-4 este alungit cu 3,0 cm de la poziția sa de echilibru atunci când asupra lui acționează o forță de 6,0 N. După aceasta, de capătul resortului este legat un corp de 15 N și deplasat cu 4,0 cm de-a lungul mesei orizontale fără frecări, de la poziția de echilibru. Corpul este apoi lăsat liber și execută o mișcare armonică simplă.

(a) Care este constanta elastică a resortului?

O forță de 6,0 N aplicată resortului produce o alungire de 3,0 cm. Prin urmare

$$k = F/x = 6,0 \text{ N} / 0,030 \text{ m} = 200 \text{ N/m}.$$

De ce n-am folosit aici relația $k = -F/x$?

(b) Care este forța exercitată de resort asupra corpului de 15 N exact înainte de a fi lăsat liber?

Resortul este alungit cu 4,0 cm. Prin urmare forța exercitată de către resort este

$$F = -kx = -(200 \text{ N/m})(0,040) = -8,0 \text{ N}.$$

Semnul minus arată că forța este îndreptată în sensul opus elongației.

(c) Care este perioada oscilațiilor după eliberarea corpului?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{15/9,8}{200}} \text{ s} = 0,55 \text{ s}.$$

Aceasta corespunde unei frecvențe ν ($=1/T$) de $1,8 \text{ s}^{-1}$ și unei frecvențe unghiulare ω ($=2\pi\nu$) de $11,4 \text{ rad/s}$.

(d) Care este amplitudinea mișcării?

Elongația maximă corespunde energiei cinetice nule și energiei potențiale maxime. Aceasta este condiția inițială înainte de a lăsa corpul liber, astfel încât amplitudinea este chiar elongația inițială de 4,0 cm. Prin urmare, $A = 4,0 \text{ cm}$.

(e) Care este viteza maximă a corpului care vibrează?

Din ecuația (15-13), $v_{\max} = \omega A = (2\pi/T)A$,

$$v_{\max} = 11,4 \text{ s}^{-1} \cdot 0,040 = 0,46 \text{ m/s}.$$

Viteza maximă are loc în poziția de echilibru, unde $x = 0$. Această valoare este luată de două ori în fiecare perioadă, viteza fiind $-0,46 \text{ m/s}$ când corpul trece prin $x = 0$ prima dată după eliberare și $+0,46 \text{ m/s}$ când corpul trece prin $x = 0$ pe drumul de întoarcere.

(f) Care este accelerația maximă a corpului?

Din ecuația (15-13) rezultă $a_{\max} = \omega^2 A = (k/m)A$,

$$a_{\max} = \frac{200}{15/9,8} 0,040 \text{ m/s}^2 = 5,2 \text{ m/s}^2.$$

Accelerația maximă are loc la capetele drumului unde $x = \pm A$ și $v = 0$, prin urmare, $a = -5,2 \text{ m/s}^2$ pentru $x = +A$ și $a = +5,2 \text{ m/s}^2$ pentru $x = -A$, accelerația și elongația fiind îndreptate în sensuri opuse.

(g) Să se calculeze viteza, accelerația, energia cinetică și energia potențială a corpului în momentul când el a parcurs jumătate din drumul dintre poziția sa inițială și centrul mișcării.

În acest punct $x = A/2 = 0,020$ m, astfel încît din ecuația (15-18) avem:

$$v = -\frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= -11,4 \text{ s}^{-1} \sqrt{(0,040)^2 - (0,020)^2} \text{ m} = -0,395 \text{ m/s},$$

$$a = -\frac{k}{m} x = -\frac{200}{15/9,8} 0,020 \text{ m/s}^2 = -2,6 \text{ m/s}^2,$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{9,8} (0,395)^2 \text{ J} \cong 0,12 \text{ J},$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (0,020)^2 \text{ J} = 0,040 \text{ J}.$$

(h) Să se calculeze energia totală a sistemului oscilant.

Deoarece energia totală se conservă, o putem calcula în orice etapă a mișcării. Folosind rezultatele precedente, obținem:

$$E = E_c + E_p = 0,12 + 0,04 = 0,16 \text{ J (particula în punctul } x = A/2).$$

$$E = E_{p, \max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,040^2 = 0,16 \text{ J, (particula în punctul } x = A).$$

$$E = E_{c, \max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{9,8} 0,46^2 = 0,16 \text{ J, (particula în punctul } x = 0).$$

(i) Care este elongația corpului în funcție de timp?

Avem în general

$$x = A \cos(\omega t + \delta).$$

Am găsit deja că $A = 4,0$ cm. Trebuie să determinăm acum pe ω și δ . Obținem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,55} = 11,4 \text{ rad/s},$$

astfel încît în unitățile noastre,

$$x = 0,040 \cos(11,4t + \delta)$$

În momentul $t = 0$, $x = 4,0$ cm, astfel încît în acel moment

$$x = 0,040 \cos \delta = 0,040$$

sau

$$\delta = 0 \text{ rad}.$$

Prin urmare, cu $A = 4,0$ cm, $\omega = 11,4$ rad/s și $\delta = 0$ rad, obținem

$$x = 0,040 \cos 11,4 t.$$

Aceasta descrie mișcarea corpului, în care x este în metri, t este în secunde și unghiul $11,4 t$ este în radiani.

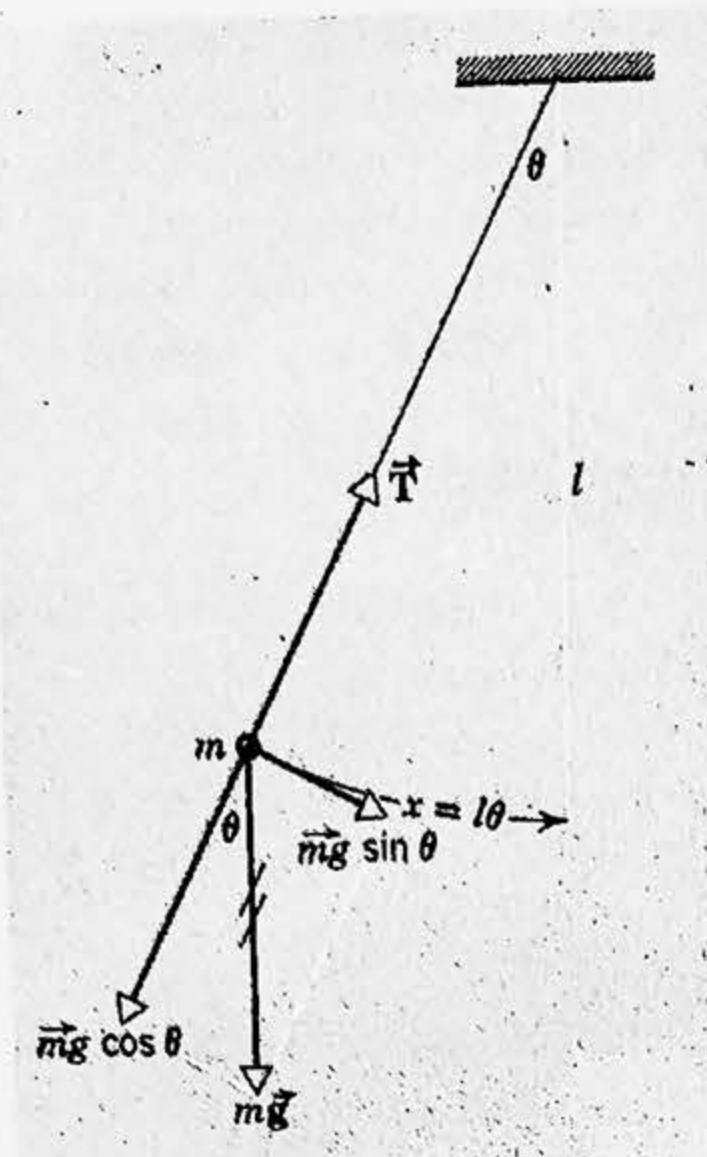


Figura 15-10. Forțele care acționează asupra unui pendul simplu sînt tensiunea \vec{T} din fir și greutatea \vec{mg} a corpului de masă m . Sînt notate mărimile componentelor radială și tangențială ale lui \vec{mg} .

un arc de cerc. Componenta tangențială este forța de restabilire care acționează asupra lui m cu tendința de a-l readuce în poziția de echilibru. Prin urmare, forța de restabilire este

$$F = -mg \sin \theta.$$

Observăm că forța de restabilire nu este proporțională cu elongația unghiulară θ , ci cu $\sin \theta$. Mișcarea rezultantă nu este deci o mișcare armonică simplă. Dacă însă unghiul θ este mic, $\sin \theta$ este foarte apropiat de θ exprimat în radiani¹. Deplasarea de-a lungul arcului este $x = l\theta$ și pentru unghiuri mici aceasta este aproape o mișcare rectilinie. Prin urmare, presupunînd că

$$\sin \theta \cong \theta,$$

¹ De exemplu		Diferența, %
$\theta = 0^\circ = 0,0000 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0000$	0
$\theta = 2^\circ = 0,0349 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0349$	0,00
$\theta = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0872$	0,11
$\theta = 10^\circ = 0,1745 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,1736$	0,51
$\theta = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,2588$	1,14

15-5. Aplicații ale mișcării armonice simple

Vom considera aici cîteva sisteme fizice care au o mișcare armonică simplă. Vom discuta altele din cînd în cînd în cuprinsul cărții.

Pendulul simplu. Un pendul simplu este un corp idealizat constînd dintr-un punct material, suspendat de un fir inextensibil ușor. Deplasat fiind într-o parte de la poziția sa de echilibru și lăsat liber, pendulul oscilează într-un plan vertical sub influența gravitației. Mișcarea este periodică și oscilatorie. Vrem să determinăm perioada mișcării.

Figura 15-10 arată un pendul de lungime l , particula de masă m , care formează un unghi θ cu verticala. Forțele care acționează asupra lui m sînt \vec{mg} , forța gravitațională, și \vec{T} , tensiunea din fir. Alegem axele: una tangentă la cercul mișcării și cealaltă de-a lungul razei.

Descompunem pe \vec{mg} într-o componentă radială de mărime $mg \cos \theta$ și o componentă tangențială de mărime $mg \sin \theta$. Componentele radiale ale forțelor furnizează accelerația centripetă necesară pentru a menține particula în mișcare pe

un arc de cerc. Componenta tangențială este forța de restabilire care acționează asupra lui m cu tendința de a-l readuce în poziția de echilibru. Prin urmare, forța de restabilire este

$$F = -mg \sin \theta.$$

Observăm că forța de restabilire nu este proporțională cu elongația unghiulară θ , ci cu $\sin \theta$. Mișcarea rezultantă nu este deci o mișcare armonică simplă. Dacă însă unghiul θ este mic, $\sin \theta$ este foarte apropiat de θ exprimat în radiani¹. Deplasarea de-a lungul arcului este $x = l\theta$ și pentru unghiuri mici aceasta este aproape o mișcare rectilinie. Prin urmare, presupunînd că

$$\sin \theta \cong \theta,$$

¹ De exemplu		Diferența, %
$\theta = 0^\circ = 0,0000 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0000$	0
$\theta = 2^\circ = 0,0349 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0349$	0,00
$\theta = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0872$	0,11
$\theta = 10^\circ = 0,1745 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,1736$	0,51
$\theta = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,2588$	1,14

obținem

$$F = -mg \theta = -mg \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x.$$

Pentru deplasări mici forța de restabilire este deci proporțională cu deplasarea și este îndreptată în sens opus. Acesta este exact criteriul mișcării armonice simple. Constanta mg/l reprezintă constanta k din legea $F = -kx$. Să se verifice dimensiunile lui k și mg/l . Perioada unui pendul simplu, în cazul amplitudinilor mici, este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/l}} \text{ sau } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15-19)$$

Observăm că perioada este independentă de masa particulei suspendate.

Dacă amplitudinea oscilațiilor nu este mică, formula generală pentru perioadă este următoarea

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_m}{2} + \dots \right) \quad (15-20)$$

Aici θ_m este elongația unghiulară maximă, iar termenii următori devin din ce în ce mai mici. Perioada poate fi atunci calculată cu orice grad de precizie luând un număr suficient de termeni din seria infinită. Dacă $\theta_m = 15^\circ$, corespunzător unei deschideri unghiulare totale de 30° , perioada reală diferă de cea dată de ecuația (15-19) cu mai puțin decât $0,5\%$.

Deoarece perioada unui pendul simplu este practic independentă de amplitudine, pendulul este util în calitate de indicator de timp (ceasornic). Pe măsură ce forțele de amortizare reduc amplitudinea oscilațiilor, perioada rămâne aproape neschimbată. Într-un ceasornic cu pendul energia este furnizată automat de un mecanism regulator special pentru compensarea pierderilor prin frecare. Ceasornicul cu pendul cu mecanismul regulator a fost inventat de Christian Huygens (1629—1695).

Pendulul simplu ne oferă de asemenea o metodă convenabilă pentru măsurarea valorii lui g , accelerația gravitațională. Nu este nevoie să realizăm experiența cu căderea liberă a bilei, ci în schimb măsurăm aici pur și simplu pe l și pe T .

Pendulul de torsiune. În figura 15-11 se arată un disc suspendat de un fir prins de centrul de masă al discului. Firul este fixat de un suport solid și de disc. În poziția de echilibru a discului este trasată o linie radială de la centrul său pînă la P așa cum se arată în figură. Dacă discul este rotit într-un plan orizontal pînă în poziția radială Q , firul va fi răsucit. Firul răsucit va exercita un moment asupra discului tinzînd să-l readucă în poziția P . Acesta este momentul de restabilire.

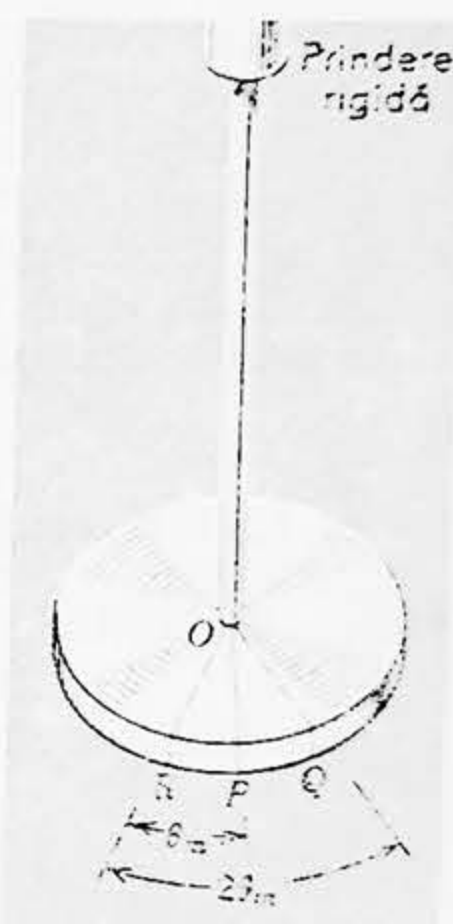


Figura 15-11. Pendulul de torsiune. Linia trasată de la centru pînă la P oscilează între Q și R , măturînd un unghi $2\theta_m$ unde θ_m este amplitudinea unghiulară a mișcării.

Pentru unghiuri de răsucire mici, momentul de restabilire este proporțional cu mărimea unghiului de răsucire adică cu elongația unghiulară (legea lui Hooke), astfel încât

$$\mathcal{M} = -k\theta. \quad (15-21)$$

Aici k este o constantă care depinde de proprietățile firului și se numește *constantă de torsiune*. Semnul minus arată că momentul este îndreptat în sens opus elongației unghiulare θ . Ecuația (15-21) reprezintă condiția pentru mișcarea armonică simplă, unghiulară.

Ecuația mișcării pentru un astfel de sistem este

$$\mathcal{M} = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

astfel încât, folosind ecuația (15-21), obținem

$$-k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

sau

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta. \quad (15-22)$$

Observăm analogia dintre ecuația (15-22) pentru mișcarea armonică unghiulară simplă și ecuația (15-7) pentru mișcarea armonică liniară simplă. În adevăr, ecuațiile sînt identice din punct de vedere matematic. Am substituit pur și simplu deplasarea unghiulară θ în locul deplasării liniare x , momentul de inerție I în locul masei m și constanta de torsiune k în locul constantei elastice k . Soluția ecuației (15-22) este deci o oscilație armonică simplă în coordonata unghiulară θ , și anume

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \delta). \quad (15-23)$$

Aici θ_m este elongația unghiulară maximă, adică amplitudinea oscilației unghiulare. În figura 15-11 discul oscilează în jurul poziției de echilibru $\theta=0$ (linia OP), intervalul unghiular total fiind $2\theta_m$ (de la OQ la OR).

Perioada oscilației este, prin analogie cu ecuația (15-10),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (15-24)$$

Dacă k este cunoscut și T este măsurat, se poate determina momentul de inerție I în jurul axei de rotație a oricărui corp rigid care oscilează. Dacă I este cunoscut și T este măsurat, se poate determina constanta de torsiune k a oricărui eșantion de sîrmă.

Multe instrumente de laborator se bazează pe oscilații de torsiune, în special galvanometrul. Balanța lui Cavendish este un pendul de torsiune (capitolul 16). Balansierul unui ceasornic este un alt exemplu de mișcare armonică unghiulară, momentul de restabilire fiind furnizat aici de un arc fin în spirală.

propor-
ghfulară

(15-21)

se nu-
este în-
prezintă

un-
sim-

(15-23)

a oscilației
de echi-
(de la OQ

(15-24)

ina momen-
d care osci-
termina con-

de torsiune.
ndul de tor-
exemplu de
ind furnizat

Exemplul 2. O tijă subțire de masă 0,10 kg și de lungime 0,10 m este suspendată de o sîrmă, care trece prin centrul tijei și este perpendiculară pe direcția ei. Sîrma este răsucită și tija pusă în mișcare de oscilație. S-a găsit că perioada este 2,0 s. Dacă, analog, se suspendă un corp plat de forma unui triunghi echilateral în centrul său de masă, perioada este 6,0 s. Să se afle momentul de inerție al triunghiului față de această axă.

Momentul de inerție al tijei este $MI^2/12$ (vezi tabela 12-1). Prin urmare

$$I_{tije} = \frac{0,10 \text{ kg} \cdot (0,10 \text{ m})^2}{12} = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Din ecuația (15-24),

$$\frac{T_{tije}}{T_{triunghi}} = \left(\frac{I_{tije}}{I_{triunghi}} \right)^{1/2} \text{ sau } I_{triunghi} = I_{tije} \left(\frac{T_i}{T_r} \right)^2,$$

astfel încît

$$I_{triunghi} = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \left(\frac{6,0 \text{ s}}{2,0 \text{ s}} \right)^2 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Afectează amplitudinea oscilațiilor perioada în aceste cazuri?

Pendulul fizic. Orice corp rigid montat astfel încît să poată oscila într-un plan vertical în jurul unei axe care trece prin corp, se numește pendul fizic. Acesta este o generalizare a pendulului simplu în care un fir fără greutate susține o singură particulă. În realitate, orice pendul real este un pendul fizic.

În figura 15-12 un corp de formă neregulată oscilează în jurul unei axe orizontale fără frecări trecînd prin P , fiind deplasat de la poziția de echilibru cu un unghi θ . Poziția de echilibru este aceea în care centrul de masă al corpului, C , se află pe verticală sub P . Distanța de la axă pînă la centrul de masă este d , momentul de inerție al corpului în jurul axei trecînd prin P este I și masa corpului este M . Momentul de restabilire pentru deplasarea unghiulară θ este

$$\mathcal{M} = -Mgd \sin \theta$$

și se datorește componentei tangențiale a forței de gravitație. Deoarece \mathcal{M} este proporțional cu $\sin \theta$ și nu cu θ , condiția pentru mișcarea armonică unghiulară simplă nu va fi în general valabilă aici. Pentru deplasări unghiulare mici însă, relația $\sin \theta \cong \theta$ este ca și mai înainte o aproximație excelentă, astfel încît pentru amplitudini mici

$$\mathcal{M} = -Mgd \theta \text{ sau } \mathcal{M} = -k\theta,$$

25*

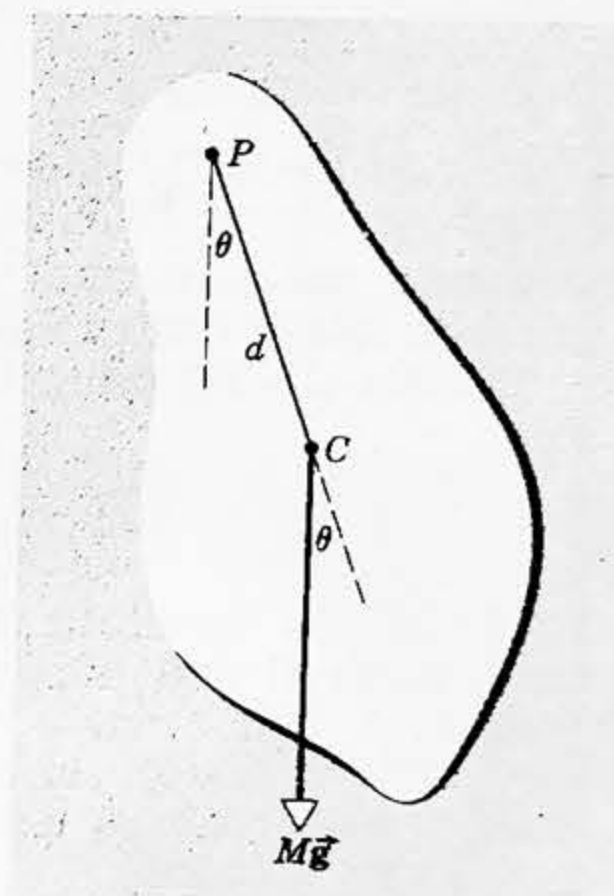


Figura 15-12. Un pendul fizic plan cu centrul de masă C oscilează în jurul lui P și este deviat cu un unghi θ față de poziția sa de echilibru (cînd C se află direct sub P). Greutatea sa \vec{Mg} furnizează momentul de restabilire.

unde

$$k = Mgd.$$

Dar

$$\mathcal{M} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I\alpha$$

astfel încît

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\mathcal{M}}{I} = -\frac{k}{I} \theta.$$

Prin urmare, perioada unui pendul fizic care oscilează cu amplitudine mică este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \quad (15-25)$$

La amplitudini mai mari pendulul fizic efectuează o mișcare armonică dar nu o mișcare armonică simplă.

Observăm că această afirmație se aplică unui obiect plan de orice formă și că axa de oscilație poate fi localizată oriunde. Ca un caz particular să considerăm un punct de masă m suspendat la capătul unui fir de lungime l fără greutate. Aici

$$I = ml^2, \quad M = m, \quad d = l$$

$$\text{astfel încît } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

care este perioada unui pendul simplu la amplitudini mici. Pendulul fizic este folosit pentru determinări precise ale lui g .

Ecuția (15-25) poate fi rezolvată în raport cu momentul de inerție I , dînd

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}. \quad (15-26)$$

Mărimile din membrul drept sînt toate direct măsurabile. Centrul de masă poate fi determinat prin suspendare așa cum s-a arătat în figura 14-4. Prin urmare momentul de inerție în jurul unei axe de rotație care nu trece prin centrul de masă al corpului (corpul poate fi de orice formă) poate fi determinat suspendînd corpul ca un pendul fizic în jurul acelei axe.

Exemplul 3. Să se afle lungimea unui pendul simplu a cărui perioadă este egală cu cea a unui pendul fizic dat.

Egalînd perioada unui pendul simplu cu cea a unui pendul fizic, obținem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

sau

$$l = \frac{I}{Md}. \quad (15-27)$$

Prin urmare, cât timp este vorba de perioada oscilațiilor, masa unui pendul fizic poate fi considerată ca fiind concentrată într-un punct situat la o distanță $l = I/Md$ de axa de rotație. Acest punct se numește *centru de oscilație* al pendulului fizic. Observăm că el depinde de poziția axei de suspensie pentru fiecare corp dat.

Exemplul 4. Un disc oscilează în jurul unui punct periferic (fig. 15-13). Să se afle perioada sa pentru oscilații mici și lungimea pendulului simplu echivalent.

Momentul de inerție al unui disc în jurul unei axe trecând prin centrul său este $\frac{1}{2} Mr^2$, unde r este raza și M este masa discului. Momentul de inerție în jurul unei axe de la marginea discului este

$$I = \frac{1}{2} Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2} Mr^2.$$

Perioada este atunci, cu $d = r$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} Mr^2}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}},$$

independentă de masa discului.

Pendulul simplu având aceeași perioadă are lungimea

$$l = \frac{I}{Mr} = \frac{3}{2} r$$

sau trei pătrimi din diametrul discului. Centrul de oscilație al discului suspendat în P este deci în O , la o distanță de $\frac{3}{2} r$ sub punctul de suspensie. Este necesară vreo masă particulară a pendulului simplu echivalent?

Dacă suspendăm discul într-un punct situat la mijloc între margine și centru,

cum ar fi O , găsim că $I = \frac{3}{4} Mr^2$ și $d = \frac{1}{2} r$. Perioada T este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}}$$

ca și mai înainte. Aceasta ilustrează o proprietate generală a centrului de oscilație O și a punctului de suspensie P și anume dacă pendulul este pus să oscileze în jurul unei noi axe trecând prin O , perioada sa nu se schimbă și P devine noul centru de oscilație.

Dacă discul ar fi suspendat în centru, care ar fi fost perioada oscilațiilor?

Exemplul 5. Perioada unui disc de rază 10,2 cm care execută oscilații mici în jurul unei axe de la marginea sa este de 0,784 s. Să se afle valoarea lui g pentru accelerația datorită gravitației în acel loc.

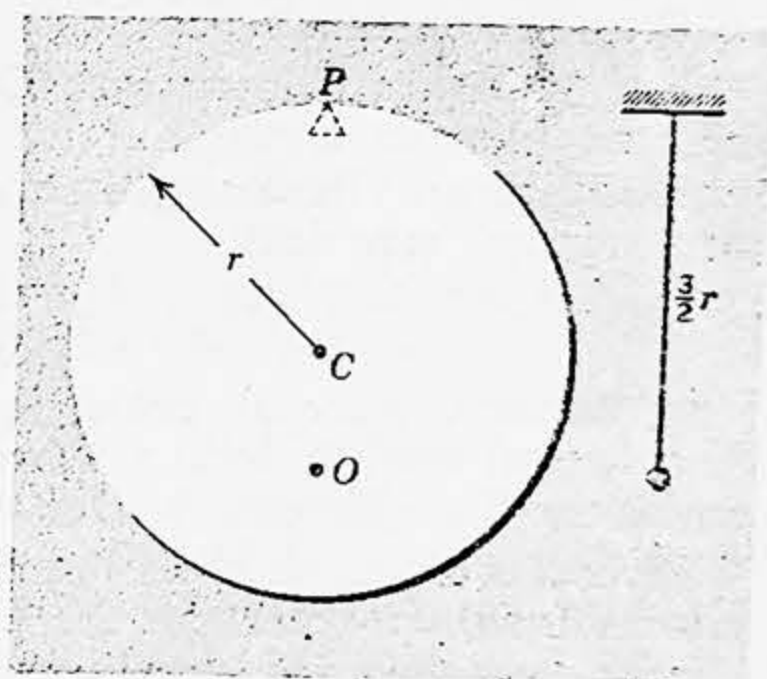


Figura 15-13. Exemplul 4. Un pendul fizic constând dintr-un disc care oscilează în jurul punctului P aflat la margine, alături de un pendul simplu care are aceeași perioadă. O este centrul de oscilație.

Din $T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} r/g}$, obținem

$$g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}.$$

Cu $T = 0,784$ s și $r = 10,2$ cm, obținem

$$g = \frac{6\pi^2 \cdot 0,102}{(0,784)^2} \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

15-6. Legătura dintre mișcarea armonică simplă și mișcarea circulară uniformă

Să vedem care este legătura dintre mișcarea armonică simplă de-a lungul unei drepte și mișcarea circulară uniformă. Această legătură este utilă în descrierea multor trăsături ale mișcării armonice simple. Ea dă de asemenea o interpretare geometrică simplă frecvenței unghiulare ω și fazei inițiale δ . Mișcarea circulară uniformă este de asemenea un exemplu de combinație a mișcărilor armonice simple, un fenomen cu care avem de a face destul de des în mișcarea ondulatorie.

În figura 15-14 Q este un punct care se mișcă pe un cerc de rază A cu o viteză unghiulară constantă ω , exprimată de exemplu în rad/s. P este proiecția ortogonală a lui Q pe diametrul orizontal, de-a lungul axei x . Să numim pe Q *punct de referință* și cercul pe care el se mișcă, *cerc de referință*. Când punctul de referință se mișcă pe cerc, punctul proiecție P se mișcă înainte și înapoi de-a lungul diametrului orizontal. Componenta pe direcția x a deplasării lui Q este totdeauna aceeași cu deplasarea lui P ; componenta pe direcția x a vitezei lui Q este totdeauna aceeași cu viteza lui P și componenta pe direcția x a accelerației lui Q este totdeauna aceeași cu accelerația lui P .

Fie δ unghiul dintre raza OQ și axa x la momentul $t=0$. În orice moment ulterior t , unghiul dintre OQ și axa x este $\omega t + \delta$, punctul Q mișcându-se cu viteză unghiulară constantă. Coordonata x a lui Q în fiecare moment este deci

$$x = A \cos (\omega t + \delta). \quad (15-28)$$

Prin urmare, punctul proiecție P execută o mișcare armonică simplă de-a lungul axei x . Prin urmare, *mișcarea armonică simplă poate fi descrisă ca proiecția pe un diametru a mișcării circulare uniforme*.

Frecvența unghiulară ω a mișcării armonice simple este aceeași ca viteza unghiulară a punctului de referință. Frecvența mișcării armonice simple este aceeași ca și numărul de rotații în unitatea de timp a punctului de referință. Prin urmare, $\nu = \omega/2\pi$ sau $\omega = 2\pi\nu$. Timpul unei revoluții complete a punctului de referință este același ca perioada T a mișcării armonice simple. Prin urmare, $T = 2\pi/\omega$ sau $\omega = 2\pi/T$. Faza mișcării armonice simple, $\omega t + \delta$, este unghiul pe care OQ îl face cu axa x în fiecare moment t (fig. 15-14, b, c, d). Unghiul pe care OQ îl face cu axa x la momentul $t=0$ (fig. 15-14, a) este δ , faza inițială a miș-

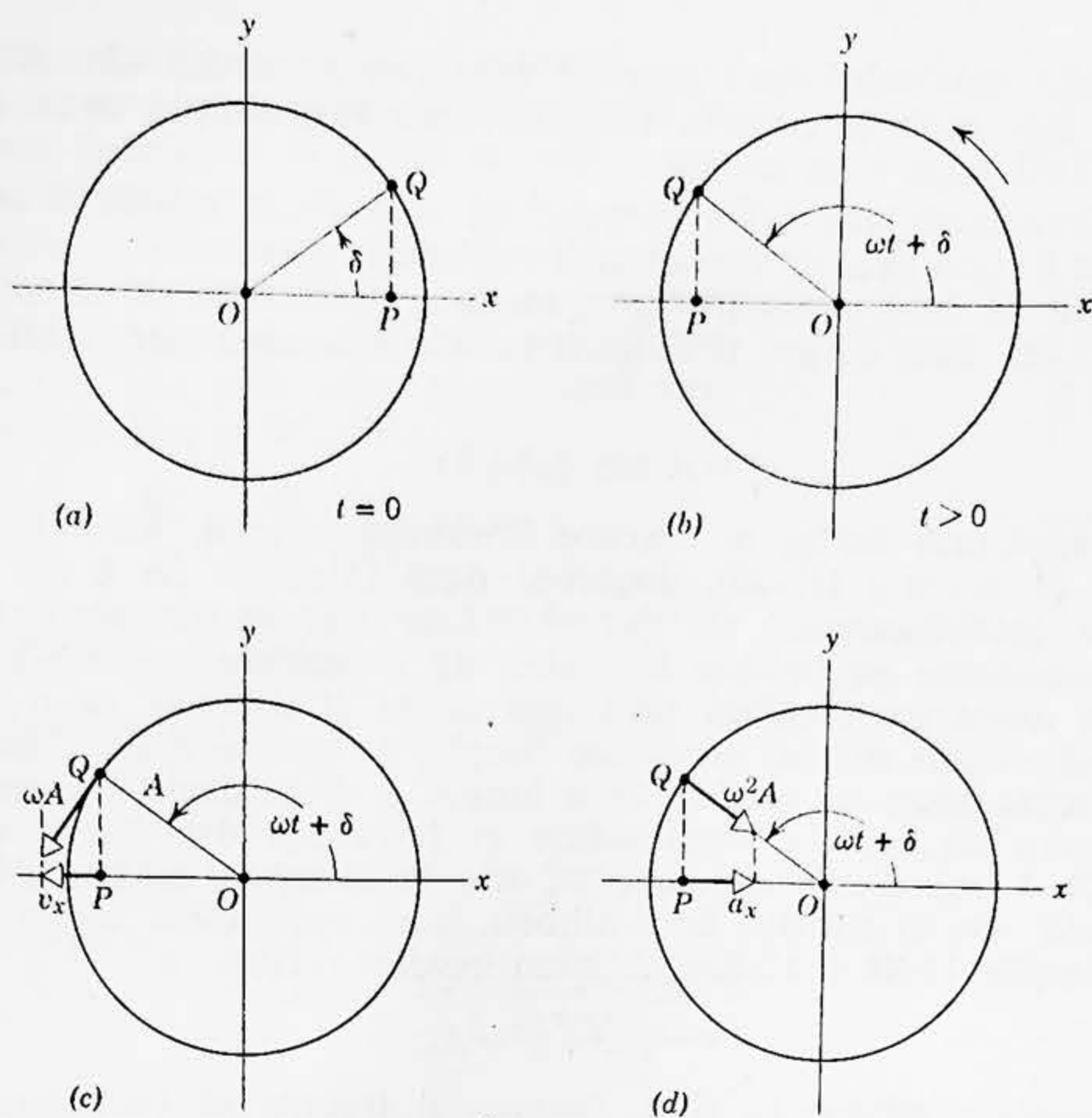


Figura 15-14. Legătura dintre mișcarea armonică simplă și mișcarea circulară uniformă. Q execută o mișcare circulară uniformă, iar P o mișcare armonică simplă. Q are viteza unghiulară ω , P frecvența unghiulară ω . (a, b) Componenta x a deplasării lui Q este mereu egală cu deplasarea lui P . (c) Componenta x a vitezei lui Q este mereu egală cu viteza lui P . (d) Componenta x a accelerației lui Q este mereu egală cu accelerația lui P .

cării. Amplitudinea mișcării armonice simple este aceeași cu raza cercului de referință.

Viteza tangențială a punctului de referință Q are valoarea ωA . Prin urmare, componenta x a acestei viteze (figura 15-14, c) este

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \delta).$$

Această relație ne dă o viteză v_x negativă atunci când Q și P se mișcă spre stînga și o valoare v_x pozitivă atunci când Q și P se mișcă spre dreapta. Observăm că v_x este zero în punctele extreme ale mișcării armonice simple, unde $\omega t + \delta$ este zero sau π , precum trebuia.

Accelerația punctului Q în mișcarea circulară uniformă este îndreptată radial către centru și are valoarea $\omega^2 A$. Accelerația punctului proiecție P este componenta x a accelerației punctului de referință Q (figura 15-14, d). Prin urmare,

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

dă accelerația punctului care execută mișcarea armonică simplă. Observăm că a_x este zero în centrul mișcării armonice simple unde $\omega t + \delta = \pi/2$ sau $3\pi/2$ după cum trebuia.

Aceste rezultate sînt toate identice cu cele de la mișcarea armonică simplă de-a lungul axei x ; vezi ecuațiile (15-13).

Dacă am fi luat proiecția ortogonală a punctului de referință pe axa y , în locul axei x , am fi obținut pentru mișcarea punctului proiectat pe axa y :

$$y = A \sin (\omega t + \delta). \quad (15-29)$$

Aceasta reprezintă iarăși o mișcare armonică simplă. Ea diferă doar prin fază de ecuația (15-28), deoarece dacă înlocuim pe δ cu $\delta - \pi/2$, atunci $\cos (\omega t + \delta)$ devine $\sin (\omega t + \delta)$. Este clar că proiecția mișcării circulare uniforme pe oricare diametru dă o mișcare armonică simplă.

Invers, mișcarea circulară uniformă poate fi descrisă ca o mișcare compusă din două mișcări armonice simple, și anume acele mișcări armonice simple, care se produc de-a lungul a două direcții perpendiculare, și care au aceeași amplitudine și frecvență dar diferă ca fază cu 90° . Cînd una dintre componente este la elongație maximă, cealaltă componentă este în punctul de echilibru. Dacă compunem aceste componente (ecuațiile 15-28 și 15-29), obținem imediat relația

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

Scriind relațiile pentru v_y și a_y (studentul trebuie să facă aceasta) și combinînd mărimile corespunzătoare, obținem de asemenea relațiile

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega A,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 A.$$

Aceste relații corespund respectiv modulului elongației, vitezei și accelerației din mișcarea circulară uniformă.

Este posibil să analizăm mișcări mai complicate ca rezultînd din compunerea unor mișcări armonice simple individuale. Mișcarea circulară este o combinație deosebit de simplă. În paragraful următor vom studia alte combinații ale mișcării armonice simple.

Exemplul 6. În exemplul 1 am considerat un corp care execută o mișcare armonică simplă orizontală. Ecuația acelei mișcări (în ce unități?) a fost

$$x = 0,040 \cos 11,4 t.$$

Această mișcare poate fi reprezentată și ca o proiecție a mișcării circulare uniforme pe un diametru orizontal.

(a) Să se găsească proprietățile mișcării circulare uniforme corespunzătoare. Componenta x a mișcării circulare este dată de

$$x = A \cos (\omega t + \delta).$$

Prin urmare, cercul de referință trebuie să aibă o rază $A = 0,040$ m, faza inițială trebuie să fie $\delta = 0$ și viteza unghiulară trebuie să fie $\omega = 11,4$ rad/s, pentru a se putea obține ecuația $x = 0,040 \cos 11,4 t$ pentru proiecția orizontală.

(b) Din mișcarea punctului de referință, să se determine timpul necesar corpului să parcurgă jumătate din distanța de la poziția sa inițială pînă la centrul mișcării.

Cînd corpul parcurge jumătate din această distanță, punctul de referință se mișcă cu un unghi $\omega t = 60^\circ$ (fig. 15-15). Viteza unghiulară este constantă și egală cu 11,4 rad/s, astfel încît timpul cerut pentru a se deplasa cu 60° este

$$t = \frac{60^\circ}{\omega} = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{11,4 \text{ rad/s}} = 0,092 \text{ s.}$$

Timpul poate fi calculat de asemenea direct din ecuația mișcării. Astfel,

$$x = 0,040 \cos 11,4 t \quad \text{și} \quad x = A/2 = 0,020$$

Prin urmare

$$0,020 = 0,040 \cos 11,4 t \text{ sau } 11,4 t = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Prin urmare

$$t = \frac{\pi}{3 \cdot 11,4} \text{ s} = 0,092 \text{ s.}$$

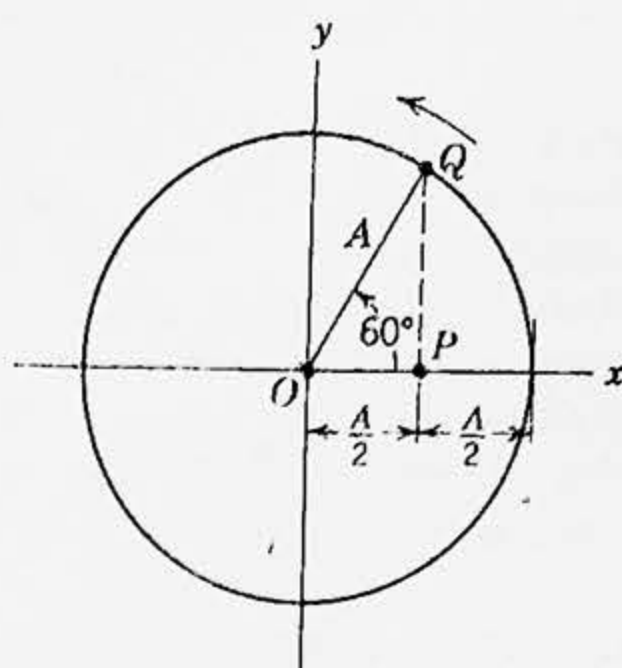


Figura 15-15. Exemplul 6. Sînt arătate particulele Q și P din figura 15-14 pentru $\omega t = 60^\circ$. Deoarece ω este cunoscut, se poate găsi t .

15-7. Compunerea mișcărilor armonice

Adesea se compun două mișcări armonice simple liniare, *perpendiculare între ele*. Mișcarea rezultantă este suma a două oscilații independente. Să considerăm mai întîi cazul în care *frecvențele vibrațiilor sînt aceleași*, astfel încît.

$$x = A_x \cos (\omega t + \delta),$$

$$y = A_y \cos (\omega t + \alpha). \quad (15-30)$$

Mișcările după axa x , respectiv y , au însă amplitudini diferite și faze inițiale diferite.

Dacă fazele inițiale ar fi egale, astfel încît $\delta = \alpha$, mișcarea rezultantă ar fi o linie dreaptă. Aceasta se poate arăta analitic, deoarece eliminînd pe t din ecuațiile

$$x = A_x \cos (\omega t + \delta), \quad y = A_y \cos (\omega t + \delta),$$

obținem

$$y = (A_y/A_x)x.$$

Aceasta este ecuația unei drepte, a cărei pantă este A_y/A_x . În figura 15-16, a și b este arătată mișcarea rezultantă pentru două cazuri: $A_y/A_x = 1$ și $A_y/A_x = 2$. În aceste cazuri atît deplasarea x cît și deplasarea y devin maxime în același timp și minime în același timp. Ele sînt în fază.

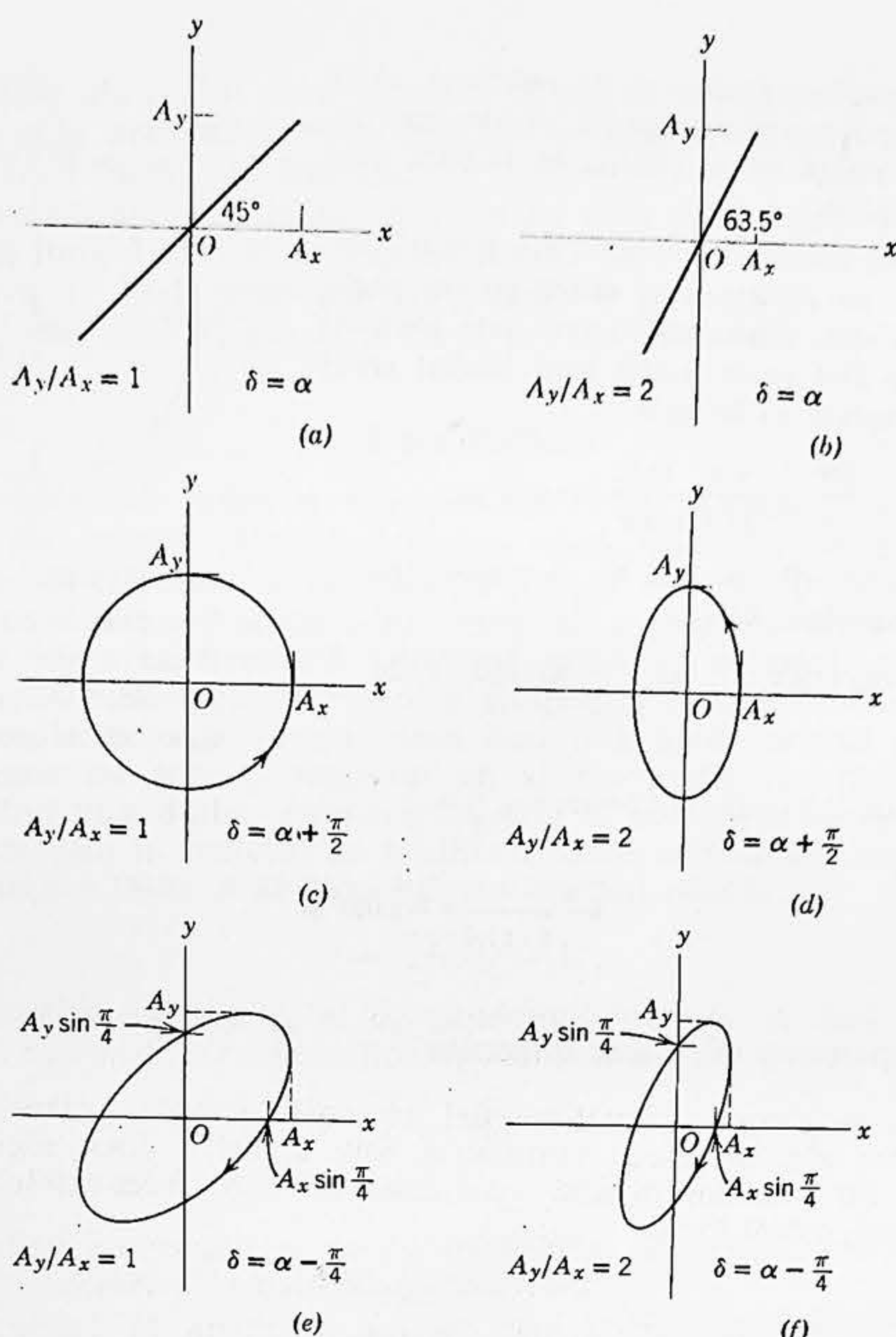


Figura 15-16. Mișcări armonice simple în cazul bidimensional. (a) Amplitudinile lui x și y (anume A_x și A_y) sînt aceleași, la fel ca și fazele lor inițiale. (b) Amplitudinea lui y este de două ori mai mare decît amplitudinea lui x , însă fazele lor inițiale sînt aceleași. (c) Amplitudinile lor sînt egale, însă x este defazat înaintea lui y cu 90° . (d) La fel ca în (c) cu excepția faptului că amplitudinea lui y este dublă față de cea a lui x . (e) Amplitudini egale însă x rămîne în urma lui y ca fază cu 45° . (f) La fel ca în (e) cu excepția faptului că amplitudinea lui y este dublă față de cea a lui x .

Dacă fazele inițiale sînt diferite, mișcarea rezultantă nu va mai fi o linie dreaptă. De exemplu, dacă fazele inițiale diferă prin $\pi/2$, deplasarea maximă x are loc atunci cînd deplasarea y este zero și invers. Cînd amplitudinile sînt egale, mișcarea rezultantă este circulară; cînd amplitudinile sînt diferite, mișcarea rezultantă este eliptică. În

figura 15-16, c și d sînt arătate două cazuri: $A_y/A_x=1$ și $A_y/A_x=2$ pentru $\delta=\alpha+\pi/2$. Cazurile $A_y/A_x=1$ și $A_y/A_x=2$, pentru $\delta=\alpha-\pi/4$ sînt arătate în figura 15-16, e și f.

Toate compunerile posibile a două mișcări armonice simple perpendiculare între ele care au aceeași frecvență dau o traiectorie *eliptică*, cercul și linia dreaptă fiind cazuri particulare ale unei elipse. Aceasta se poate arăta analitic combinînd ecuațiile (15-30) și eliminînd timpul. Studentul poate arăta că ecuația rezultantă este cea a unei elipse. Forma elipsei depinde numai de raportul amplitudinilor, A_y/A_x , și de *diferența* de fază dintre cele două oscilații, $\delta-\alpha$. Mișcarea reală poate fi atît în sens trigonometric cît și în sens orar, depinzînd de componenta care domină ca fază.

Un mod simplu de a obține astfel de traiectorii este de a folosi un osciloscop. În acesta electronii sînt deviați de fiecare din cele două cîmpuri electrice perpendiculare între ele. Intensitățile cîmpurilor sînt alternative sinusoidale cu aceeași frecvență, dar cu faze și amplitudini ce pot fi variate. În modul acesta electronii pot fi făcuți să descrie diferite traiectorii, discutate mai sus, pe un ecran fluorescent. Putem produce de asemenea astfel de traiectorii pe cale mecanică cu ajutorul unui pendul care oscilează cu amplitudine mică dar nu este restrîns la un plan vertical. Astfel de compuneri a două mișcări armonice simple perpendiculare între ele, avînd aceeași frecvență, sînt în special importante în studiul luminii polarizate și a circuitelor de curent alternativ.

Compunerea mișcărilor armonice simple de aceeași frecvență și de *aceeași direcție*, dar cu amplitudini și faze diferite, prezintă un deosebit interes în studiul difracției și interferenței luminii, sunetului și radiației electromagnetice. Aceasta va fi discutat mai tîrziu în carte.

Dacă sînt compuse două oscilații perpendiculare între ele, de *frecvențe diferite*, mișcarea rezultantă este mai complicată. Mișcarea nu va fi nici măcar periodică dacă cele două frecvențe componente ω_1 și ω_2 nu sînt într-un raport de două numere întregi (vezi problema 35). Pot fi compuse de asemenea oscilații de frecvențe diferite în aceeași direcție. Tratarea acestei mișcări este deosebit de importantă în cazul vibrațiilor sonore și va fi discutată în capitolul 20.

15-8. Oscilațiile a două corpuri

Oscilatorul armonic simplu din figura 15-4 este un corp de masă m legat printr-un resort, de constantă elastică k , de un perete solid. Peretele este legat rigid de sol, astfel încît acest sistem este în realitate un sistem de două corpuri, legate printr-un resort, unul din corpuri fiind practic de masă infinită. Acest suport solid rămîne în repaus într-un reper inerțial astfel încît variația lungimii resortului este egală cu deplasarea corpului de masă m ; celălalt capăt al resortului nu se mișcă. În acest caz am definit energia potențială $E_p(x)$ a sistemului oscilant din figura 15-4 ca fiind o funcție numai de deplasarea x a masei m (vezi figurile 15-3, 9). Aceasta este din nou echivalent cu ipoteza că un capăt al resortului este legat de un corp cu masa infinită, astfel încît alungirea resortului este determinată numai de mișcarea corpului de masă m .

Adesea în natură găsim sisteme oscilante formate din două corpuri în care *nu putem* presupune că masa unuia din corpuri este infinită și deci trebuie să considerăm mișcările ambelor corpuri într-un sistem de referință inerțial convenabil. Exemple sînt moleculele biatomice precum H_2 , CO , HCl etc. care pot oscila de-a lungul axei lor de simetrie. Cuplajul dintre atomii care formează aceste molecule este electromagnetic, dar ne putem imagina, pentru scopul nostru, că sînt legați printr-un resort fin, fără masă.

Lucrul surprinzător relativ la sistemele oscilante formate din două corpuri este acela că, redefinind ușor termenii și introducînd un nou concept (cel al *masei reduse*), putem descrie oscilațiile prin exact aceleași ecuații pe care deja le-am dedus pentru un sistem format (efectiv) dintr-un singur corp, ca cel din figura 15-4. Să arătăm aceasta.

Figura 15-17, *a*, arată două corpuri, m_1 și m_2 , legate printr-un resort (fără masă) de constantă elastică k ; sistemul este liber să oscileze pe o suprafață orizontală fără frecări. Localizăm capetele resortului cu ajutorul coordonatelor $x_1(t)$ și $x_2(t)$ așa cum se arată în figură. Lungimea resortului în fiecare moment este $x_1 - x_2$. Dacă lungimea sa normală, nealungită, este l , atunci *variația* lungimii resortului, $x(t)$, este dată de

$$x = (x_1 - x_2) - l. \quad (15-31)$$

Dacă x este pozitiv, resortul este întins, dacă $x=0$, resortul are lungimea sa normală și dacă x negativ el este comprimat.

În figura 15-17, *a* presupunem pentru concretizarea ideilor că resortul este întins, astfel încît $x > 0$. Este arătată de asemenea forța \vec{F} exercitată de resort asupra lui m_2 și forța $-\vec{F}$ exercitată asupra lui m_1 . Aceste două forțe sînt egale în modul și opuse ca sens, după cum arată figura, și au același modul $F = kx$.

Dacă aplicăm legea a doua a lui Newton, $F = ma$, corpurilor m_1 și m_2 , obținem,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx$$

și

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx.$$

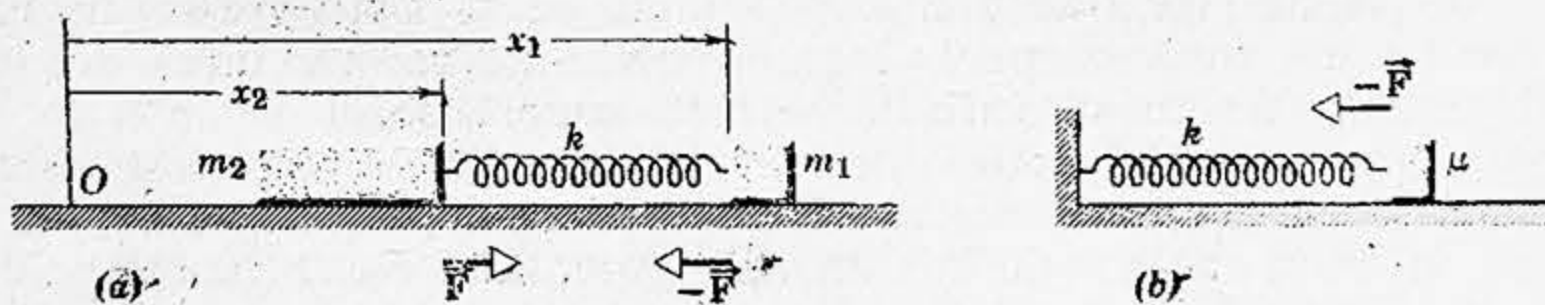


Figura 15-17. (a) Două corpuri de masă m_1 și m_2 conectate printr-un resort (fără masă) a cărui lungime în stare neîntinsă este l . (b) Un singur corp de masă μ (masa redusă) legat printr-un resort identic de un perete rigid.

Să înmulțim acum prima ecuație cu m_2 și a doua ecuație cu m_1 și să le scădem una din alta. Obținem

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx,$$

ceea ce se poate scrie astfel

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -kx. \quad (15-32)$$

Să numim mărimea $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, care are dimensiunea unei mase, *masa redusă* a sistemului și să o notăm cu litera μ ; adică

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (15-33)$$

Deoarece l este o constantă, $d^2(x_1 - x_2)/dt^2 = d^2x/dt^2$ și ecuația (15-32) poate fi scrisă acum astfel

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0. \quad (15-34)$$

Aceasta este identică ca formă cu ecuația (15-5) pe care am stabilit-o pentru oscilațiile unui singur corp, din figura 15-4. Diferențele sînt: (1) x din ecuația (15-34) este deplasarea relativă a celor două blocuri de la pozițiile lor de echilibru (vezi ecuația 15-31) și nu deplasarea unui singur bloc de la poziția sa de echilibru; (2) μ este *masa redusă* a celor două blocuri și nu masa unui singur bloc.

Observăm din ecuația (15-33) pe care o putem scrie fie sub forma

$$\mu = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

fie sub forma

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

că (pentru mase finite) μ este totdeauna mai mic decît m_1 sau m_2 ; de unde provine numele de masă redusă. Ecuația (15-34) ne conduce, pe calea pe care am urmat-o după ecuația (15-7), la

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \text{ sau } T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (15-35)$$

pentru frecvența și perioada oscilațiilor sistemului din figura 15-17, a. Este clar că acest sistem are aceeași frecvență și aceeași perioadă ca un singur corp de masă μ legat printr-un resort analog de un perete rigid, ca în figura 15-17, b. Prin urmare, oscilațiile a două corpuri din figura 15-17, a sînt echivalente cu oscilațiile unui singur corp din figura 15-17, b. O particulă se mișcă relativ la cealaltă ca și cum cealaltă particulă ar fi fixă și masa particulei mobile ar fi redusă la μ . Conceptul de masă redusă se aplică pe larg în fizică în special în mecanica cuantică și fizica solidului.

Putem rezolva ecuația (15-34), ca în paragraful 15-3, pentru a obține următoarele relații

$$x = A \cos (\omega t + \delta),$$

$$v = dx/dt = -\omega A \sin (\omega t + \delta)$$

și

$$a = dv/dt = -\omega^2 A \cos (\omega t + \delta).$$

Ele sînt identice cu ecuațiile (15-13) cu excepția faptului că aici x , v și a sînt elongația, viteza și respectiv accelerația relative ale celor două corpuri. Astfel

$$x = (x_1 - x_2) - l,$$

$$v = dx/dt = v_1 - v_2 \quad (15-36)$$

și

$$a = dv/dt = a_1 - a_2,$$

în care indicii se referă la cele două corpuri.

Energia potențială a unui oscilator armonic simplu format din două corpuri, este dată de $E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$ care arată clar, — deoarece x depinde

de pozițiile ambelor corpuri (vezi ecuația 15-36) — că energia potențială este o caracteristică a sistemului ca un întreg.

Mulți oscilatori reali formați din două corpuri, deși armonici, nu sînt simpli armonici; curba energiei lor potențiale asemănătoare cu cea din figura 8-7, *a*, care se referă la o moleculă biatomică, nu este parabolică. Dar chiar astfel de oscilatori se comportă ca oscilatori armonici simpli pentru amplitudini de oscilație suficient de mici în jurul poziției de echilibru. Observăm de asemenea că x din figura 8-7, *a* are o semnificație diferită decît cea pe care i-am atribuit-o în acest capitol: el reprezintă separația reală și nu (vezi ecuația 15-36) diferența dintre separația reală și separația de echilibru. Astfel, în figura 8-7, *a* poziția de echilibru stabil corespunde nu lui $x=0$ ca în figura 15-2, ci lui $x = \sqrt{2a/b}$. Această schimbare constituie doar o schimbare a originii axei x pentru curba energiei potențiale și nu are nici o semnificație fundamentală.

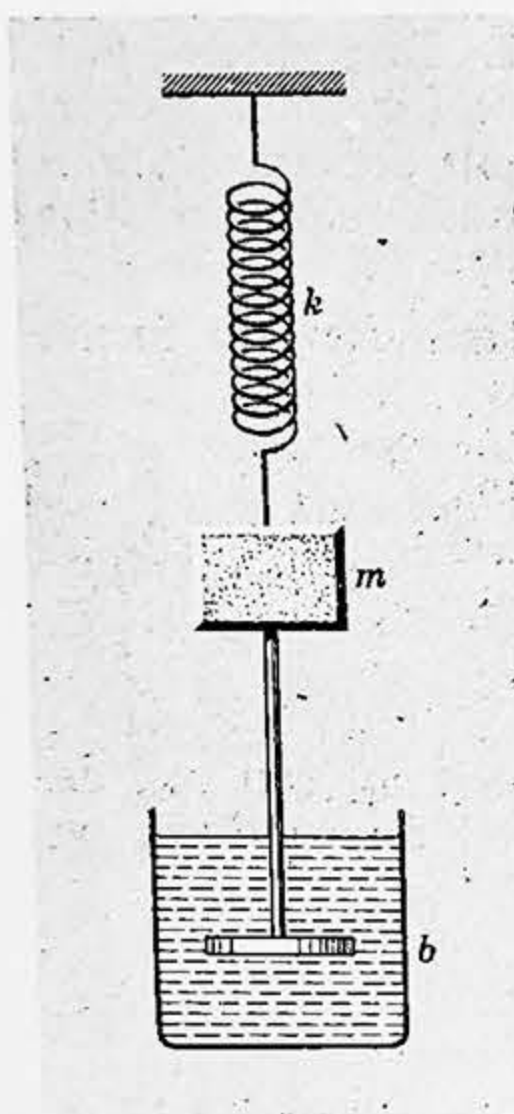


Figura 15-18. Un oscilator armonic amortizat. Un disc este fixat de masa m și cufundat într-un fluid care exercită o forță de amortizare $-b dx/dt$. Forța elastică de restabilire este $-kx$.

15-9. Mișcarea armonică amortizată

Pînă în acest punct am presupus că asupra oscilatorului nu acționează nici un fel de forțe de frecare. Dacă această ipoteză ar fi strict valabilă, un pendul sau un corp greu fixat de un resort ar oscila indefinit. În realitate, amplitu-

dinea oscilațiilor descrește treptat pînă la zero ca rezultat al frecărilor. Se spune că mișcarea este amortizată datorită frecărilor și se numește *mișcarea armonică amortizată*. Adesea frecările provin de la rezistența aerului sau de la forțe interne. Mărimea forței de frecare depinde de obicei de viteză. În majoritatea cazurilor care prezintă interes, forța de frecare este proporțională cu viteza corpului dar opusă ca sens. Un exemplu de oscilator amortizat este arătat în figura 15-18.

Ecuția mișcării oscilatorului armonic simplu amortizat este dată de legea a doua a mișcării $F=ma$, în care F este suma dintre forța de tip atractiv $-kx$ și forța de amortizare $-b \, dx/dt$. Aici b este o constantă pozitivă. Obținem

$$F=ma$$

sau

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

sau

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (15-37)$$

Dacă b este mic, soluția acestei ecuații diferențiale (dată mai jos fără demonstrație)¹ este

$$x = Ae^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \delta), \quad (15-38)$$

unde

$$\omega' = 2\pi \nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (15-39)$$

În figura 15-19 am reprezentat elongația x în funcție de timpul t pentru o mișcare oscilatorie cu amortizare mică.

Putem interpreta soluția precum urmează. Mai întâi, frecvența este mai mică și perioada este mai mare în cazul prezenței frecării. Frecarea încetinește mișcarea, după cum era de așteptat. Dacă n-ar exista frecare, b ar fi egal cu zero și ω' ar fi egal cu $\sqrt{k/m}$ sau ω , care este frecvența unghiulară a mișcării neamortizate. Dacă există frecări, ω' este mai mic decât ω după cum arată ecuația (15-39). În al doilea rînd, amplitudinea mișcării descrește treptat pînă la zero. Intervalul de timp τ în timpul căruia amplitudinea scade la $1/e$ din valoarea sa inițială se numește *timp mediu de viață* a oscilațiilor. Factorul de amplitudine este $Ae^{-bt/2m}$, astfel încît $\tau = 2m/b$. Iarăși, dacă n-ar exista frecarea, b ar fi egal cu zero și amplitudinea ar avea valoarea constantă A ; timpul de viață ar fi infinit.

¹ Vezi de exemplu H. W. Reddick și F. H. Miller, *Matematici superioare pentru ingineri*, ediția a treia, John Wiley and Sons, 1955, p. 76—78.

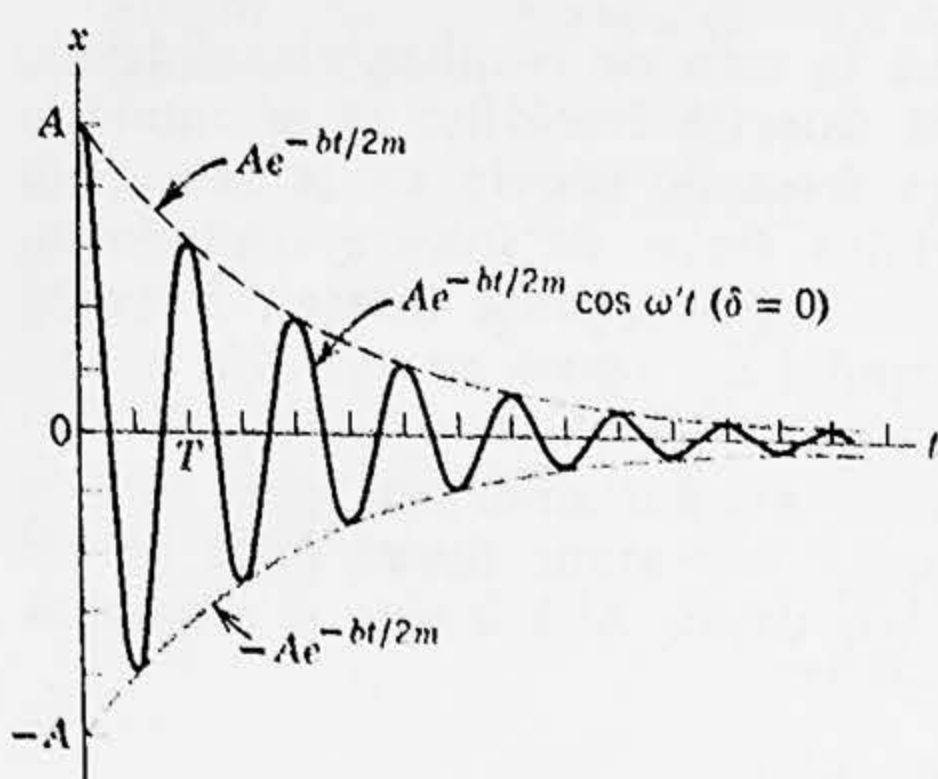


Figura 15-19. Mișcarea armonică amortizată reprezentată în funcție de timp. Mișcarea este oscilatorie cu amplitudinea continuu descrescătoare. Se vede amplitudinea (---) pornind cu valoarea A și descrescând exponențial către zero când $t \rightarrow \infty$.

Dacă forța de frecare este suficient de mare, b devine atât de mare încât ecuația (15-38) nu mai este o soluție valabilă a ecuației mișcării¹. Atunci mișcarea n-ar fi periodică deloc. Corpul revine pur și simplu la poziția sa de echilibru atunci când este lăsat liber din poziția sa inițială de elongație A .

În mișcarea armonică amortizată energia oscilatorului este treptat disipată prin frecări și scade către zero.

15-10. Oscilațiile forțate și rezonanța

Până acum am discutat numai oscilațiile naturale (libere) ale unui corp, adică oscilațiile care se produc atunci când corpul este deplasat și apoi lăsat liber. Pentru un corp legat de un resort, frecvența oscilațiilor libere este

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

în absența frecărilor și

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

în prezența unei forțe mici de frecare bv .

O situație diferită se produce însă dacă corpul este supus unei forțe externe oscilatorii. De exemplu un pod vibrează sub acțiunea unor soldați care mărșăluiesc, carcasa unui motor vibrează datorită impulsurilor periodice determinate de o neregularitate (descentrare) a arborelui motor, un diapazon vibrează atunci când este expus forței periodice a unei unde sonore. Oscilațiile care rezultă se cheamă oscilații *forțate*. Aceste oscilații forțate au frecvența *forței externe* și nu frecvența proprie a corpului. Răspunsul corpului depinde însă de relația dintre frecvența

¹ Ibidem, pp. 80—83.

oscilațiilor forțate și frecvența oscilațiilor proprii. O succesiune de mici impulsuri aplicate cu o frecvență convenabilă pot produce oscilații de mare amplitudine. Un copil dîndu-se în leagăn învață că prin mișcări potrivite la intervale de timp potrivite poate mări amplitudinea oscilațiilor sale. Problema oscilațiilor forțate este foarte generală. Soluția ei este utilă în sistemele acustice, circuitele de curent alternativ și fizica atomică, la fel ca și în mecanică.

Ecuația mișcării unui oscilator forțat rezultă din legea a doua a mișcării. În plus față de forța elastică $-kx$ și forța de frînare $-b dx/dt$, avem de asemenea forța externă oscilatorie aplicată. Pentru simplitate fie această forță externă dată de $F_m \cos \omega'' t$. Aici F_m este valoarea maximă a forței externe și $\omega'' (=2\pi\nu'')$ este frecvența sa unghiulară. Pentru concretizarea ideilor ne putem imagina, dacă dorim, o astfel de forță aplicată direct corpului suspendat din figura 15-18.

Din

$$F=ma$$

obținem

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

sau

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t. \quad (15-40)$$

Soluția acestei ecuații (dată mai jos fără demonstrație)¹ este

$$x = \frac{F_m}{G} \sin (\omega'' t - \delta) \quad (15-41)$$

unde

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega''^2} \quad (15-42)$$

și

$$\delta = \arccos \frac{b \omega''}{G} \quad (15-43)$$

Să examinăm mișcarea resultantă din punct de vedere calitativ.

Observăm (ecuația 15-41) că sistemul vibrează cu frecvența forței aplicate ω'' și nu cu frecvența sa proprie ω și că mișcarea este o mișcare armonică neamortizată.

Cazul cel mai simplu este acela în care nu există amortizare, ceea ce înseamnă că $b=0$ în ecuația (15-42). Factorul G care are valoarea $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$ pentru $b=0$, este mare atunci cînd frecvența forței aplicate ω'' este foarte diferită de frecvență proprie neamortizată ω a sistemului. Aceasta înseamnă că amplitudinea mișcării rezultante F_m/G este mică. Cînd frecvența exterioară se apropie de frecvența proprie, adică atunci cînd $\omega'' \rightarrow \omega$, vedem că $G \rightarrow 0$ și amplitudinea $F_m/G \rightarrow \infty$. În realitate există întotdeauna o anumită amortizare astfel încît amplitudinea oscilațiilor, deși poate deveni mare, rămîne practic finită.

Pentru oscilatori amortizați reali (pentru care $b \neq 0$) în ecuația (15-42) există o valoare caracteristică a frecvenței exterioare ω'' pentru

¹ Ibidem pp. 80—83.

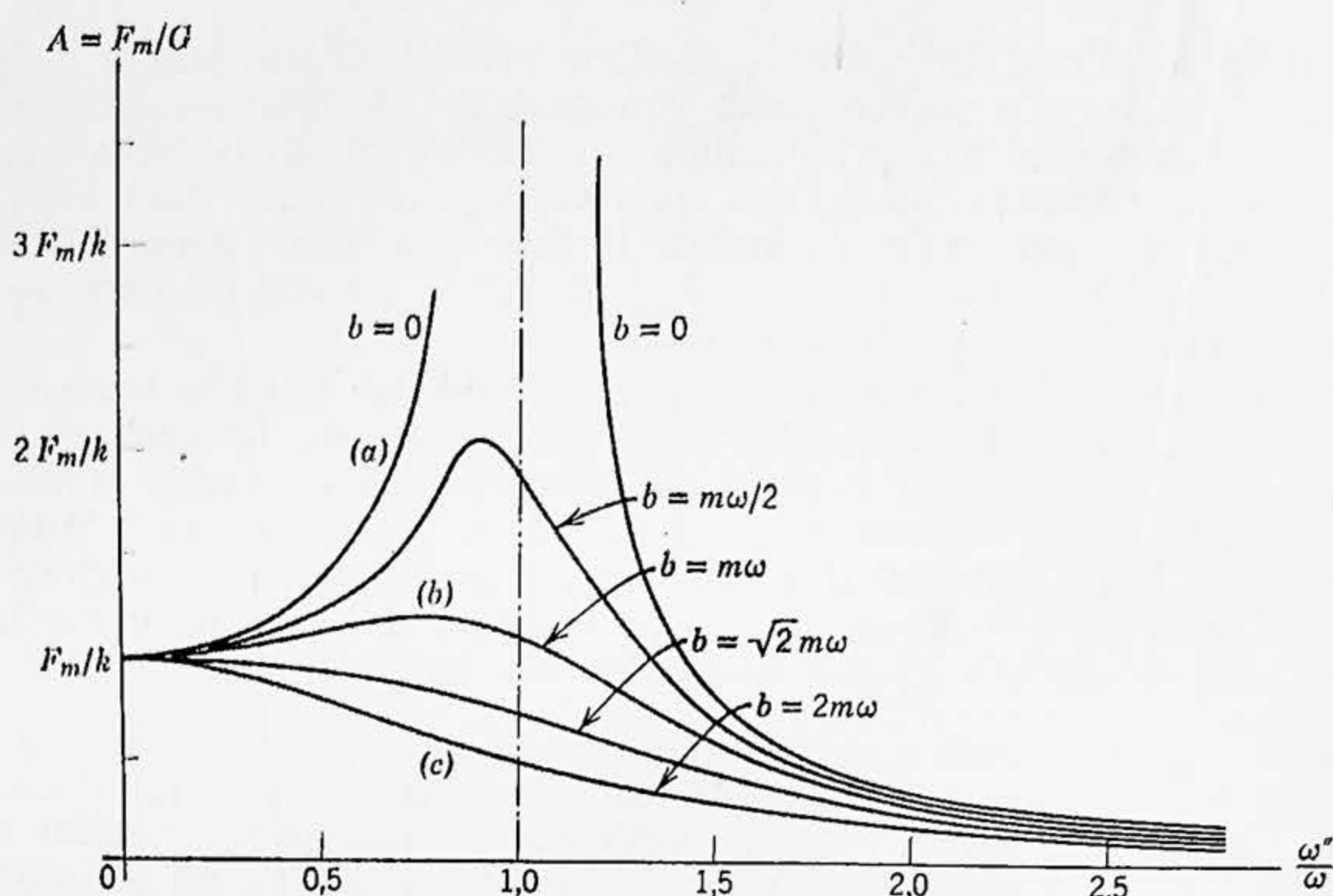


Figura 15-20. Amplitudinea unui oscilator armonic simplu amortizat, acționat de o forță, este reprezentată în funcție de raportul dintre frecvența exterioară ω'' și frecvența proprie neamortizată ω . Sînt arătate curbele pentru cinci grade diferite de amortizare; în cazul curbei (a) nu avem amortizare, iar în cazul curbei (c) amortizarea este mare. Observăm că maximum de rezonanță se deplasează tot mai aproape spre linia verticală de la $\omega''/\omega=1$ cînd b devine din ce în ce mai mic.

care amplitudinea oscilațiilor este maximă. Această condiție se cheamă *rezonanță*¹ și valoarea lui ω'' pentru care se produce rezonanța se numește *frecvență de rezonanță*. Cu cît amortizarea este mai mică într-un sistem dat cu atît frecvența de rezonanță este mai apropiată de frecvența neamortizată proprie ω . De obicei amortizarea este destul de mică astfel încît frecvența de rezonanță poate fi luată egală cu frecvența neamortizată proprie ω cu eroare mică. În mod analog, pentru amortizări mici, frecvența neamortizată proprie $\omega (= \sqrt{k/m})$ poate fi luată egală cu frecvența amortizată proprie ω' (vezi ecuația 15-39) cu o eroare mică.

În figura 15-20 am trasat cinci curbe care dau amplitudinea oscilațiilor forțate în funcție de raportul dintre frecvența exterioară ω'' și frecvența proprie neamortizată ω . Fiecare din cele cinci curbe corespunde unei valori diferite a constantei de amortizare b . Curba (a) arată amplitudinea în cazul $b=0$, adică în cazul absenței amortizării. În acest

¹ Rezonanța, definită aici ca producîndu-se la o frecvență pentru care oscilațiile forțate au amplitudinea maximă, poate fi definită și în alt mod ca de exemplu, producîndu-se la o frecvență pentru care puterea transferată de la forța exterioară către sistemul oscilant este maximă sau pentru care viteza corpului oscilant este maximă. Definițiile nu sînt echivalente; vom discuta acest subiect mai tîrziu cînd ne vom ocupa de oscilațiile electrice forțate; vezi problema 42.



Figura 15-21. La 1 Iulie 1940 podul peste Chelle Tacomei de la Puget Sound, Washington, a fost terminat și deschis pentru trafic. Exact patru luni mai târziu, un vânt puternic a pus podul în oscilație până când arcul principal s-a rupt, rupind cablurile și căzînd în apă. Vîntul a produs o forță rezultantă fluctuantă în rezonanță cu o frecvență proprie a structurii. Aceasta a provocat o creștere treptată a amplitudinii până când podul a fost distrus. Multe alte poduri au fost mai târziu re proiectate pentru a le face stabile din punct de vedere aerodinamic.

caz, după cum am văzut, amplitudinea devine infinită pentru $\omega'' = \omega$ deoarece energia este furnizată sistemului în mod continuu de către forța aplicată și nimic nu se disipează. În practică sînt totdeauna prezente anumite frecări, astfel încît amplitudinea atinge o valoare mare dar finită. Desigur, dacă amplitudinea devine atît de mare încît legea lui Hooke nu mai este valabilă și limita de elasticitate este depășită, sistemul nu mai este guvernat de ecuația (15-40). Adesea sistemul se distruge, se rupe, ca în cazul dezastrului podului de la Tacoma (figura 15-21). Curbele (b) și (c) prezintă amplitudinea oscilațiilor forțate în cazul a două amortizări mai mari.

Deplasarea produsă de o forță constantă F_m aplicată unui sistem cu constanta elastică k , este F_m/k . Observăm (figura 15-20) că amplitudinea oscilațiilor forțate este destul de mare în comparație cu această elongație statică. O coloană de soldați care merg în marș pe un pod îl pot pune în vibrație cu o amplitudine periculos de mare dacă frecvența pașilor lor se întîmplă să fie egală cu frecvența proprie a podului. Acesta este motivul pentru care soldații merg liber atunci cînd merg pe un pod. Considerațiile privind rezonanța sînt foarte importante în multe dispozitive electrice, acustice și atomice, după cum vom vedea mai târziu.

Întrebări

1. Dați cîteva exemple de mișcări care sînt aproximativ armonice simple. De ce mișcările care sînt exact armonice simple sînt rare?

2. Un resort are o constantă elastică k și un corp de masă m suspendat de el. Resortul este tăiat în două și aceleași corp este suspendat de una

din jumătăți. Este frecvența oscilațiilor aceeași înainte și după tăierea resortului? Ce legătură există între frecvențe?

3. Un resort neîntins are o constantă elastică k . El este întins de un corp atârnat de el către o poziție de echilibru care nu depășește limita elastică. Va avea resortul aceeași constantă elastică k pentru deplasări în jurul acestei noi poziții de echilibru?

4. Orice resort real are masă. Dacă această masă este luată în considerație, să se explice calitativ cum va schimba aceasta expresiile noastre pentru perioada oscilațiilor sistemului resort-masă (vezi problema 40).

5. Să presupunem că avem un bloc de masă necunoscută și un resort de constantă elastică necunoscută. Să se arate cum putem prezice perioada oscilațiilor acestui sistem bloc-resort măsurând pur și simplu alungirea resortului produsă de blocul legat de resort.

6. Putem avea un oscilator care chiar pentru amplitudini mici să nu fie armonic simplu? Adică putem avea o forță atractivă neliniară într-un oscilator chiar pentru amplitudini arbitrare de mici?

7. Am putea construi vreodată un pendul simplu?

8. Ar putea fi bazate etaloanele de masă, lungime și timp pe proprietățile unui pendul? Să se explice.

9. Să se arate că atunci când amplitudinea θ_m din ecuația (15-20) se apropie de 180° , perioada se apropie de infinit. Este aceasta rezonabil?

10. Să se prezică pe baza unor argumente calitative dacă un pendul care oscilează cu amplitudine mare va avea o perioadă mai mare sau mai mică decât perioada oscilațiilor cu amplitudine mică. (Se vor considera cazurile extreme.)

11. Cum este afectată perioada unui pendul atunci când punctul său de suspensie este: (a) deplasat orizon-

tal cu accelerația a ; (b) mișcat vertical în sus cu accelerația a ; (c) mișcat vertical în jos cu accelerația $a < g$. Care caz (dacă este așa) se aplică unui pendul montat pe un cărucior care coboară în jos pe un plan înclinat?

12. De ce a fost exclusă o axă care trece prin centrul de masă, atunci când am folosit ecuația (15-26) pentru a determina pe I ? Se aplică această ecuație în cazul unei astfel de axe? Cum se poate determina I pentru o astfel de axă folosind metodele pendulului fizic?

13. O sferă goală este umplută cu apă printr-un orificiu mic existent în ea. Ea este atârnată de un fir lung și atunci când apa se scurge încet prin orificiul din fundul sferei, se găsește că perioada oscilațiilor mai întâi crește și apoi descrește. Să se explice.

14. Două pendule fiecare constând dintr-un disc legat de o bară ușoară, sînt identice cu excepția cuplajului dintre disc și bară. Într-unul bara este legată rigid de disc, iar în al doilea sînt folosite lagăre cu rulmenți astfel încît discul este liber să se rotească în jurul capătului barei, de exemplu. Ambele pendule sînt atîrnate, deviate într-o parte pînă la aceeași înălțime apoi lăsate liber. Care va avea perioada mai mare? Să se explice.

15. Cum poate fi folosit un pendul pentru a trasa o curbă sinusoidală?

16. Care mișcări armonice simple compunîndu-se ar da o figură de forma cifrei 8 ca mișcare rezultantă?

17. Există vreo legătură între relația dintre F și x la nivel molecular și relația macroscopică dintre F și x într-un resort?

18. De ce sînt folosite adesea dispozitive de amortizare în mecanisme (aparate)? Să se dea un exemplu.

19. Să se dea exemple de fenomene obișnuite în care rezonanța joacă un rol important.

20. Mareele lunare ale oceanelor sînt mult mai importante decît mareele solare ale oceanelor (vezi întrebarea 13 de la capitolul 16, de exemplu). Exact contrariul însă este adevă-

rat pentru mareele din atmosfera terestră. Să se explice aceasta, folosind ideile de rezonanță, știind faptul că atmosfera are o perioadă proprie a oscilațiilor de aproximativ 12 ore.

Probleme

1. Un bloc cu masa de 4,0 kg întinde un resort cu 16 cm de la poziția neîntinsă. Blocul este îndepărtat și de același resort este atârnat un corp cu masa de 0,50 kg. Dacă resortul este apoi întins și lăsat liber, care va fi perioada mișcării?

2. Un corp cu masa de 2,0 kg atîrnă de un resort. Un alt corp cu masa de 300 g atârnat sub primul întinde resortul cu 2,10 cm în plus. Dacă corpul cu masa de 300 g este îndepărtat și primul corp este pus în oscilație, să se afle perioada mișcării.

3. Un corp mic cu masa de 0,10 kg execută o mișcare armonică simplă de amplitudine 1,0 m și perioadă 0,20 s. (a) Care este valoarea maximă a forței care acționează asupra lui? (b) Dacă oscilațiile sînt produse de un resort, care este constanta elastică a resortului?

4. Un corp oscilează într-o mișcare armonică simplă conform ecuației

$$x = 6,0 \cos \left(3\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ m.}$$

Care sînt: (a) elongația, (b) viteza și (c) accelerația în momentul $t = 2$ s. Să se afle de asemenea: (d) faza inițială, (e) frecvența ν și (f) perioada mișcării.

5. O particulă execută o mișcare armonică liniară în jurul punctului $x = 0$; la $t = 0$ ea are o elongație $x = -0,37$ cm și o viteză nulă. Dacă frecvența mișcării este $0,25 \text{ s}^{-1}$, să se determine: (a) perioada, (b) frecvența unghiulară, (c) amplitudinea, (d) elongația la momentul t (arbitrar), (e) viteza la momentul t (arbitrar), (f) vi-

teza maximă, (g) accelerația maximă, (h) elongația la momentul $t = 3,0$ s și (i) viteza la momentul $t = 3,0$ s.

6. Două particule execută mișcări armonice simple de aceeași amplitudine și de aceeași frecvență de-a lungul aceleiași linii drepte. Ele trec una în dreptul celeilalte atunci cînd se mișcă în sensuri opuse și elongația lor este jumătate din amplitudinea lor. Care este diferența de fază dintre ele?

7. Un bloc se află pe o suprafață orizontală care se mișcă orizontal într-o mișcare armonică simplă cu o frecvență de două oscilații pe secundă. Coeficientul de frecare statică dintre bloc și plan este 0,50. Cît de mare poate fi amplitudinea dacă blocul nu alunecă de-a lungul suprafeței?

8. Un bloc se află pe un piston care se mișcă vertical într-o mișcare armonică simplă cu o perioadă de 1,0 s. (a) La ce amplitudine a mișcării blocul se va desprinde de piston? (b) Dacă pistonul are o amplitudine de 5,0 cm, care este frecvența maximă pentru care blocul și pistonul se vor găsi în contact permanent?

9. Un resort uniform a cărui lungime nedeformată este l , are o constantă elastică k . Resortul este tăiat în două bucăți de lungimi nedeformate l_1 și l_2 , unde $l_1 = nl_2$ și n este un întreg. Care sînt constantele elastice corespunzătoare k_1 și k_2 exprimate în funcție de n și k ? Să se verifice rezultatul pentru $n = 1$ și $n = \infty$.

10. Două resorturi sînt articulate și de ele este legat un corp de masă m așa cum se arată în figura 15-22.

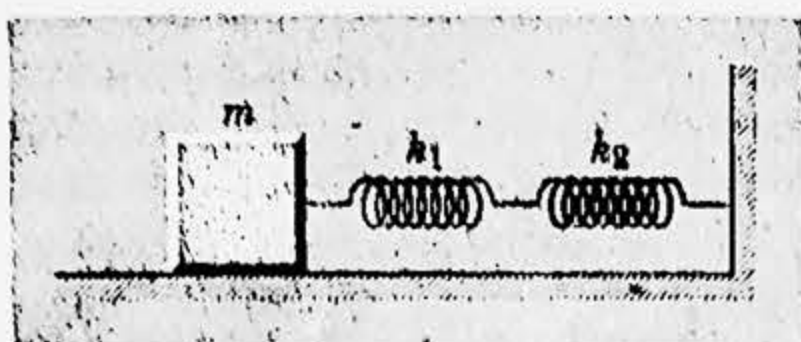


Figura 15-22.

Suprafețele sînt fără frecări. Dacă resorturile au constante elastice individuale k_1 și k_2 , să se arate că frecvența oscilațiilor corpului de masă m este

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m}}$$

(Analogul electric al acestui sistem este legarea în paralel a doi condensatori.)

11. Resorturile sînt acum legate de corpul m și de suporturi fixe așa cum se arată în figura 15-23. Să se arate că frecvența oscilațiilor este în acest caz

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

(Analogul electric al acestui sistem este legarea în serie a doi condensatori.)

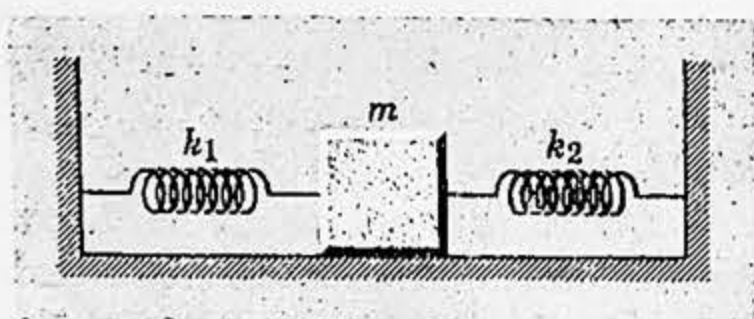


Figura 15-23.

12. Frecvențele de vibrație a atomilor din solide la temperaturi obișnuite sînt de ordinul 10^{13} s^{-1} . Să ne imaginăm că atomii sînt legați între ei prin resorturi. Să presupunem că un atom individual de argint vibrează cu această frecvență și că toți ceilalți

atomii sînt în repaus. Să se calculeze constanta elastică a unui resort individual. Un mol de argint are o masă de 108 g și conține $6,02 \cdot 10^{23}$ atomi.

13. Capătul unuia din brațele unui diapazon care execută o mișcare armonică simplă cu frecvența 1000 s^{-1} are o amplitudine de 0,40 mm. Să se neglijeze frecarea și să se afle: (a) accelerația maximă și viteza maximă a extremității brațului. (b) Viteza și accelerația extremității brațului cînd el are o elongație de 0,20 mm.

14. Un resort de constantă elastică 19,6 N/m atîrîna vertical. Un corp de masă 0,20 kg este legat de capătul său liber și apoi lăsat liber. Presupunem că resortul nu a fost întins înainte de a lăsa corpul liber. Să se afle cu cît coboară corpul sub poziția inițială. Să se afle de asemenea frecvența și amplitudinea mișcării armonice simple rezultante.

15. Un bloc cu masa de 3,62 kg este suspendat de un resort cu o constantă elastică 520 N/m. Un glonte de 45 g este tras în bloc de jos cu o viteză de 150 m/s și se oprește în bloc. (a) Să se afle amplitudinea mișcării armonice simple rezultante. (b) Ce fracțiune din energia cinetică inițială a glontelui este înmagazinată în oscilatorul armonic? Există vreo pierdere de energie în acest proces? Să se explice răspunsul dat.

16. Un automobil poate fi considerat ca montat pe un resort atîta timp cît este vorba de oscilații verticale. Resorturile unui anumit vehicul sînt astfel ajustate încît vibrațiile au o frecvență de $3,0 \text{ s}^{-1}$. Care este constanta elastică a resortului dacă vehiculul cîntărește 1,00 t? Care va fi frecvența vibrațiilor dacă cinci pasageri, avînd fiecare 75 kg, călătoresc în vehicul?

17. Scala unui dinamometru cu indicațiile între 0 și 142 N are o lungime de 10 cm. Un pachet suspendat de dinamometru oscilează vertical cu

o frecvență de 2,0 oscilații pe secundă. Cât cântărește pachetul?

18. Plecând de la ecuația (15-17) pentru conservarea energiei (cu $\frac{1}{2}kA^2 = E$), să se obțină elongația în funcție de timp prin integrarea ecuației (15-18). Să se compare cu ecuația (15-8).

19. Dacă elongația este egală cu jumătate din amplitudine, ce fracțiune din energia totală este de natură cinetică și ce fracțiune este de natură potențială într-o mișcare armonică simplă? La ce elongație energia este jumătate cinetică și jumătate potențială?

20. (a) Să se arate că în mișcarea armonică simplă, energia potențială medie este egală cu energia cinetică medie dacă media se ia în raport cu timpul pe intervalul unei perioade a mișcării, și că această medie este egală cu $\frac{1}{4}kA^2$. (Vezi fig. 15-9, a).

(b) Să se arate că dacă media este luată în raport cu poziția pe intervalul unui ciclu, energia potențială medie este egală cu $\frac{1}{6}kA^2$ și energia cinetică me-

die este egală cu $\frac{1}{3}kA^2$. (Vezi fig. 15-9, b). (c) Să se explice din punct de vedere fizic de ce cele două rezultate de mai sus (a și b) sînt diferite.

21. (a) Să se arate că relațiile generale pentru perioada și frecvența oricărei mișcări armonice sînt

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a}} \text{ și } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{a}{x}}.$$

(b) Să se arate că relațiile generale pentru perioada și frecvența oricărei mișcări armonice unghiulare simple sînt

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{\theta}{\alpha}} \text{ și } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\alpha}{\theta}}.$$

22. Resort vertical într-un câmp gravitațional uniform. Să considerăm un resort fără masă cu constanta

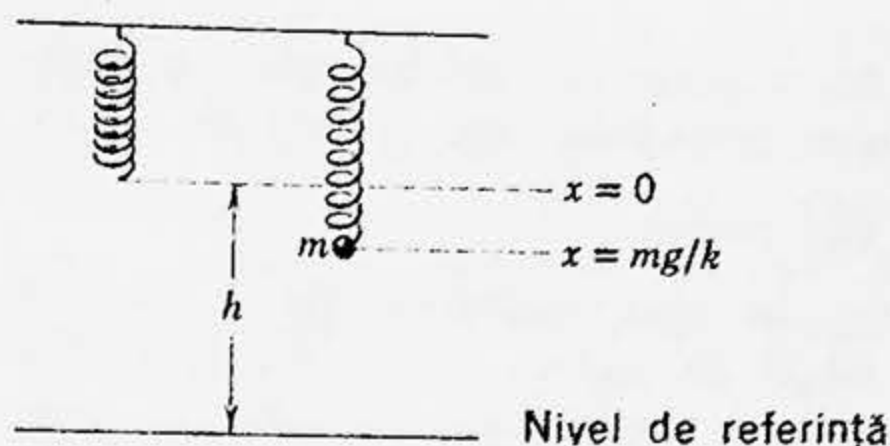


Figura 15-24.

elastică k într-un câmp gravitațional uniform. Să legăm de resort un corp de masă m . (a) Să se arate că dacă $x=0$ marchează poziția liberă, relaxată a resortului, poziția de echilibru static este dată de $x=mg/k$ (vezi fig. 15-24). (b) Să se arate că ecuația mișcării sistemului resort-corp este

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

și că soluția pentru elongație ca funcție de timp este $x = A \cos(\omega t + \delta) + mg/k$, unde $\omega = \sqrt{k/m}$ ca și mai înainte. (c) Să se arate, deci, că sistemul are aceiași parametri ω , v , a , v și T într-un câmp gravitațional uniform ca și în absența unui astfel de câmp, cu singura deosebire că poziția de echilibru este deplasată cu mg/k . (d) Să considerăm acum că energia sistemului $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x) = \text{const.}$ Să se arate că derivarea în raport cu timpul duce la ecuația mișcării de la punctul (b). (e) Să se arate că dacă masa cade de la $x=0$ spre poziția de echilibru static $x=mg/k$, pierderea de energie potențială gravitațională se transformă jumătate într-o creștere de energie potențială elastică și jumătate într-o creștere a energiei cinetice. (f) În sfârșit, să considerăm sistemul în mișcare în jurul poziției de echilibru static. Să se calculeze separat variația energiei potențiale gravitaționale și variația energiei potențiale elastice atunci când corpul se mișcă în sus pe o distanță A și atunci când corpul se mișcă în jos pe o distanță A .

Să se arate că variația *totală* a energiei potențiale este aceeași în fiecare caz, anume $\frac{1}{2} kA^2$.

În baza rezultatelor de la punctele (c) și (f), putem pur și simplu ignora câmpul gravitațional uniform în analiza problemei deplasând pur și simplu poziția de referință de la $x=0$ pînă la $x_0 = x - mg/k = 0$. Noua curbă a energiei potențiale $[E_p(x_0) = \frac{1}{2} kx^2 + \text{const}]$ are aceeași formă parabolică ca și curba energiei potențiale în absența câmpului gravitațional $[E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2]$.

23. Un pendul simplu cu lungimea de 1,00 m face 100 oscilații complete în 204 s într-o anumită localitate. Care este valoarea accelerației gravitaționale în acel loc?

24. Care este lungimea unui pendul simplu a cărui perioadă este exact 1 s într-un punct unde $g = 9,82 \text{ m/s}^2$?

25. Să se arate că tensiunea maximă din firul unui pendul simplu, cînd amplitudinea θ_m este mică, este $mg(1 + \theta_m^2)$. În ce poziție a pendulului tensiunea este maximă?

26. (a) Care este frecvența unui pendul simplu de 2,0 m lungime? (b) Presupunînd amplitudini mici, care ar fi frecvența sa într-un lift care accelerează în sus cu o accelerație de $2,0 \text{ m/s}^2$? (c) Care ar fi frecvența sa în căderea liberă?

27. Un pendul simplu de lungime l și de masă m este suspendat într-un vehicul care se mișcă cu o viteză constantă v pe un cerc de rază R . Dacă pendulul execută mici oscilații în jurul poziției sale de echilibru, care va fi frecvența oscilațiilor sale?

28. Care este perioada unui pendul format dintr-o riglă de un metru liberă să oscileze în jurul unei axe orizontale trecînd printr-un capăt? Prin diviziunea 75 cm? Prin diviziunea 60 cm?

29. Să se arate că dacă o tijă uniformă de lungime l este montată astfel încît să se rotească în jurul unei axe orizontale perpendiculară pe tije, la o distanță d de centrul de masă, perioada are o valoare *minimă* pentru $d = l/\sqrt{12} = 0,289 l$.

30. Un disc de 1,0 m în diametru este tăiat dintr-o tablă de metal. Discul este pus să oscileze ca un pendul prin găurirea unui mic orificiu în el și atîrnarea lui pe un cui bătut în perete. Fie l distanța de la cui pînă la centrul plăcii. (a) Pentru ce valoare sau ce valori ale lui l perioada va fi de 1,7 s? (b) Să presupunem că vrem ca perioada să fie cît mai mică posibil. Ce valoare a lui l trebuie folosită?

31. Un cerc de butoi cu rază de 0,60 m și masa de 3,6 kg este suspendat pe un cui orizontal. (a) Care este frecvența oscilațiilor sale pentru devieri mici de la poziția de echilibru? (b) Care este lungimea pendulului simplu echivalent?

32. O sferă solidă cu masa de 2,0 kg și diametrul de 0,30 m este suspendată pe o sîrmă. Să se afle perioada oscilațiilor unghiulare pentru deplasări mici dacă constanta de torziune a sîrmei este $6,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m/rad}$.

33. Balansorul unui ceasornic vibrează cu o amplitudine unghiulară de π rad și cu o perioadă de 0,50 s. Să se afle: (a) viteza unghiulară maximă a balansorului, (b) viteza unghiulară a roții balansorului atunci cînd deplasarea sa unghiulară este de $\pi/2$ rad și (c) accelerația unghiulară a balansorului atunci cînd deplasarea unghiulară este de $\pi/4$ rad.

34. Electronii dintr-un osciloscop sînt deviați de două câmpuri electrice perpendiculare între ele astfel încît în fiecare moment t deplasarea este dată de

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos (\omega t + \alpha).$$

(a) Să se descrie traiectoria electronilor și să se găsească ecuația ei dacă $\alpha = 0^\circ$. (b) Dacă $\alpha = 30^\circ$ (c) Dacă $\alpha = 90^\circ$.

35. *Figurile lui Lissajous*. Cînd se compun oscilații perpendiculare între ele, frecvențele de mișcare a particulei în direcția x și y nu trebuie să fie neapărat egale, astfel încît în cazul general ecuațiile (15-30) devin

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \delta) \text{ și } y = A_y \cos(\omega_y t + \alpha).$$

Traectoria particulei nu mai este o elipsă, ci așa numită *curbă Lissajous*, după numele lui Jules Antoine Lissajous (1822—1880) care a găsit primul astfel de curbe în 1857. (a) Dacă ω_x/ω_y este un număr rațional, astfel încît frecvențele unghiulare ω_x și ω_y sînt „comensurabile”, atunci curba este închisă și mișcarea se repetă la intervale regulate de timp. Să se presupună că $A_x = A_y$ și $\delta = \alpha$ și să se deseneze curba Lissajous pentru $\omega_x/\omega_y = 1/2, 1/3$ și $2/3$. (b) Fie ω_x/ω_y un număr rațional, de exemplu $1/2, 1/3$ sau $2/3$. Să se arate că forma curbei Lissajous depinde de diferența de fază $\alpha - \delta$. Să se traseze curbele pentru $\alpha - \delta = 0, \pi/4$ și $\pi/2$ rad. (c) Dacă ω_x/ω_y nu este un număr rațional, curba este „deschisă”. Convingeți-vă că după un timp lung, curba va trece prin orice punct situat în dreptunghiul mărginit de $x = \pm A_x$ și $y = \pm A_y$, particula nu va trece niciodată de două ori printr-un punct dat cu aceeași viteză.

36. (a) Să se arate că dacă $m_2 \rightarrow \infty$ în ecuația (15-33) atunci $\mu \rightarrow m_1$.

(b) Să se arate că efectul unui perete finit ($m_2 < \infty$) asupra oscilațiilor unui corp de masă m_1 de la capătul unui resort legat de perete este de a reduce perioada sau de a crește frecvența oscilațiilor în comparație cu (a). (c) Să se arate că dacă $m_2 = m_1$ efectul este același ca și cum resortul ar fi tăiat în două, fiecare masă oscilînd independent în jurul centrului de masă de la mijloc.

37. (a) Care este masa redusă a fiecăreia din următoarele molecule biatomice: O_2 , HCl și CO ? Să se exprime rezultatul în unități atomice de

masă, masa unui atom de hidrogen fiind aproximativ 1,00 u. (b) O moleculă de HCl vibrează pe o frecvență fundamentală $\nu = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Care este „constanta elastică” efectivă k pentru forțele de cuplaj dintre atomi? În termenii experienței dv. cu resorturi ordinare, ați putea spune că acest „resort molecular” este relativ rigid sau moale?

38. Resortul din figura 15-17, a are o constantă elastică $k = 250 \text{ N/m}$. Fie $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ și $m_2 = 3,0 \text{ kg}$. (a) Care este frecvența de oscilație a sistemului format din cele două corpuri? (b) Care este raportul E_1/E_2 al energiilor cinetice ale celor două corpuri?

39. Să se arate că energia cinetică a oscilatorului format din cele două corpuri din figura 15-17, a este dată de $E_c = \frac{1}{2} \mu v^2$, unde μ este masa redusă și $v (=v_1 - v_2)$ este viteza relativă. Este util de observat că impulsul se conservă în timpul oscilațiilor sistemului.

40. Dacă masa unui resort m_s nu este neglijabilă dar este mică în comparație cu masa m a obiectului suspendat de el, perioada mișcării este $T = 2\pi \sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Să se deducă acest rezultat. (Indicație: Condiția $m_s \ll m$ este echivalentă cu ipoteza că resortul se întinde uniform pe lungimea sa.)

41. (a) Un cilindru solid este legat de un resort orizontal fără masă astfel încît el se poate rostogoli fără alunecare de-a lungul unei suprafețe orizontale ca în figura 15-25. Constanta elastică k a resortului este $3,0 \text{ N/m}$. Dacă sistemul este lăsat liber din repaus într-o poziție în care resortul

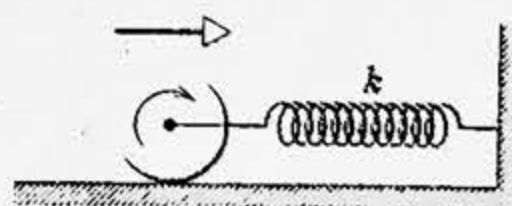


Figura 15-25.

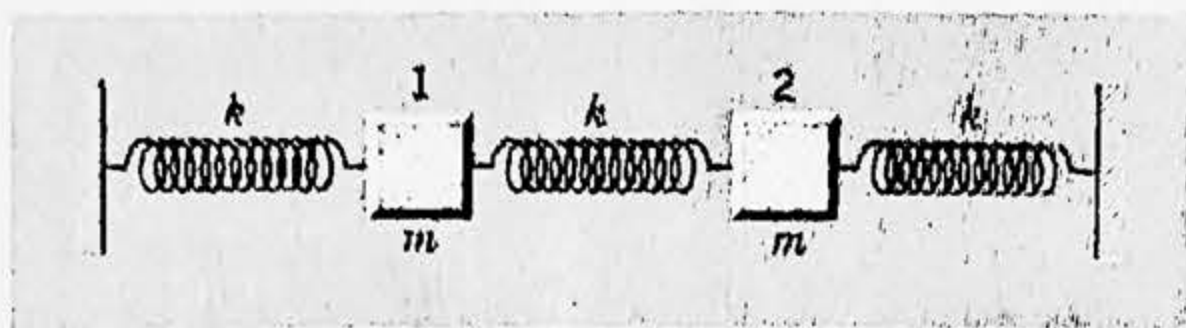


Figura 15-26.

este alungit cu 0,25 m, să se afle energia cinetică de translație și energia cinetică de rotație a cilindrului atunci când trece prin poziția de echilibru. Să se arate că în aceste condiții centrul de masă al cilindrului execută o mișcare armonică simplă cu perioada

$$T = 2\pi \sqrt{3M/2k}.$$

42. Plecând de la ecuația (15-41), să se afle viteza v ($-dx/dt$) în mișcarea oscilatorie forțată. Să se arate că amplitudinea vitezei este

$$v_m = F_m / [(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}$$

Ecuațiile de la paragraful 15-10 sînt identice ca formă cu cele care reprezintă un circuit electric conținînd o rezistență R , o inductanță L și un condensator C în serie cu o t.e.m. alternativă $V = V_m \cos \omega''t$. Prin urmare, b , m , k și F_m sînt analogii lui R , L ,

$1/C$ și respectiv V_m iar x și v sînt analogii sarcinii electrice q și respectiv curentului i . În cazul electric amplitudinea curentului i_m , analogă cu amplitudinea vitezei v_m de mai sus, este folosită pentru a descrie calitatea rezonanței.

43. Două corpuri cu masele egale m și trei resorturi identice de constantă elastică k sînt aranjate ca în figura 15-26. (a) Fie x_1 , x_2 elongațiile fiecărei mase de la poziția sa de echilibru. Să se arate că

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1)$$

și

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2)$$

(b) Să se afle frecvențele de vibrație ale sistemului presupunînd o soluție de forma $x_1 = A_1 \sin \omega t$, și $x_2 = A_2 \sin \omega t$.

Gravitația

16-1. Introducere istorică

Pînă în secolul la XVII-lea tendința unui corp de a cădea către Pămînt, adică greutatea sa, era privită ca o proprietate inherentă tuturor corpurilor, neavînd nevoie de nici o altă explicație. Faptul că greutatea unui corp trebuie privită ca o forță de atracție dintre Pămînt și acel corp a fost o idee care i-a venit lui Newton și unora dintre contemporanii săi, în special lui Robert Hooke.

Legile care guvernează mișcările corpurilor cerești erau privite ca fiind cu totul diferite de cele care guvernează mișcările corpurilor de pe Pămînt. Mișcarea corpurilor cerești în particular a planetelor și a Soarelui, era un subiect de mare interes în acel timp. Acest subiect era discutat de studenții în filozofia naturii de la Cambridge în 1664. În 1665 a izbucnit epidemia de ciumă. Școala a fost închisă și studenții au fost trimiși acasă. Unul dintre ei era Isaac Newton, pe atunci „elev al Colegiului” în vîrstă de 23 de ani.

Acasă, în Woolsthorpe, Newton a continuat să gîndească la aceste chestiuni. Se spune că a fost inspirat cînd a văzut un măr căzînd pe Pămînt dintr-un pom¹. I-a venit ideea că aceeași forță a gravitației care atrage mărul către Pămînt ar putea atrage de asemenea și Luna către Pămînt. Newton a raționat că accelerația centripetă a Lunii pe orbita sa și accelerația în jos a unui corp de pe Pămînt, pot avea aceeași origine (figura 16-1). Însăși ideea că mișcările cerești și mișcările terestre ar fi supuse unor legi identice era o rupere a tradiției.

¹ Într-o biografie a lui Newton scrisă în 1752 de prietenul său Stukeley, autorul scrie că a luat odată ceaiul împreună cu Newton într-o grădină sub niște meri, cînd Newton a zis că s-a aflat în aceeași situație cînd i-a venit ideea gravitației. „Ea a fost sugerată de căderea unui măr, în timp ce el ședea într-o poziție contemplativă...”, scrie Stukeley.

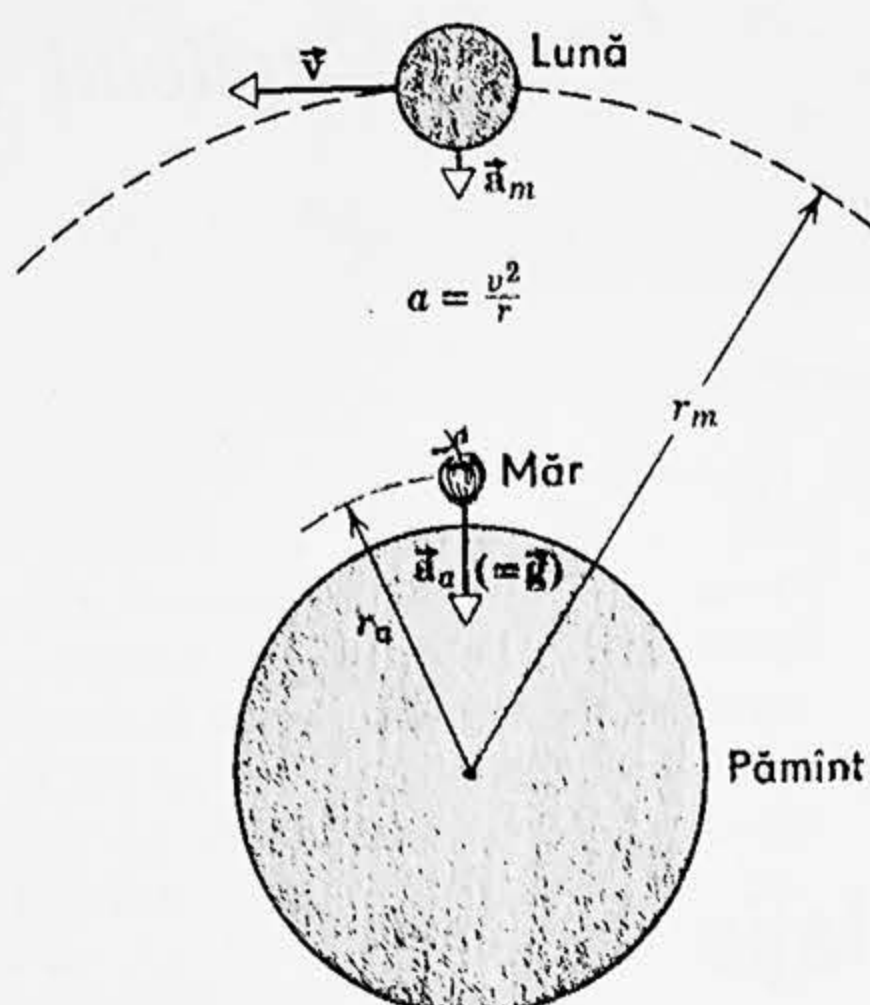


Figura 16-1. Atît Luna cît și mărul sînt accelerate către centrul Pămîntului. Diferența dintre mișcările lor provine din cauză că Luna are o viteză tangențială \vec{v} în timp ce mărul nu are.

Accelerația Lunii către Pămînt poate fi calculată din perioada sa de revoluție și din raza orbitei sale. Obținem $0,27 \text{ cm/s}^2$ (vezi exemplul 4, capitolul 4). Această valoare este de aproximativ 3 600 ori mai mică decît g , accelerația datorită gravitației pe suprafața Pămîntului. Newton a explicat această diferență presupunînd că accelerația unui corp în cădere este invers proporțională cu pătratul distanței sale pînă la Pămînt.

Întrebarea: ce înțelegem prin „distanța pînă la Pămînt” apare imediat. Newton considera fiecare particulă a Pămîntului ca contribuind la atracția gravitațională pe care acesta o exercită asupra altor corpuri. Distanța și direcția particulelor Pămîntului pînă la un anumit obiect sînt diferite pentru fiecare particulă. Newton a făcut o ipoteză îndrăzneată că Pămîntul ar putea fi tratat pentru aceste scopuri ca și cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul său.

Am putut trata Pămîntul ca o particulă față de Soare, de exemplu. Nu este însă deloc evident că am putea trata fără eroare Pămîntul ca o particulă față de un măr așezat numai cu cîțiva metri deasupra suprafeței sale. În baza acestei ipoteze însă, un corp care cade în vecinătatea suprafeței terestre se află la o distanță de o rază terestră pînă la centrul efectiv de atracție al Pămîntului, sau la 6 400 km. Luna se află la aproximativ 380 000 km distanță. Pătratul inversului raportului acestor distanțe este $(6\,400/380\,000)^2 = 1/3\,600$, în concordanță cu raportul accelerațiilor Lunii și mărului.

Se crede că Newton a făcut aceste calcule în 1666. Pentru a-l cita:

Și în același an (1666) am început să gîndesc despre gravitație extinzînd-o la orbita Lunii... Am dedus că forțele care mențin planetele pe Orbitele lor trebuie să fie invers proporționale cu pătratele distanțelor lor pînă la centrele în jurul cărora ele se rotesc: și prin aceasta am comparat forța necesară pentru a menține Luna pe Orbita sa cu forța de gravitație de la suprafața Pămîntului și am găsit un rezultat apropiat.

Rezultatele sale nu au fost publicate însă pînă în 1687 cînd a apărut cartea sa „*Principia Mathematica*“. Motivul, se crede că, a fost acela că el nu a fost satisfăcut la început de demonstrația ipotezei sale fundamentale relativ la acțiunea Pămîntului ca o particulă, pentru obiectele din afara sa¹. Înainte de a putea rezolva această problemă exact, Newton trebuia să inventeze calculul diferențial și integral. Demonstrația sa va fi dată în paragraful 16-6.

Forța exercitată asupra Lunii și asupra mărului depinde de masa Lunii și respectiv de masa mărului, precum și de masa Pămîntului. Prin urmare, Newton a presupus că forța gravitațională depinde de masele corpurilor care se atrag cît și de inversul pătratului distanței dintre ele. El a generalizat apoi conceptul de atracție gravitațională într-o lege a gravitației universale. El a considerat că toate corpurile, indiferent unde se află ele, exercită forțe de atracție gravitațională unele asupra altora. Cu scopul de a descoperi natura exactă a acestei forțe atractive, el a trebuit să considere corpuri de diferite mase la distanțe mult diferite unele de altele. El nu a putut varia distanța dintre centrul Pămîntului și un corp de pe Pămînt prea mult. Acesta a fost motivul pentru care el a comparat mai întîi mișcarea Lunii și a unui corp pe Pămînt. Forța dintre corpuri macroscopice diferite de pe Pămînt era atît de mică încît ea nu putea fi detectată în timpurile lui Newton. Newton și-a dat seama evident că această forță era prea mică și ușor mascată de forțele de frecare sau de alte forțe. Prin urmare, el și-a concentrat atenția asupra mișcării planetelor în încercarea de a confirma ideile sale.

Cele mai vechi încercări științifice de a înțelege sistemul solar au fost făcute de către greci. O descriere detaliată a concluziilor astronomiei grecești a fost dată de Ptolemeu (secolul al II-lea). Sistemul său este cunoscut sub numele de Teorie ptolemeică sau geocentrică. Ea presupune că Pămîntul este în repaus în centrul Universului, iar Soarele, Luna, planetele și stelele toate se rotesc în jurul Pămîntului pe orbite complicate. Această teorie a fost acceptată aproape cincisprezece secole și a influențat în mare măsură filozofia și literatura, precum și știința. Cu toate acestea, teoria a fost foarte complicată și nu putea explica cantitativ numărul tot mai mare de observații. În secolul al XVI-lea, Copernic a sugerat ideea că o descriere simplă a mișcărilor cerești ar putea fi obținută presupunînd că Soarele este în repaus în centrul Universului. În teoria copernicană sau heliocentrică, Pămîntul este o planetă care se rotește în jurul axei sale și efectuează o mișcare de revoluție în jurul Soarelui; celelalte planete au mișcări analoage (figura 16-2).

Controversa crescîndă asupra celor două teorii a stimulat pe astronomi spre a obține date de observație mai precise. Astfel de date au fost adunate de Tycho Brahe (1546—1601), care a fost ultimul mare

¹ Unii studenți în istorie cred că el a dorit pur și simplu să evite controversa. Publicarea cărții sale *Teoria luminii și a culorilor* l-a antrenat în discuții amarnice. Newton a fost un om timid și introspectiv. Bertrand Russell scrie despre Newton: „Dacă el ar fi întîlnit o opoziție de felul celeia cu care Galilei a trebuit să lupte, este probabil că niciodată nu ar fi publicat vreun rînd“. Halley, un prieten devotat, manifestînd un mare interes pentru mecanica cerească, a fost acela care l-a convins pe Newton să publice *Principia*.

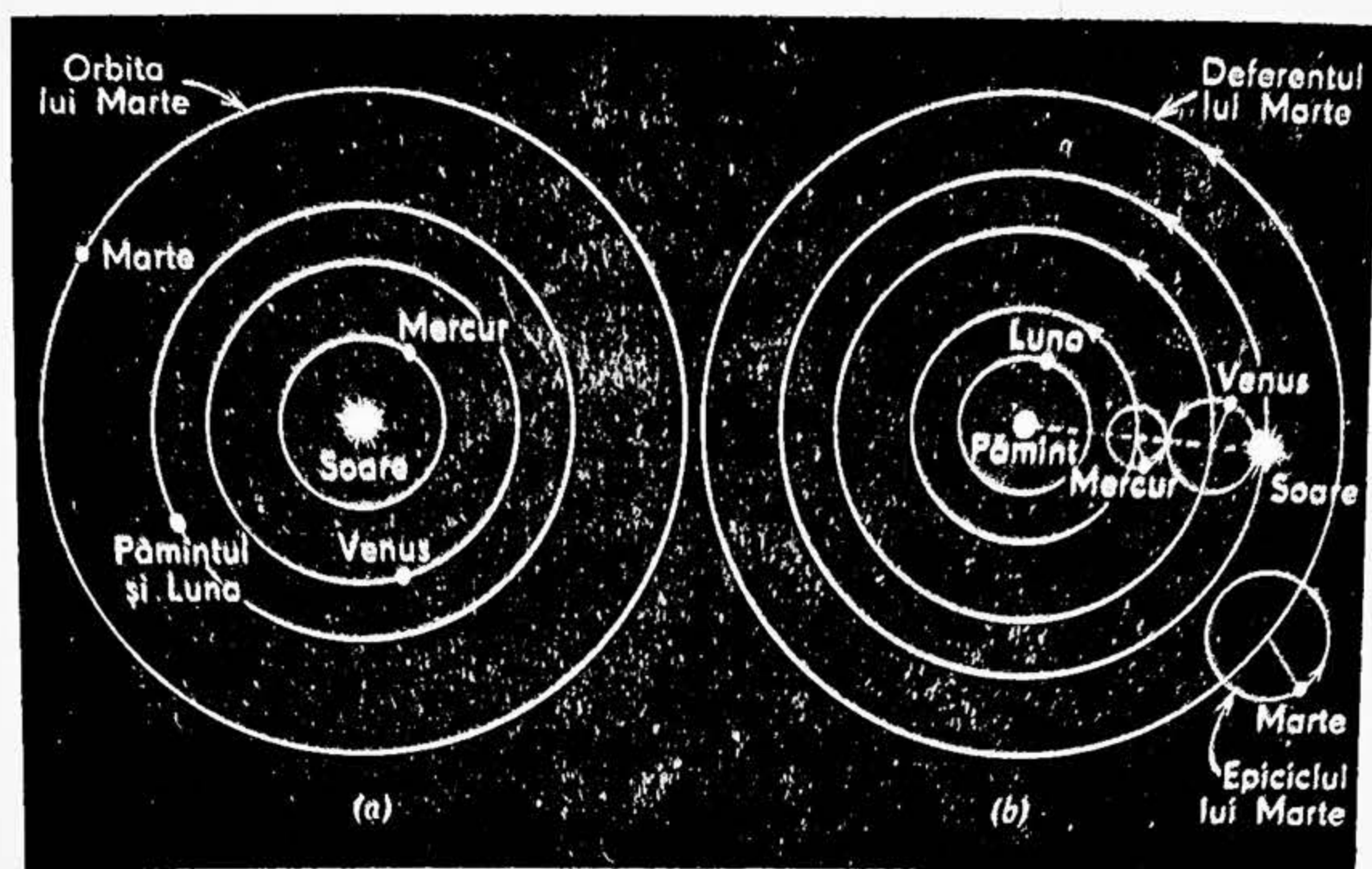


Figura 16-2. (a) Concepția lui Copernic asupra sistemului solar. Planetele se mișcă pe orbite concentrice cu Soarele în centru. (b) Concepția lui Ptolemeu asupra sistemului solar. Fiecare planetă execută două mișcări circulare simultane. De exemplu, Marte se mișcă pe un epiciclu în timp ce centrul epiciclului se mișcă de-a lungul unui deferent. Pământul se află în centrul sistemului. Numai Luna și Soarele nu au epicicluri.

astronom care a făcut observații fără să folosească vreun telescop¹. Datele sale asupra mișcărilor planetare au fost analizate și interpretate după circa douăzeci de ani de către Johannes Kepler (1571—1630), care a fost asistentul lui Brahe. Kepler a găsit importante regularități în mișcarea planetelor. Aceste regularități sau legități sînt cunoscute sub numele de *cele trei legi ale lui Kepler asupra mișcării planetelor*.

1. Toate planetele se mișcă pe orbite eliptice avînd Soarele într-unul din focare (legea orbitelor).

2. Raza vectoare care unește o planetă cu Soarele mătură arii egale în timpuri egale (legea ariilor).

3. Pătratul perioadei de revoluție a unei planete în jurul Soarelui este proporțional cu cubul distanței medii a planetei pînă la Soare (legea perioadelor).

Legile lui Kepler aduc un sprijin puternic teoriei lui Copernic. Ele arată simplitatea mare cu care pot fi descrise mișcările planetelor dacă Soarele se ia drept corp de referință. Totuși, aceste legi erau empirice:

¹ Primul telescop util din punct de vedere științific a fost construit în 1609 de către Galilei. Cu ajutorul acestui telescop Galilei a descoperit sateliții lui Jupiter și fazele lui Venus. Galilei a fost un puternic apărător al teoriei copernicane și a folosit observațiile sale pentru a aduce argumente în favoarea teoriei lui Copernic. Newton a inventat un telescop cu oglindă.

ele descriau pur și simplu mișcarea observată a planetelor fără nici o interpretare teoretică. Kepler nu avea nici o idee asupra forței care generează astfel de regularități. În adevăr, conceptul de forță nu a fost încă formulat clar, de aceea a fost un triumf al ideilor lui Newton faptul că a putut deduce legile lui Kepler din legile sale ale mișcării și din legea gravitației. Legea gravitației a lui Newton cerea în acest caz ca fiecare planetă să fie atrasă către Soare cu o forță proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul distanței sale pînă la Soare.

În acest mod Newton a fost în stare să explice mișcarea planetelor din sistemul solar și a corpurilor care cad în vecinătatea suprafeței Pămîntului prin intermediul unui concept comun. El a sintetizat prin aceasta într-o singură teorie științele separate precedente ale mecanicii terestre și mecanicii cerești. Semnificația științifică reală a operei lui Copernic stă în faptul că teoria heliocentrică a deschis calea către această sinteză¹. Ulterior, pe baza ipotezei că Pămîntul se rotește și efectuează o mișcare de revoluție în jurul Soarelui, a devenit posibil să se explice astfel de fenomene diverse precum mișcarea aparentă zilnică și anuală a stelelor, turtirea Pămîntului față de forma sferică, comportarea alizeelor și multe alte lucruri între care nu a putut fi stabilită o legătură atît de simplă în teoria geocentrică.

Este instructiv de revăzut dezvoltarea înțelegerii noastre privind mișcarea corpurilor din sistemul solar în termenii programului mecanicii clasice pe care l-am citat în capitolul 5 (vezi pag. 96). Din punct de vedere istoric au existat patru „cotituri”.

1. Copernic a arătat că Soarele și nu Pămîntul este corpul central al sistemului solar. În limbajul de astăzi el ne-a dat un sistem de referință (Soarele) mult mai potrivit decît reperul folosit anterior (Pămîntul) pentru descrierea mișcărilor sistemului solar. Printre alte avantaje, reperul lui Copernic, fix față de Soare, dar fără să se rotească cu acesta, este în esență un reper *inercial*; reperul legat de Pămîntul în rotație pe care trăim noi nu poate fi considerat astfel pentru problemele care se referă la mișcările planetare.

2. Brahe a făcut măsurători precise ale mișcărilor planetelor, văzute fiind de pe Pămînt. El a furnizat datele necesare de observație care au făcut posibil progresul ulterior.

3. Kepler, studiînd datele lui Brahe, a dedus din ele cele trei legi empirice simple ale mișcării planetelor pe care le-am discutat mai sus. Adoptînd sistemul de referință al lui Copernic, el a formulat informațiile cinematice asupra mișcării planetelor într-o formă simplă.

4. Newton a descoperit legile mișcării pentru sistemele mecanice în general și în particular legea forței care se aplică mișcărilor planetelor, anume legea gravitației universale.

¹ Newton a fost primul care a insistat asupra faptului că opera sa este o culminație a operei altora. El a spus odată într-o scrisoare către Robert Hooke: „Dacă eu am văzut mai departe (decît alții) aceasta se datorește faptului că am stat pe umerii Titanilor”. Printre acești titani trebuie să includem sigur pe Galilei și pe Kepler.

Astfel, în decurs de aproape două sute de ani vedem apărind: (1) un sistem de referință adecvat, (2) informații cinematice precise, (3) legile empirice ale mișcării planetelor și (4) legile generale ale mecanicii clasice și legea forței potrivită pentru mișcarea planetelor.

16-2. Legea gravitației universale

Forța dintre oricare două particule care au masele m_1 și m_2 și se află la o distanță r una de alta, este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește particulele și are mărimea

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (16-1)$$

unde G este o constantă universală având aceeași valoare pentru oricare pereche de particule.

Aceasta este legea lui Newton a atracției (gravitației) universale. Este important de subliniat imediat mai multe trăsături ale acestei legi pentru a o înțelege cu claritate.

În primul rând forțele gravitaționale dintre două particule constituie o pereche acțiune-reacțiune. Prima particulă exercită o forță asupra celei de a doua particulă, îndreptată spre prima particulă de-a lungul liniei care unește cele două particule. Analog, cea de a doua particulă exercită o forță asupra primei particule, îndreptată către cea de a doua particulă de-a lungul liniei care le unește. Aceste forțe sînt egale în modul dar opuse ca sens.

Constanta universală G nu trebuie confundată cu \vec{g} care reprezintă accelerația unui corp determinată de atracția gravitațională a Pămîntului asupra corpului. Constanta G are dimensiunile L^3/MT^2 și este un scalar; \vec{g} are dimensiunile L/T^2 , este un vector și nu este nici universal nici constant.

Observăm că legea atracției universale a lui Newton nu este o ecuație de definiție pentru nici una din mărimile fizice conținute în ea (forță, masă sau lungime). Conform programului nostru pentru mecanica clasică din capitolul 5, forța este definită prin legea a doua a lui Newton, $F=ma$. Esența acestei legi constă însă în ipoteza că forța exercitată asupra unei particule, astfel definită, poate fi legată într-un mod simplu de proprietățile măsurabile ale particulei și ale mediului său înconjurător, adică se presupune existența unor legi simple ale forțelor. Legea atracției universale reprezintă o astfel de lege simplă. Constanta G trebuie să fie aflată din experiență. Odată G determinat pentru o pereche dată de corpuri, putem folosi această valoare în legea gravitației pentru a determina forțele gravitaționale dintre oricare altă pereche de corpuri.

Observăm de asemenea că ecuația (16-1) exprimă forța dintre două puncte materiale (corpuri punctiforme). Dacă vrem să determinăm forța dintre două corpuri extinse, ca de exemplu Pămîntul și Luna, trebuie să privim fiecare corp ca fiind descompus în particule. Atunci trebuie calculată interacția dintre toate particulele. Calculul integral face posibil un astfel de calcul. Mobilul care l-a determinat pe Newton să

dezvolte calculul diferențial și integral a apărut în parte din dorința de a rezolva astfel de probleme. În general, este incorect să presupunem că întreaga masă a unui corp poate fi concentrată în centrul său de masă pentru scopurile gravitaționale. Această ipoteză este însă corectă pentru sfere uniforme, un rezultat pe care îl vom folosi adesea și-l vom demonstra în paragraful 16-6.

În legea atracției universale este conținută implicit ideea că forța gravitațională dintre două particule este independentă de prezența altor corpuri sau de proprietățile spațiului intermediar. Corectitudinea acestei idei depinde de corectitudinea deducțiilor care o folosesc și a fost pînă astăzi mărginită. Acest fapt a fost folosit de unii pentru a elimina existența posibilă a „ecranelor gravitaționale”.

Putem exprima legea atracției universale sub o formă vectorială. Fie vectorul de poziție \vec{r}_{12} îndreptat de la particula de masă m_1 spre particula de masă m_2 , așa cum arată figura 16-3, a. Forța gravitațională \vec{F}_{21} , exercitată asupra lui m_2 de către m_1 este dată în direcție și modul de relația vectorială

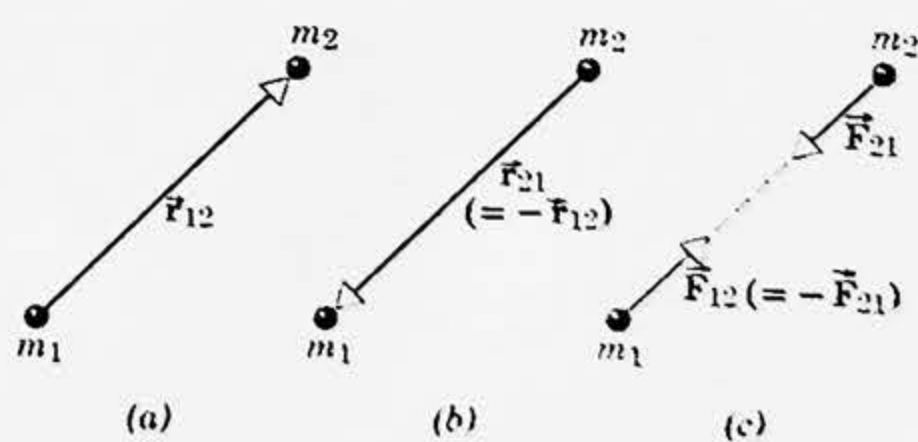
$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (16-2, a)$$

în care r_{12} este modulul lui \vec{r}_{12} . Semnul minus din ecuația (16-2, a) arată că \vec{F}_{21} este îndreptată în sens opus lui \vec{r}_{12} , adică forța gravitațională este atractivă, m_2 simte o forță îndreptată către m_1 (vezi fig. 16-3). Faptul că ecuația (16-2, a) este în adevăr o lege a invers proporționalității cu pătratul distanței se poate vedea scriind-o sub forma $\vec{F}_{21} = -(Gm_1 m_2 / r_{12}^2) (\vec{r}_{12} / r_{12})$; aici vectorul de poziție împărțit prin modulul său propriu, \vec{r}_{12} / r_{12} este pur și simplu un versor \vec{u} , în direcția vectorului de poziție. Dacă exprimăm relația sub o formă scalară egalînd modulii ambilor membrii, un factor r_{12} de la numărător se simplifică cu unul din factorii lui r_{12}^3 de la numitor și rezultă relația invers proporționalității cu pătratul distanței din ecuația (16-1).

Forța exercitată asupra lui m_1 de către m_2 este atunci

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad (16-2, b)$$

Figura 16-3. Forța exercitată asupra lui m_2 (de către m_1), \vec{F}_{21} , este direcționată în sens opus vectorului \vec{r}_{12} dus de la m_2 la m_1 . Forța exercitată asupra lui m_1 (de către m_2), \vec{F}_{12} este direcționată în sens opus vectorului \vec{r}_{21} dus de la m_1 la m_2 . $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, forțele fiind acțiunea și reacțiunea.



Observăm că în ecuațiile (16-2) $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ (vezi fig. 16-3, a, b) astfel încît, după cum era de așteptat, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (vezi fig. 16-3, c); adică forțele gravitaționale care acționează asupra a două corpuri formează o pereche acțiune-reacțiune.

16-3. Constanta gravitației universale, G

Pentru a determina valoarea lui G este necesar să măsurăm forța de atracție între două corpuri de mase cunoscute. Prima măsurătoare precisă a fost efectuată de către lordul Cavendish în 1798. Perfecționări importante au fost făcute de către Poynting și Boys în secolul al XIX-lea. Valoarea actuală acceptată pentru G a fost obținută de către P. R. Heyl și P. Chizanowski de la Biroul Național de Standarde al S.U.A. în 1942. Această valoare este

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

cu o precizie de $0,003 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Constanta G poate fi determinată prin metoda deflexiei maxime ilustrată în figura 16-4. Două bile mici, fiecare de masă m , sînt fixate de capetele unei tije ușoare. Această „halteră” rigidă este suspendată cu axa sa orizontală printr-un fir vertical fin. Două bile mari, fiecare de masă M , sînt plasate în vecinătatea capetelor halterei. Cînd bilele mari sînt în pozițiile A și B , bilele mici sînt atrase, în virtutea legii gravitației, și asupra halterei se exercită un moment care o rotește în sens trigonometric, văzută fiind de sus. Cînd bilele mari sînt în pozițiile A' și B' , haltera se rotește în sens orar. Firul se opune acestor momente atunci cînd este răsucit. Unghiul θ cu care firul este răsucit

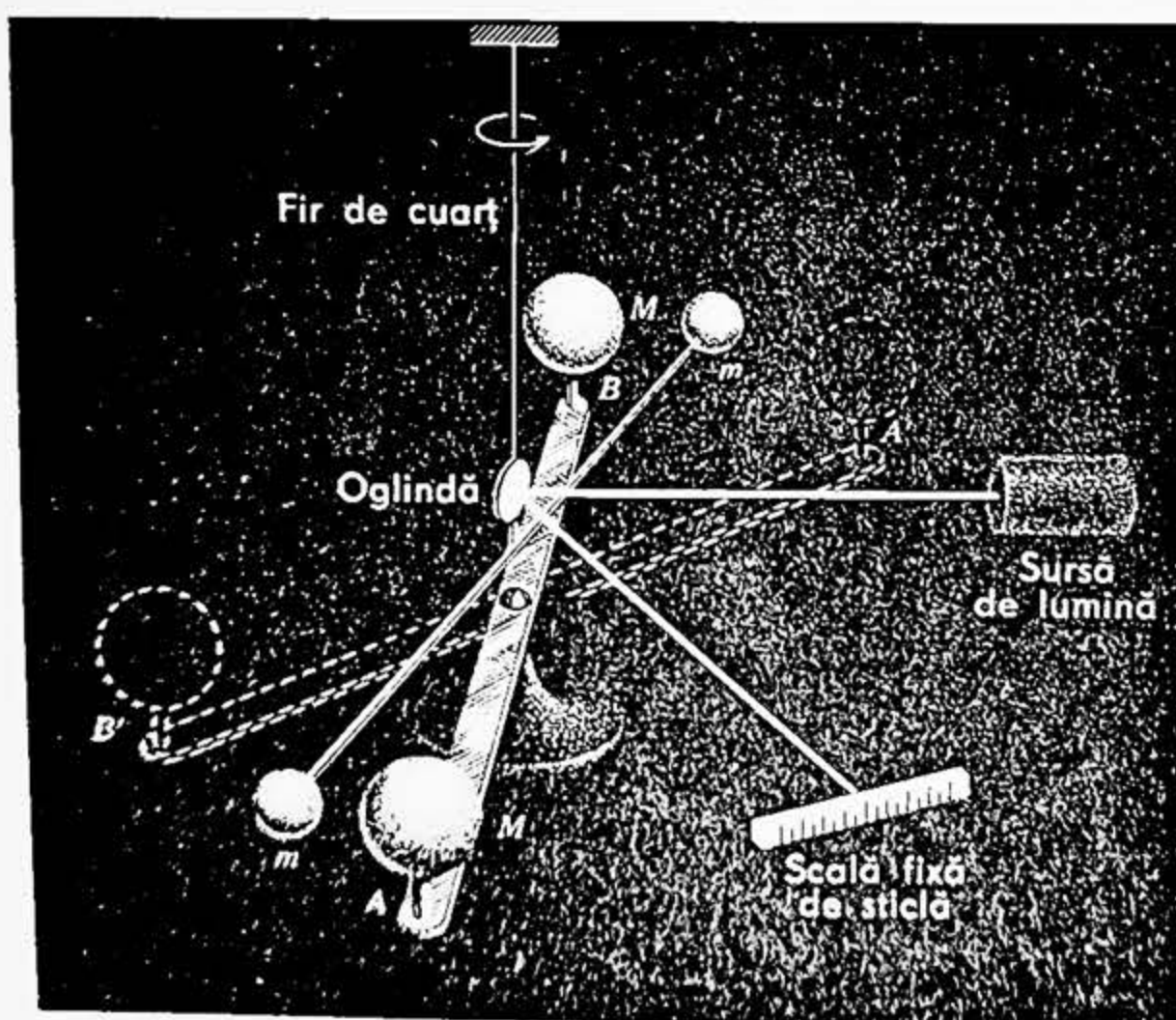


Figura. 16-4. Balanța lui Cavendish folosită pentru verificarea experimentală a legii lui Newton privind atracția universală. Corpurile de mase m, m sînt suspendate de un fir. Corpurile de mase M, M se pot roti pe un suport fix. Imaginea unui filament de bec este reflectată pe o oglindă fixată de m, m și cade pe scară astfel încît poate fi măsurată orice rotație a lui m, m .

atunci cînd bilele sînt deplasate dintr-o poziție în alta este măsurat prin observarea deflexiei unui fascicul de lumină reflectat pe o mică oglindă fixată pe fir. Dacă masele bilelor și distanțele dintre ele, precum și constanta de torsiune a firului sînt cunoscute, putem calcula pe G din unghiul de răsucire măsurat. Forța de atracție este foarte mică astfel încît firul trebuie să aibă o constantă de torsiune extrem de mică dacă vrem să obținem o răsucire detectabilă. În exemplul 1 de la sfîrșitul acestui paragraf, sînt indicate unele date din care se poate calcula G .

Masele bilelor din balanța lui Cavendish din figura 16-4 sînt desigur, nu puncte materiale (particule) ci obiecte extinse. Însă, deoarece ele sînt sfere uniforme, acționează din punctul de vedere gravitațional ca și cum întreaga lor masă ar fi concentrată în centrele lor (paragraful 16-6).

Deoarece G este atît de mic, forțele gravitaționale dintre corpurile de pe suprafața terestră sînt extrem de mici și pot fi neglijate în problemele obișnuite. De exemplu: două obiecte sferice avînd fiecare o masă 100 kg și separate între ele cu 1,0 m (între centrele lor), se atrag între ele cu o forță

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100 \cdot 100}{(1,0)^2} \text{ N} = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

sau aproximativ $6,8 \cdot 10^{-5}$ gf! Experiența lui Cavendish trebuie să fie într-adevăr una foarte delicată.

Forța gravitațională mare pe care Pămîntul o exercită asupra tuturor corpurilor de lîngă suprafața sa se datorește masei foarte mari a Pămîntului. În adevăr, putem determina masa Pămîntului în baza legii atracției universale și a valorii lui G calculată din experiența lui Cavendish. Din acest motiv se spune că Cavendish ar fi primul om care a „cîntărit” Pămîntul. Să considerăm Pămîntul de masă M_p și un obiect de pe suprafața sa de masă m . Forța de atracție este dată atît de

$$F = mg$$

cît și de

$$F = \frac{GmM_p}{R_p^2}$$

Aici, R_p este raza Pămîntului, care reprezintă distanța dintre cele două corpuri iar g este accelerația datorită gravitației pe suprafața Pămîntului. Combinînd aceste ecuații obținem:

$$M_p = \frac{gR_p^2}{G} = \frac{(9,80 \text{ m/s}^2) (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

sau

$$6,6 \cdot 10^{21} \text{ tone „greutate”}.$$

Dacă împărțim masa totală a Pămîntului la volumul său total, obținem densitatea medie a Pămîntului. Se găsește $5,5 \text{ g/cm}^3$ sau de circa 5,5 ori densitatea apei. Densitatea medie a rocilor de pe suprafața Pămîntului

este mult mai mică decât această valoare. Tragem concluzia că interiorul Pământului conține substanțe de densitate mai mare decât $5,5 \text{ g/cm}^3$. Din experiența lui Cavendish am obținut informații asupra naturii nucleului terestru (vezi întrebarea 5 și problema 35).

Exemplul 1. Să presupunem că sferile mici din figura 16-4 au fiecare o masă de $10,0 \text{ g}$, iar tija ușoară are o lungime de $50,0 \text{ cm}$. S-a găsit că perioada oscilațiilor de torsiune ale acestui sistem este de 769 s . Apoi două sfere fixe mari fiecare cu masa de $10,0 \text{ kg}$ sînt așezate în apropierea fiecărei sfere suspendate astfel încît să producă o torsiune maximă. Devierea unghiulară a tijei suspendate este atunci de $3,96 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ și distanța dintre centrele sferelor, mare și mică, este de $10,0 \text{ cm}$. Să se calculeze constanta universală a gravitației G din aceste date.

Perioada oscilațiilor de torsiune este dată de ecuația (15-24)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Pentru haltera rigidă, dacă neglijăm contribuția tijei ușoare,

$$I = \sum mr^2 = (10,0 \text{ g}) (25,0 \text{ cm})^2 + (10,0 \text{ g}) (25,0 \text{ cm})^2$$

sau

$$I = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Cu $T = 769 \text{ s}$, putem obține constanta de torsiune k :

$$k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(769 \text{ s})^2} = 8,34 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Relația dintre momentul aplicat și unghiul de răsucire este $\mathcal{M} = k\theta$. Îl știm acum pe k și valoarea lui θ din devierea maximă.

Momentul provine din forțele gravitaționale exercitate de sferile mari asupra sferelor mici. Acest moment va fi maxim pentru o distanță de separație dată, atunci cînd linia care unește centrele acestor sfere este perpendiculară pe tijă. Forța asupra fiecărei sfere mici este

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

și brațul forței pentru fiecare forță este jumătate din lungimea tijei ($l/2$). Atunci

$$\text{momentul} = \text{forța} \times \text{brațul forței}$$

sau

$$\mathcal{M} = 2 \frac{GMm}{r^2} \frac{l}{2}$$

Combinînd aceasta cu $\mathcal{M} = k\theta$ obținem

$$G = \frac{k\theta r^2}{Mml} = \frac{(8,34 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2) (3,96 \cdot 10^{-3} \text{ rad}) (0,100 \text{ m})^2}{(10,0 \text{ kg}) (0,0100 \text{ kg}) (0,500 \text{ m})} = 6,63 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Observăm că acest rezultat este cu aproximativ 1% mai mic decît valoarea acceptată. Ce am neglijat în acest calcul, care ar putea explica această diferență?

16-4. Masa inertă și masa gravitațională

Forța gravitațională exercitată asupra unui corp este proporțională cu masa, după cum arată ecuația (16-1). Această proporționalitate dintre forța gravitațională și masă este motivul pentru care noi considerăm de obicei că teoria gravitației este o ramură a mecanicii, în timp ce teoriile altor tipuri de forțe (electromagnetice, nucleară etc.) nu pot fi.

O consecință importantă a acestei proporționalități este faptul că putem măsura o masă măsurând forța gravitațională exercitată asupra ei. Aceasta se poate face folosind un dinamometru sau comparând forța gravitațională exercitată asupra unui corp cu cea exercitată asupra unui corp cu masa etalonată, ca într-o balanță; cu alte cuvinte, putem determina masa unui corp cântărindu-l. Aceasta ne oferă o metodă mai practică și mai convenabilă de măsurare a masei decât cea dată de definiția inițială a masei (paragraful 5-4).

Apare întrebarea dacă aceste două metode măsoară în adevăr o aceeași proprietate. Cuvântul masă a fost folosit în două situații experimentale cu totul diferite. De exemplu, dacă încercăm să împingem un bloc aflat în repaus pe o suprafață orizontală fără frecări, constatăm că este necesar un anumit efort pentru a-l mișca. Blocul pare a fi inert și tinde să rămână pe loc (în repaus), sau dacă este în mișcare el tinde să-și mențină mișcarea. Gravitația nu intervine aici deloc. Același efort ar fi necesar pentru accelerarea blocului și într-un spațiu lipsit de gravitație. Masa blocului este aceea care face necesară aplicarea unei forțe pentru a schimba mișcarea blocului. Aceasta este masa care figurează în $\vec{F} = m\vec{a}$ în experiențele noastre inițiale de dinamică. Numim această masă *m* **masă inertă** (sau masă inerțială). Dar există o situație diferită în care de asemenea este implicată masa blocului. De exemplu, este nevoie de un efort pentru a ține blocul în aer în repaus deasupra Pământului. Dacă nu îl sprijinim blocul va cădea pe Pământ într-o mișcare accelerată. Forța necesară pentru a ține blocul este egală în modul cu forța de atracție gravitațională dintre el și Pământ. Aici inerția nu joacă nici un rol; aici joacă rol proprietatea corpurilor materiale de a fi atrase de alte obiecte, precum Pământul. Forța este dată de

$$F = G \frac{m' M_p}{R_p^2},$$

unde m' este **masa gravitațională** a blocului. Sînt masele gravitaționale m' și inerțiale m ale corpului în realitate aceleași? Să examinăm aceasta mai atent.

Să considerăm două particule A și B cu masele gravitaționale m'_A și m'_B asupra cărora acționează o a treia particulă C de masă gravitațională m'_C . Fie particula a treia la egală distanță r de celelalte două. Atunci forța gravitațională exercitată asupra lui A de către C este

$$F_{AC} = G \frac{m'_A m'_C}{r^2}$$

și forța gravitațională exercitată asupra lui B de către C este

$$F_{BC} = G \frac{m'_B m'_C}{r^2}.$$

Raportul dintre forțele gravitaționale exercitate asupra lui A și B este egal cu raportul maselor lor gravitaționale, adică

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m'_A}{m'_B}.$$

Să presupunem acum că cel de-al treilea corp C este Pământul. Atunci F_{AC} și F_{BC} sînt ceea ce am numit *greutățile* corpurilor A și B . Prin urmare,

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m'_A}{m'_B}.$$

Prin urmare, legea atracției universale conține în cadrul ei rezultatul că *greutățile* diferitelor corpuri, în același loc pe suprafața Pământului, sînt exact proporționale cu masele lor *gravitaționale*.

Să presupunem acum că măsurăm masele inerte m_A și m_B ale patriculelor A și B cu ajutorul experiențelor dinamice, de exemplu folosind un resort ca în paragraful 5-4. Făcînd aceasta lăsăm apoi aceste particule să cadă către Pământ dintr-un loc dat și măsurăm accelerațiile lor. Găsim experimental că obiecte cu mase inerțiale diferite cad toate cu aceeași accelerație g provenită din atracția gravitațională terestră. Dar atracțiile gravitaționale terestre exercitate asupra acestor corpuri reprezintă *greutățile* lor, astfel încît folosind legea a doua a mișcării, obținem

$$G_A = m_A g, \quad G_B = m_B g$$

sau

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Cu alte cuvinte, *greutățile* corpurilor în același loc de pe Pământ sînt de asemenea exact proporționale cu *masele lor inerte*. Prin urmare, masa inertă și masa gravitațională sînt cel puțin proporționale între ele. În realitate ele sînt identice.

Newton a imaginat o experiență pentru a verifica direct echivalența aparentă a masei inerte și gravitaționale. Dacă revenim (paragraful 15-5) și urmărim deducerea perioadei unui pendul simplu, aflăm că perioada (pentru unghiuri mici) era dată de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{m'g}}$$

unde m de la numărător se referă la masa inertă a bilei pendulului iar m' de la numitor este masa gravitațională a bilei pendulului, astfel încît $m'g$ dă atracția gravitațională asupra bilei. Numai dacă presupunem că m este egal cu m' , așa cum am făcut acolo în mod implicit, obținem expresia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pentru perioadă. Newton a construit o bilă de pendul sub forma unei pături sferice subțiri. În această bilă goală a pus diferite substanțe, avînd grijă de fiecare dată să aibă aceeași *greutate* a substanței, determinată cu o balanță. Prin urmare, în toate cazurile forța exercitată asupra pendulului era aceeași pentru același

unghi. Deoarece forma externă a bilei era mereu aceeași, chiar rezistența aerului asupra pendulului mobil era aceeași. Atunci când o substanță era înlocuită cu alta în interiorul bilei, orice diferență în accelerație ar putea proveni dintr-o diferență a maselor inerte. O astfel de diferență s-ar manifesta printr-o schimbare a perioadei pendulului. Dar în toate cazurile, Newton a găsit o aceeași perioadă a pendulului, dată totdeauna de $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

Prin urmare, el a tras concluzia că $m = m'$ și că masele inerte și gravitaționale sînt echivalente.

În 1909, Eötvös a construit un aparat care putea detecta o diferență de $5/10^9$ în forța gravitațională. El a găsit că masele inerte egale suferă totdeauna forțe gravitaționale egale în limitele preciziei aparatului său. O versiune perfecționată a experienței lui Eötvös a fost efectuată în 1964 de către R. H. Dicke și colaboratorii săi, care a îmbunătățit precizia experienței inițiale cu un factor de cîteva sute.¹

În fizica clasică echivalența dintre masa gravitațională și masa grea a fost privită ca o întîmplare remarcabilă neavînd vreo semnificație profundă. În fizica modernă însă, această echivalență este privită ca o cheie ducînd la o înțelegere mai adîncă a gravitației (vezi paragraful 16-13). Aceasta a fost în adevăr o cheie importantă care a dus la dezvoltarea teoriei generale a relativității.

16-5. Variațiile accelerației gravitaționale

Pînă acum am considerat că accelerația datorită gravitației g este o constantă. Din legea gravitației a lui Newton rezultă însă evident că g trebuie să varieze cu altitudinea, adică cu distanța pînă la centrul Pămîntului. Am menționat deja aceasta în mod special în discuția cu Luna și mărul. Să calculăm acum variația lui g care are loc atunci cînd ne depărtăm de suprafața Pămîntului. Din ecuația (16-1)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

obținem, derivînd în raport cu r ,

$$dF = -2 \frac{G m_1 m_2}{r^3} dr.$$

Combinînd aceste două ecuații, obținem

$$\frac{dF}{F} = -2 \frac{dr}{r}.$$

Prin urmare, variația procentuală (sau relativă) a lui F este de două ori mai mare decît variația relativă a lui r . Semnul minus arată că forța descrește atunci cînd distanța crește. Dacă notăm cu m_1 masa Pămîntului și cu m_2 masa obiectului, forța gravitațională asupra obiectului datorită Pămîntului este

$$F = m_2 g$$

¹ vezi „Experiența lui Eötvös”, de R. H. Dicke, în *Scientific American*, decembrie 1961, pentru o prezentare elegantă a acestui subiect.

îndreptată spre Pământ. Dacă diferentțiem această expresie obținem

$$dF = m_2 dg$$

și împărțind această ecuație la precedenta, găsim că

$$\frac{dF}{F} = \frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r} \quad (16-3)$$

De exemplu, dacă ne depărtăm cu 16 km de suprafața Pământului, r variază de la aproximativ 6 400 km până la 6 416 km, deci o creștere relativă de 1/400. Prin urmare¹, g trebuie să varieze cu aproximativ $-1/200$ pe această distanță, sau de la aproximativ 9,80 m/s² până la aproximativ 9,75 m/s². Prin urmare, g este în adevăr aproape constant în vecinătatea suprafeței terestre la o latitudine dată. La altitudini mai înalte, cum sînt cele pentru o orbită tipică de satelit sau pentru orbita Lunii, g scade apreciabil, după cum se arată în tabela 16-1.

Tabela 16-1

VARIAȚIILE LUI g CU ALTITUDINEA LA LATITUDINEA DE 45°

Altitudine, metri	g , m/s ²	Altitudine, metri	g , m/s ²
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000 ¹	7,41
16 000	9,757	380 000 000 ²	0,00271

¹ Altitudine tipică a orbitelor sateliților.

² Raza orbitei Lunii.

Măsurătorile lui \vec{g} constituie o sursă esențială de informație despre forma Pământului. Pentru a defini problema mai precis, considerăm de obicei nu Pământul însuși, ci o suprafață închisă imaginară, numită *geoid*. Deasupra oceanelor geoidul coincide cu nivelul mediu al mării în timp ce deasupra continentelor el este definit ca o continuare a acestui nivel; în principiu, poziția geoidului poate fi găsită dacă am săpa mici canale la nivelul mării de-a lungul continentelor și am înregistra nivelul mediu al apei. Geoidul este o suprafață cu potențial gravitațional constant; în fiecare punct direcția firului cu plumb este perpendiculară pe ea.

Vechii greci credeau că Pământul este rotund, și unul din ei Eratostene (276—194 î.e.n.), a măsurat raza Pământului în ipoteza că el este o sferă. El a obținut o valoare de 7 400 km care trebuie comparată cu valoarea modernă de 6 371 km. Această informație fundamentală asupra formei Pământului a fost treptat uitată și nu a fost redescoperită decît prin marile călătorii de explorare din secolul al XV-lea.

Mai târziu, s-a aflat prin măsurători că într-o bună aproximație de ordinul II geoidul nu este o sferă, ci un elipsoid de revoluție, turtit după axa de rotație

¹ Ecuația (16-3) este o expresie diferențială și este exactă. Expresia corespunzătoare obținută atunci cînd dr este înlocuit cu o variație finită Δr este o aproximație bună numai dacă $\Delta r/r$ este foarte mic.

a Pământului și umflat la Ecuator. Raza Ecuatorului depășește în adevăr raza la Poli cu 21 km. Această turtire se datorește efectelor centrifuge în timpul rotației Pământului plastic. Suprafața geoidică nu este exact elipsoidală, fiind situată deasupra elipsoidului foarte aproape de acesta sub masele montane și în interiorul acestuia deasupra oceanelor.

Faptul că Ecuatorul se află la distanță mai mare de centrul Pământului decât Poli, înseamnă că trebuie să aibă loc o creștere treptată a valorii măsurate a lui g atunci când ne deplasăm de la Ecuator (latitudinea 0°) spre Poli (latitudinea 90°). Aceasta este arătat în tabela 16-2. După cum arată exemplul 2 însă, aproape jumătate din această variație poate fi explicată printr-un alt efect, și anume prin variația valorii efective a lui g produsă de rotația Pământului. Dacă Pământul s-ar roti îndeajuns de repede, de exemplu, obiectele de pe suprafața sa la Ecuator ar părea fără greutate, ceea ce înseamnă că valoarea efectivă a lui $g - G/m$ ar fi zero. Pentru toate vitezele de rotație mai mici decât această valoare critică, g are o valoare nenulă, bine definită, care este însă mai mică decât valoarea pe care ar avea-o în același punct dacă Pământul nu s-ar roti.

În 1959 s-a observat că orbita satelitului artificial al Pământului, Vanguard, calculată folosind valorile lui \vec{g} bazate pe forma de geoid elipsoidal, nu concordă exact cu orbita observată. S-a tras concluzia că geoidul este cel mai bine aproximat nu de un elipsoid de revoluție, ci de o figură de forma unei pere, capătul mai subțire al „pereii” fiind în emisfera nordică și ridicat cu aproximativ 15 m deasupra elipsoidului de referință. Mișcarea unui satelit este guvernată în fiecare moment de valoarea lui \vec{g} din acel loc. Astfel, un satelit terestru artificial constituie un aparat util pentru a explora valorile lui \vec{g} din vecinătatea suprafeței Pământului și pentru a deduce de aici informații asupra formei geoidului. Aceste studii continuă și astăzi¹.

Tabela 16-2

VARIAȚIILE LUI g CU LATITUDINEA LA NIVELUL MĂRII

Latitudinea	g m/s ²	Latitudinea	g , m/s ²
0°	9,78039	50°	9,81071
10°	9,78195	60°	9,81918
20°	9,78641	70°	9,82608
30°	9,79329	80°	9,83059
40°	9,80171	90°	9,83217

Exemplul 2. Efectul rotației Pământului asupra lui g . Figura 16-5 reprezintă o vedere schematică a Pământului privind către Polul Nord. Pe această figură se arată un corp mărit de masă m , atârnat de un dinamometru la Ecuator. Forțele ce acționează asupra acestui corp sînt: forța de tracțiune în sus a resortului w , care reprezintă greutatea aparentă a corpului, și atracția gravitațională terestră în jos $F = GmM_p/R_p^2$. Acest corp nu este în echilibru deoarece este supus accelerației centripete a_R în timpul rotației sale împreună cu Pământul. Trebuie să existe deci o forță netă care să acționeze asupra corpului spre centrul Pământului. În

¹ Vezi, de exemplu, „Orbitele sateliților și implicațiile lor geofizice”, de D. G. King-Hele, *Contemporary Physics*, aprilie 1961.

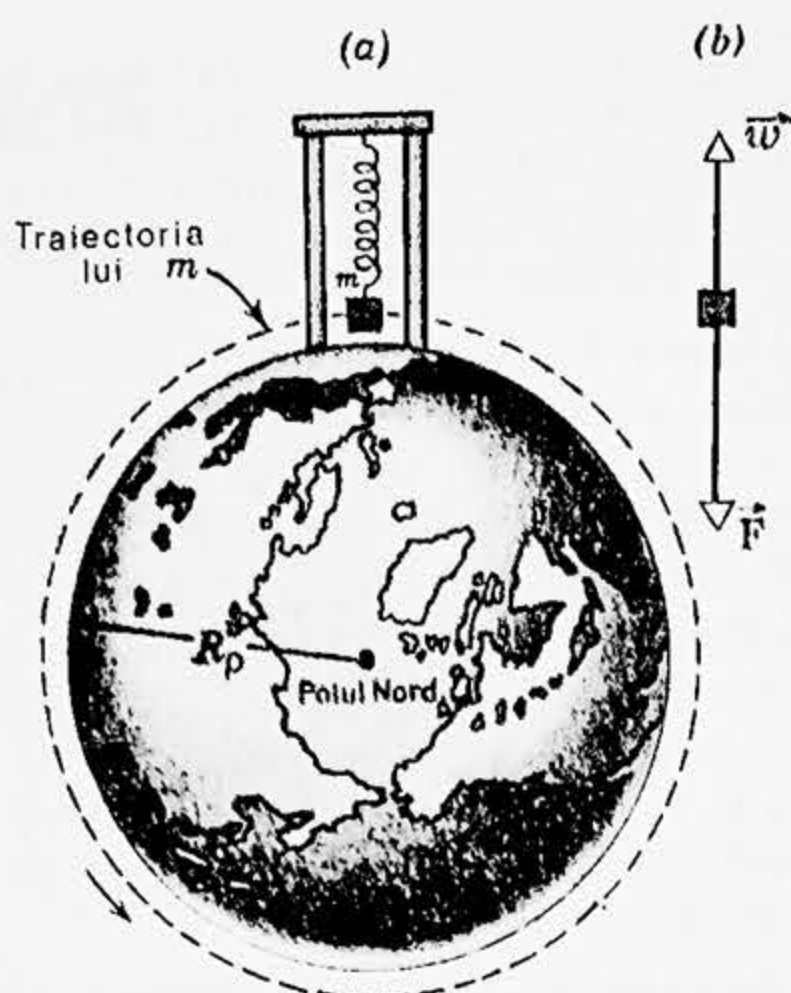


Figura 16-5. Exemplul 2. Efectul rotației Pământului asupra greutății unui corp măsurat de o balanță cu resort (dinanometru).

consecință, forța F de atracție gravitațională (greutatea adevărată a corpului) trebuie să depășească tracțiunea în sus w a balanței (greutatea aparentă a corpului).

Din legea a doua a mișcării obținem

$$F - w = ma_R,$$

$$\frac{GM_p m}{R_p^2} - mg = ma_R,$$

$$g = \frac{GM_p}{R_p^2} - a_R \quad \text{la Ecuator.}$$

La Poli $a_R = 0$, astfel încît

$$g = \frac{GM_p}{R_p^2} \quad \text{la Poli.}$$

Aceasta este valoarea lui g pe care am fi obținut-o peste tot (presupunînd un Pământ sferic), dacă am neglija rotația Pământului.

În realitate, accelerația centripetă nu este îndreptată către centrul Pământului, cu excepția Ecuatorului. Ea este îndreptată perpendicular către axa de rotație a Pământului la orice latitudine dată. Analiza detaliată este deci în realitate una bidimensională. Cazul extrem este însă cel al Ecuatorului. Acolo

$$a_R = \omega^2 R_p = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R_p = \frac{4\pi^2 R_p}{T^2},$$

în care ω este viteza unghiulară de rotație a Pământului, T este perioada și R_p este raza Pământului. Folosind valorile

$$R_p = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$$

obținem $a_R = 0,0336 \text{ m/s}^2$.

Referindu-ne la tabela 16-2, vedem că acest efect este suficient pentru a explica mai mult decît jumătate din diferența dintre valorile observate ale lui g la latitudinile mici și mari.

16-6. Efectul gravitațional al unei distribuții sferice a masei

Am folosit deja faptul că o sferă mare atrage particulele din exteriorul ei, exact ca și cum masa sferei ar fi concentrată în centrul ei. Să demonstrăm acum acest rezultat.

Să considerăm o pătură sferică de densitate uniformă a cărei grosime t este mică în comparație cu raza sa r (fig. 16-6). Ne interesează forța gravitațională pe care ea o exercită asupra unei particule exterioare P de masă m .

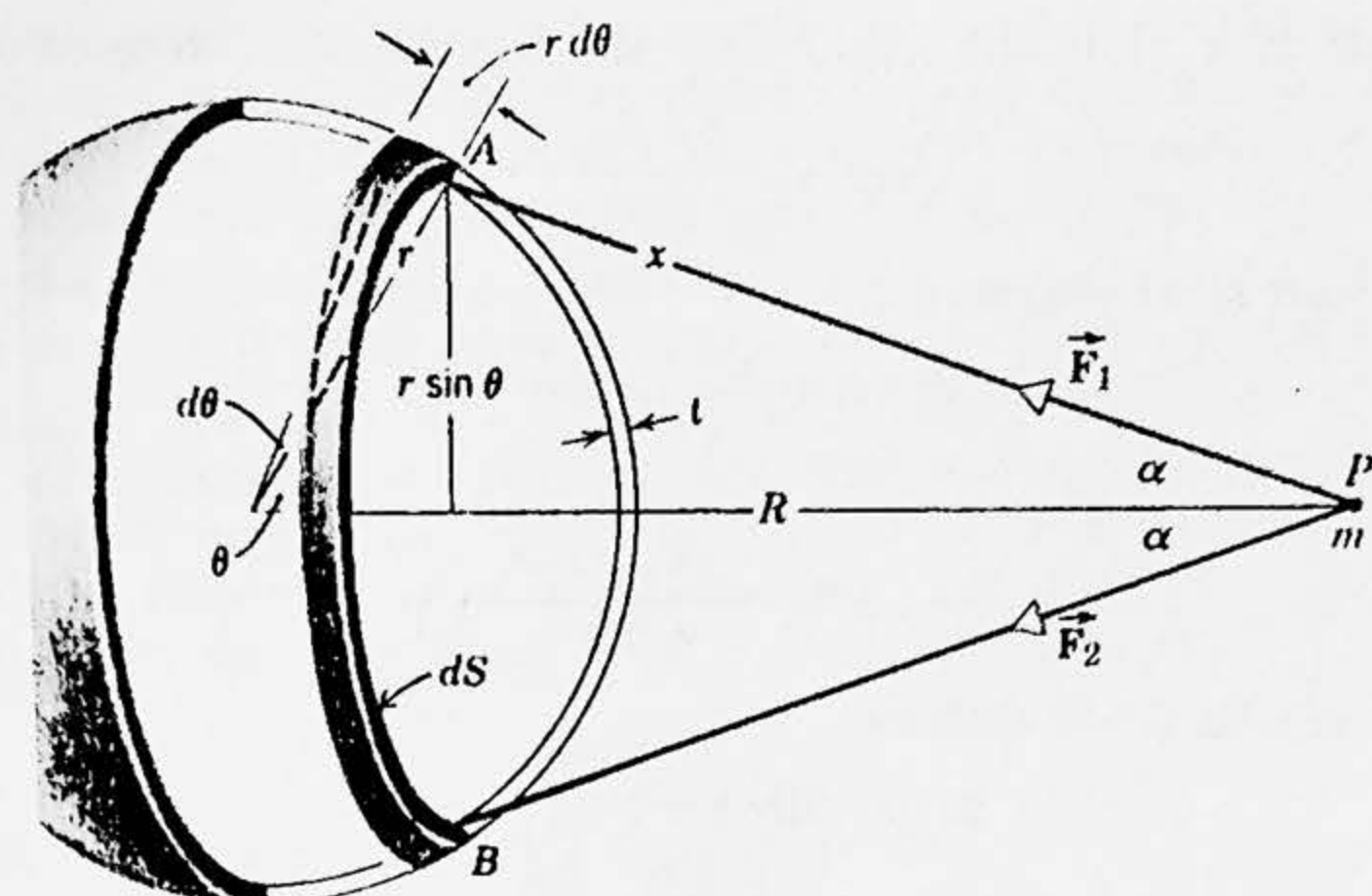


Figura 16-6. Atracția gravitațională a unei secțiuni dS dintr-o pătură sferică de substanță asupra unei particule de masă m .

Presupunem că fiecare particulă a păturii exercită asupra lui P o forță care este proporțională cu masa părții mici, invers proporțională cu pătratul distanței dintre acea parte a păturii și P și este îndreptată de-a lungul liniei care le unește. Trebuie să obținem apoi forța rezultantă asupra lui P datorită tuturor părților păturii sferice.

Partea mică a păturii din A atrage pe m cu o forță \vec{F}_1 . O porțiune mică de masă egală din B , egal depărtată de m dar diametral opusă lui A , atrage pe m cu o forță \vec{F}_2 . Rezultanta acestor două forțe asupra lui m este $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Observăm însă că componentele verticale ale acestor două forțe se reduc între ele și că componentele orizontale, $F_1 \cos \alpha$ și $F_2 \cos \alpha$, sînt egale. Împărțind pătura sferică în perechi de particule, ca acestea, putem vedea imediat că toate forțele transversale exercitate asupra lui m se reduc două cîte două. O mică masă în emisfera superioară exercită o forță asupra lui m a cărei componentă verticală dirijată în sus va anula componenta în jos a forței exercitate asupra lui m de către o masă egală localizată simetric în emisfera inferioară a păturii. Pentru a afla forța rezultantă exercitată asupra lui m și datorată păturii, este necesar să considerăm doar componentele orizontale.

Să luăm drept element de masă al păturii o bandă circulară notată cu dS în figură. Lungimea ei este $2\pi (r \sin \theta)$, lărgimea este $r d\theta$ și grosimea sa este t . Prin urmare, ea are un volum

$$dV = 2\pi t r^2 \sin \theta d\theta.$$

Notînd densitatea cu ρ , masa benzii va fi

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho r^2 \sin \theta d\theta.$$

Forța exercitată de către dM asupra particulei de masă m în punctul P este orizontală și are valoarea

$$dF = G \frac{mdM}{x^2} \cos \alpha = 2\pi G t \rho m r^2 \frac{\sin \theta d\theta}{x^2} \cos \alpha. \quad (16-4)$$

Variabilele x , α și θ sînt legate între ele. Din figură se vede că

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x} \quad (16-5)$$

Deoarece din legea cosinusului,

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (16-6)$$

avem

$$r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R} \quad (16-7)$$

Diferențiind ecuația (16-6) obținem

$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta$$

sau

$$\sin \theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx \quad (16-8)$$

Substituim ecuația (16-7) în ecuația (16-5) și apoi ecuațiile (16-5) și (16-8) în ecuația (16-4). Eliminîndu-i pe θ și α obținem

$$dF = \frac{\pi G l m r \rho}{R^3} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx.$$

Aceasta este forța exercitată de o bandă circulară dS asupra particulei m .

Trebuie să considerăm acum fiecare element de masă din pătură și să sumăm asupra tuturor benzilor circulare din întreaga pătură. Această operație este o integrare asupra păturii în raport cu variabila x . Dar x variază de la valoarea minimă $R - r$ pînă la valoarea maximă $R + r$.

Deoarece

$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 4r,$$

obținem forța resultantă

$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = G \frac{(4\pi r^2 \rho l) m}{R^2} = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (16-9)$$

unde

$$M = 4\pi r^2 \rho l$$

este masa totală a păturii. Acesta este exact același cu rezultatul pe care l-am obținut pentru forța exercitată între o particulă de masă M și o particulă de masă m separate cu o distanță R între ele. Am demonstrat astfel că o pătură sferică cu densitate uniformă atrage un punct material exterior ca și cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul sferei.

O sferă solidă poate fi privită ca fiind compusă dintr-un mare număr de pături concentrice. Dacă fiecare pătură sferică are o densitate uniformă, chiar

6-5) dacă diferitele pături pot avea densități diferite, același rezultat se aplică sferelor pline. Prin urmare un corp precum Pământul, Luna sau Soarele, în măsura în care ele sînt astfel de sfere, pot fi privite din punct de vedere gravitațional ca puncte materiale (particule punctiforme) pentru corpurile din exteriorul lor.

6-6) Observăm că demonstrația noastră se aplică numai sferelor și numai dacă densitatea este constantă în cuprinsul sferei sau este funcție numai de rază.

16-7) Un rezultat interesant cu o anumită semnificație privește forța exercitată de o pătură sferică asupra unei particule din interiorul ei. Această forță este nulă. Pentru a dovedi aceasta ne referim la figura 16-7, unde m este situat în interiorul păturii. Observăm că R este acum mai mic decît r . Limitele integrării noastre în raport cu x sînt acum de la $r-R$ pînă la $R+r$. Dar

$$\int_{r-R}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^3} + 1 \right) dx = 0,$$

astfel încît $F=0$.

8) în Acest din urmă rezultat deși neevident, este plauzibil deoarece elementele de masă ale păturii de pe fețele opuse de o parte și de alta a lui m exercită acum forțe de sensuri opuse asupra lui m din interior. Anularea totală depinde de faptul că forța variază exact invers proporțional cu pătratul distanței dintre două particule (vezi problema 10). Consecințe importante ale acestui rezultat vor fi discutate în capitolele de electricitate. Acolo vom vedea că forța electrică dintre particulele încărcate depinde de asemenea de inversul pătratului distanței dintre ele. O consecință care prezintă interes în gravitație este aceea că forța gravitațională exercitată de către Pământ asupra unei particule, descrește pe măsură ce particula pătrunde mai adînc în interiorul Pământului, presupunînd o densitate constantă a Pământului, deoarece porțiunile de substanță din păturile exterioare în raport cu poziția particulei nu exercită nici o forță asupra ei, forța devenind zero în centrul Pământului. Prin urmare, g va fi maxim la suprafața Pământului și va descrește atît în exterior cît și în interior față de acest punct dacă Pământul are densitate constantă. Puteți imagina o distribuție simetric sferică a masei Pământului care n-ar da acest rezultat? (Vezi problema 35.)

(16-9) **Exemplul 3.** Să presupunem că ar putea fi săpat un tunel prin Pământ de la un capăt la altul de-a lungul unui diametru, așa cum se arată în figura 16-8.

(a) Să se arate că mișcarea unei particule care cade în tunel este o mișcare armonică simplă. Se neglijează toate forțele de frecare și se presupune că Pământul are o densitate uniformă.

Atracția gravitațională a Pământului exercitată asupra particulei la o dis-

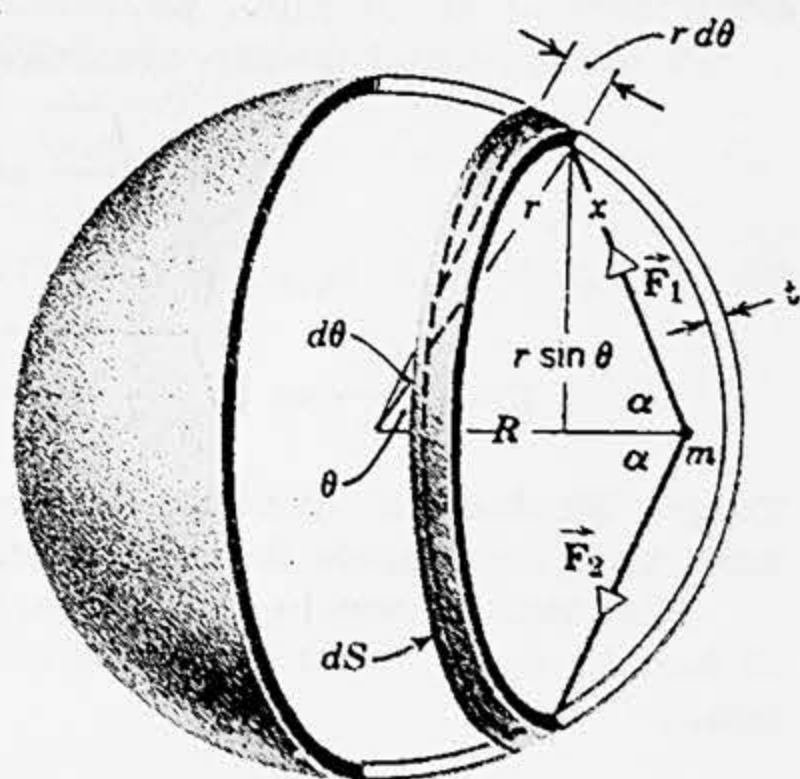


Figura 16-7. Atracția gravitațională a unei secțiuni dS dintr-o pătură sferică de substanță asupra unei particule de masă m . Aici particula este în interiorul păturii.

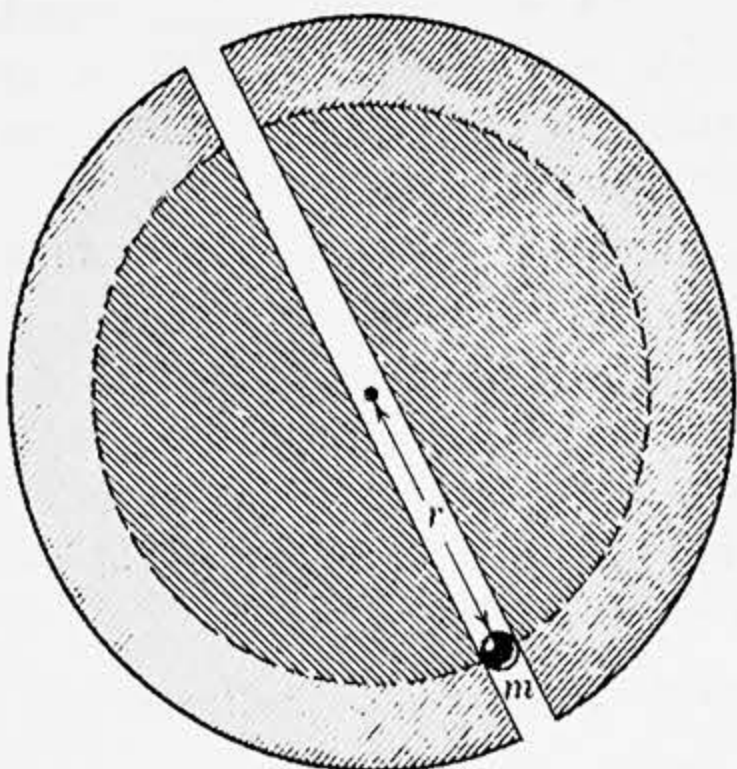


Figura 16-8. Exemplul 3. Particula care se mișcă într-un tunel prin Pământ.

tanță r de centrul Pământului provine în întregime de la acea porțiune a Pământului care se află în paturile interioare față de poziția particulei. Păturile exterioare nu exercită nici o forță asupra particulei. Să presupunem că densitatea Pământului este uniformă și are valoarea ρ . Atunci masa din interiorul unei sfere de rază r este

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Această masă poate fi tratată ca și cum ar fi concentrată în centrul Pământului în ceea ce privește efectele gravitaționale. Prin urmare, forța exercitată asupra particulei de masă m este

$$F = \frac{-GM'm}{r^2}.$$

Semnul minus este folosit pentru a indica faptul că forța este atractivă și îndreptată spre centrul Pământului.

Înlocuind pe M' obținem

$$F = -G \frac{(\rho 4\pi r^3) m}{3r^2} = -\left(G\rho \frac{4\pi m}{3}\right) r = -kr.$$

Aici $G\rho 4\pi m/3$ este o constantă, pe care am notat-o cu k . Forța este deci proporțională cu deplasarea r și opusă ca sens. Acesta este exact criteriul pentru mișcarea armonică simplă.

(b) Dacă un colet poștal ar fi lăsat în acest canal, cât timp ar trece de la expedierea sa la un capăt pînă la sosirea sa la celălalt capăt?

Perioada acestei mișcări armonice simple este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{G\rho 4\pi m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Să luăm $\rho = 5,51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ și $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$. Aceasta dă

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6,67 \cdot 10^{-11}) (5,51 \cdot 10^3)}}, \quad s = 5050 \text{ s} = 84,2 \text{ min.}$$

Timpul de dus este jumătate din perioadă, deci aproximativ 42 min. Observăm că acest timp nu depinde de masa coletului poștal.

Pământul nu are în realitate o densitate uniformă. Să presupunem că ρ ar fi o funcție de r și nu o constantă. Ce efect ar avea aceasta asupra problemei noastre?

16-7. Mișcările planetelor și sateliților

Mișcările corpurilor din sistemul solar pot fi deduse din legile mișcării și din legea atracției universale. După cum a arătat Kepler (vezi pag. 414), toate planetele se mișcă pe orbite eliptice, Soarele fiind

într-unul din focare. Putem afla o mulțime de lucruri despre mișcarea planetare considerând cazul particular al orbitelor circulare. Vom neglija forțele dintre planete, considerând numai interacția dintre Soare și o planetă dată. Aceste considerații se aplică la fel de bine mișcării unui satelit (natural sau artificial) în jurul unei planete.

Să considerăm două corpuri sferice de mase M și m mișcându-se pe orbite circulare sub influența atracției gravitaționale reciproce. Centrul de masă al acestui sistem de două corpuri se află pe linia care le unește, într-un punct C astfel încât $mr = MR$ (fig. 16-9). Dacă nu există forțe externe care să acționeze asupra acestui sistem, centrul de masă nu are accelerație. În acest caz alegem pe C ca origine a sistemului nostru de referință. Corpul mare de masă M se mișcă pe o orbită de rază constantă R , iar corpul mic de masă m se mișcă pe o orbită de rază constantă r , ambele corpuri având aceeași viteză unghiulară ω . Pentru ca aceasta să aibă loc, forța gravitațională care acționează asupra fiecărui corp trebuie să asigure accelerația centripetă necesară. Deoarece aceste forțe gravitaționale reprezintă o pereche acțiune-reacțiune, forțele centripete trebuie să fie egale în modul și opuse ca sens. Adică, $m\omega^2 r$ (modulul forței centripete exercitată de M asupra lui m) trebuie să fie egal cu $M\omega^2 R$ (modulul forței centripete exercitată de m asupra lui M). Faptul că este așa rezultă imediat, deoarece $mr = MR$, astfel încât $m\omega^2 r = M\omega^2 R$. Condiția specifică este atunci ca forța gravitațională exercitată asupra fiecărui corp să fie egală cu forța centripetă necesară pentru a-l menține în mișcare pe orbita sa circulară, adică

$$\frac{GMm}{(r+R)^2} = m\omega^2 r. \quad (16-10)$$

Dacă un corp are o masă mult mai mare decât celălalt, ca în cazul Soarelui și al unei planete, depărtarea sa față de centrul de masă este mult mai mică decât depărtarea celuilalt corp. Să presupunem atunci că R este neglijabil în comparație cu r . Ecuația (16-10) devine atunci

$$GM_s = \omega^2 r^3,$$

unde M_s este masa Soarelui. Dacă exprimăm viteza unghiulară prin perioada de revoluție, $\omega = 2\pi/T$, obținem

$$GM_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}, \quad (16-11)$$

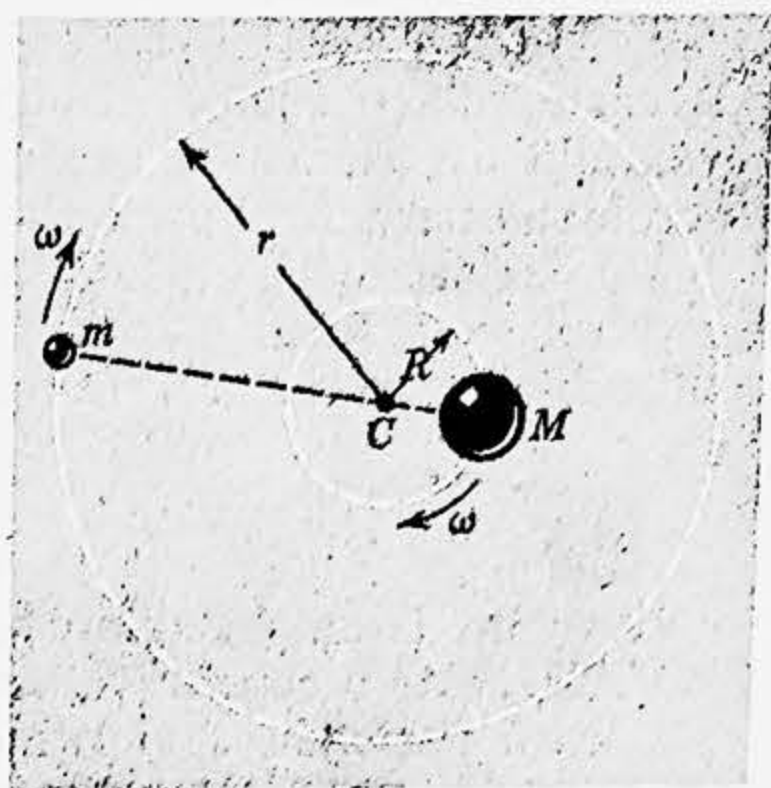


Figura 16-9. Două corpuri care se mișcă pe orbite circulare sub influența atracției gravitaționale reciproce. Ambele corpuri au aceeași viteză unghiulară ω .

Aceasta este o ecuație fundamentală pentru mișcarea planetelor; ea este valabilă de asemenea pentru orbite eliptice dacă definim pe r ca fiind semiaxa mare a elipsei. Să examinăm câteva din consecințele sale.

O consecință imediată a ecuației (16-11) este aceea că ea prezice legea a treia a lui Kepler pentru mișcarea planetelor în cazul particular al orbitelor circulare. În adevăr putem exprima ecuația (16-11) astfel

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3.$$

Observăm că masa planetei nu figurează în această expresie. Aici $4\pi^2/GM_s$ este o constantă, aceeași pentru toate planetele.

Dacă perioada T și raza r de revoluție sînt cunoscute pentru o planetă, ecuația (16-11) poate fi folosită pentru a determina masa Soarelui. De exemplu, perioada Pămîntului este

$$T = 365 \text{ zile} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

și raza orbitei sale este

$$r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

Prin urmare,

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{(4\pi^2) (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) (3,15 \cdot 10^7 \text{ s})^2} \cong 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Masa Soarelui este deci de aproximativ 300 000 ori mai mare decît masa Pămîntului. Se vede că eroarea comisă prin neglijarea lui R față de r este neglijabilă, deoarece

$$R = \frac{m}{M} r = \frac{1}{300\,000} r \cong 480 \text{ km;}$$

$$\frac{R}{r} \cdot 100\% \cong \frac{1}{3\,000} \text{ din } 1\%.$$

Într-un mod analog putem determina masa Pămîntului din perioada și raza orbitei Lunii în jurul Pămîntului. (Vezi problema 22.)

Dacă cunoaștem masa Soarelui M_s și perioada de revoluție T a unei planete în jurul Soarelui, putem determina raza orbitei r a planetei din ecuația (16-11). Deoarece perioada se obține ușor din observațiile astronomice, această metodă de determinare a distanței planetelor pînă la Soare este destul de bună.

Ecuația (16-11) este valabilă de asemenea pentru mișcarea sateliților artificiali în jurul Pămîntului. Nu avem decît să substituim masa Pămîntului M_p în locul lui M_s în acea ecuație.

Legea doua a lui Kepler pentru mișcarea planetelor (vezi pag. 414) trebuie desigur să fie valabilă pentru orbite circulare. Pentru astfel de orbite, atît ω cît și r sînt constante, astfel încît sînt măsurate arii egale în timpuri egale de către linia care unește o planetă cu Soarele. Pentru orbitele eliptice exacte însă, sau pentru orice orbită în general, atît r cît și ω vor varia. Să considerăm acest caz.

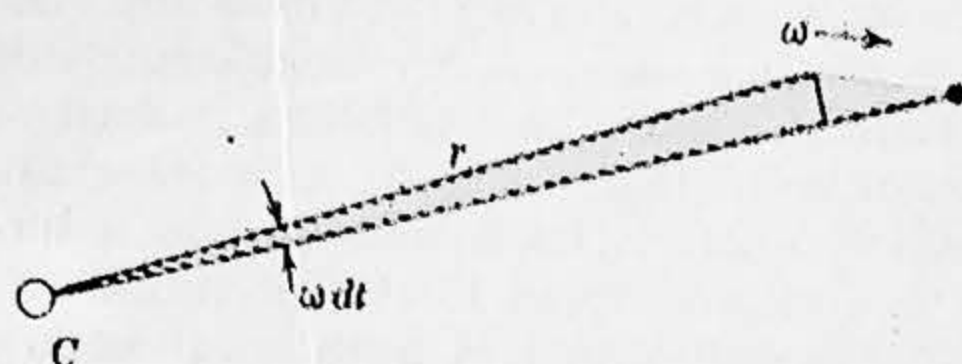


Figura 16-10. O cometă care se mișcă de-a lungul unei traiectorii eliptice cu Soarele C în focarul elipsei. În timpul dt cometa mătură un unghi $d\theta = \omega dt$.

Figura 16-10 arată o particulă care se rotește în jurul lui C pe o traiectorie oarecare. Aria măturată de raza vectorie într-un interval de timp foarte scurt Δt este hașurată în figură. Această arie, neglijând regiunea triunghiulară mică de la margine, este egală cu jumătate din bază înmulțită cu înălțime sau aproximativ $\frac{1}{2} (r\omega\Delta t) \cdot r$. Această expresie devine mai exactă la limită când $\Delta t \rightarrow 0$, triunghiul mic tinzând către zero mai rapid decât triunghiul mare. Viteza cu care aria este măturată instantaneu este deci

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (r\omega\Delta t) r}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega r^2.$$

Dar $m\omega r^2$ este pur și simplu momentul cinetic al particulei față de C. Prin urmare, legea a doua a lui Kepler, care cere ca viteza de măturare a ariei $\frac{1}{2} \omega r^2$ să fie constantă, este în întregime echivalentă cu afirmația că *momentul cinetic al oricărei planete în jurul Soarelui rămâne constant*. Momentul cinetic al particulei în jurul lui C nu poate fi modificat de o forță îndreptată către C. Legea a doua a lui Kepler va fi deci valabilă pentru orice *forță centrală*, adică pentru orice forță îndreptată către Soare. Natura exactă a acestei forțe, — cum depinde ea de distanța dintre corpuri sau de alte proprietăți ale corpurilor — nu este evidențiată în această lege.

Legea întâi a lui Kepler este aceea care cere ca forța gravitațională să depindă exact invers proporțional de pătratul distanței dintre două corpuri adică să depindă de $1/r^2$. Se constată că numai o astfel de forță poate duce la orbite planetare care să fie eliptice cu Soarele într-unul din focare.

Legile mișcării ale lui Newton și legea atracției universale a sa sînt într-o concordanță aproape totală cu observațiile astronomice¹. În calculul nostru am considerat mișcarea unei planete în jurul Soarelui ca o problemă „a două corpuri”. Am văzut însă că mișcarea Soarelui putea fi neglijată cu un mare grad de precizie deoarece raportul dintre masa Soarelui și masa planetei este mare. Aceasta a redus problema la mișcarea unui singur corp în jurul unui centru de forță. Dacă am fi cerut o precizie mai înaltă, ar fi trebuit să includem și mișcarea Soarelui în problema noastră (vezi problema 39). În adevăr, pentru o tratare exactă ar trebui să ținem seama de efectul celorlalte planete și sateliți asupra mișcării Soarelui și planetelor. Această problemă „a mai multor corpuri” este foarte dificilă, dar poate fi rezolvată prin metode de aproximație cu un mare grad de precizie. Rezultatele unor astfel de calcule sînt în excelentă concordanță cu observațiile astronomice.

16-8. Cîmpul gravitațional

Un fapt fundamental al gravitației este acela că două corpuri exercită forțe unul asupra celuilalt. Putem privi aceasta ca o interacție directă între cele două corpuri punctiforme, dacă dorim. Acest punct de vedere se numește *acțiune la distanță*, particulele interacționînd chiar dacă nu sînt în contact. Un alt punct de vedere este conceptul de *cîmp* care privește un punct material ca modificînd spațiul din jurul său într-un anumit mod și generînd un *cîmp gravitațional*. Acest cîmp acționează apoi asupra oricărui alt punct material din cîmp, exercitînd asupra lui forța de atracție gravitațională. Cîmpul joacă astfel un rol intermediar în concepția noastră despre forțele dintre puncte materiale. Conform acestei concepții, avem două părți separate ale problemei noastre. Întîi, trebuie să determinăm cîmpul produs de o distribuție dată a maselor particulelor și în al doilea rînd trebuie să calculăm forța pe care acest cîmp o exercită asupra unei alte particule aflată în el.

De exemplu, să considerăm Pămîntul ca un corp izolat. Dacă acum este adus un corp în vecinătatea Pămîntului, asupra lui se va exercita o forță. Această forță are o direcție și o intensitate bine definite în fiecare punct din spațiu. Direcția este radială către centrul Pămîntului iar intensitatea este mg . Putem de aceea asocia fiecărui punct din vecinătatea Pămîntului un vector \vec{g} care este accelerația pe care un corp ar suferi-o dacă ar fi lăsat liber în acel punct. Numim \vec{g} *intensitatea cîmpului gravitațional* în punctul considerat. Deoarece

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{M}, \quad (16-12)$$

putem defini intensitatea cîmpului gravitațional în fiecare punct ca fiind forța gravitațională pe unitatea de masă în acel punct. Calculăm

¹ Axa mare a orbitei eliptice a planetei Mercur se rotește ceva mai mult decît prezice mecanica newtoniană dacă este inclusă influența perturbatoare a altor planete. Acest efect este explicat în teoria generală a relativității.

forța din câmp cu ajutorul câmpului, înmulțind pe \vec{g} cu masa m a particulei plasate în acest punct.

Câmpul gravitațional este un exemplu de *câmp vectorial*, fiecare punct din acest câmp avînd un vector localizat acolo. Există de asemenea câmpuri scalare, cum este câmpul de temperatură într-un solid conductor de căldură. Câmpul gravitațional generat de o distribuție fixă a masei este de asemenea un exemplu de *câmp staționar*, deoarece valoarea câmpului într-un punct dat nu variază în timp.

Conceptul de câmp este deosebit de util pentru înțelegerea forțelor electromagnetice dintre sarcinile electrice în mișcare. El are avantaje distincte atât din punct de vedere conceptual cît și din punct de vedere practic, față de conceptul acțiunii la distanță. Conceptul de câmp nu a fost folosit în timpul lui Newton. El a fost dezvoltat mult mai tîrziu de către Faraday pentru electromagnetism și numai apoi aplicat gravitației. Mai tîrziu, acest punct de vedere a fost adoptat pentru gravitație în teoria generală a relativității. Scopul principal al introducerii acestui concept aici este de a-l obișnui pe student încă de pe acum cu un concept care se dovedește a fi important în dezvoltarea teoriei fizice.

Exemplul 4. În capitolul 15 am dedus formula pentru perioada unui pendul simplu, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Ținînd minte că câmpul gravitațional terestru nu este uniform pe distanțe mari, așa cum am presupus pentru distanțe mici, care este perioada maximă pe care ar avea-o un pendul simplu în vecinătatea suprafeței terestre?

Formula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, deși inaplicabilă atunci cînd g variază de-a lungul traiectoriei pendulului, ne sugerează să mărim lungimea pendulului. Să facem lungimea infinită. Bila pendulului s-ar mișca atunci de-a lungul unui arc de cerc de rază infinită, adică de-a lungul unei linii drepte, așa cum este arătat în figura 16-11. Direcția câmpului gravitațional terestru este peste tot radială către centrul Pămîntului, astfel încît direcția sa se schimbă de-a lungul arcului. Să presupunem că bila de masă m are o amplitudine mică în comparație cu raza Pămîntului. Atunci bila se află totdeauna la o distanță R_p , raza Pămîntului, de centrul Pămîntului, cu o bună aproximație. Atunci forța F exercitată asupra lui m este

$$F = \frac{GM_p m}{R_p^2} - mg, \quad (16-12)$$

unde M_p este masa Pămîntului. Această forță este îndreptată către centrul Pămîntului precum se arată. Componenta acestui vector forță de-a lungul direcției x , direc-

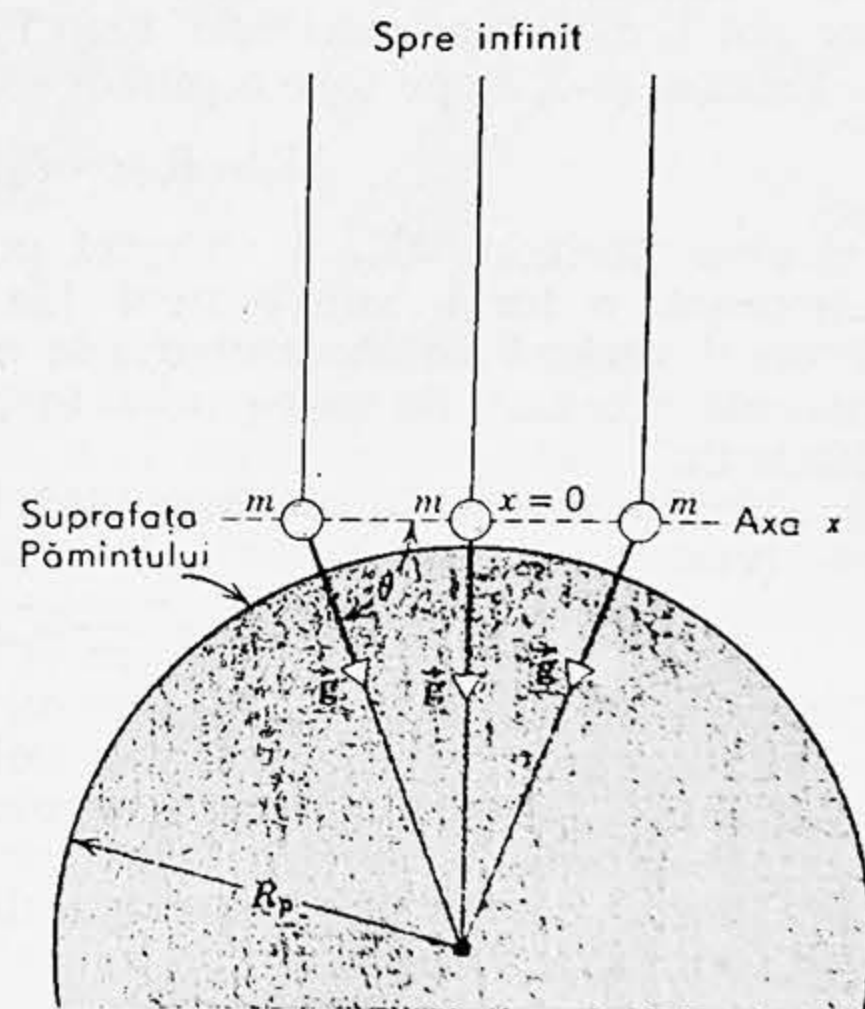


Figura 16-11. Exemplul 4. Un pendul simplu suspendat la infinit.

ția de mișcare a bilei, este

$$F_x = F \cos 0 = -F \frac{x}{R_p} = -\frac{GM_p m}{R_p^3} x,$$

unde semnul minus arată că forța este îndreptată în sens opus deplasării de la $x=0$. Putem scrie aceasta astfel

$$F_x = -kx,$$

unde $k = GM_p m / R_p^3$ este o constantă.

Formula perioadei unui oscilator armonic simplu este $T = 2\pi \sqrt{m/k}$. Prin urmare,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{GM_p m / R_p^3}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_p^3}{GM_p}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_p}{g}},$$

deoarece g la suprafața Pământului este egal cu GM_p / R_p^2 . Substituind $R_p = 6,37 \cdot 10^6$ m și $g = 9,80$ m/s², obținem $T = 84,3$ minute ca fiind perioada maximă a unui pendul simplu în vecinătatea suprafeței terestre. (Vezi problema 14.)

16-9. Energia potențială gravitațională

În capitolul 8 am discutat energia potențială gravitațională a unei particule (de masă m) și a Pământului (de masă M). Am considerat numai cazul particular în care particula rămâne apropiată de Pământ astfel încât puteam presupune că forța gravitațională exercitată asupra particulei este constantă pentru toate pozițiile particulei. În acest paragraf înlăturăm această restricție și considerăm distanțe Pământ-particulă care pot fi mult mai mari decât raza Pământului.

Ecuția (8-5, b) pe care o putem scrie astfel

$$\Delta E_p = E_{p, b} - E_{p, a} = -W_{ab}, \quad (8-5, b)$$

definește variația ΔE_p a energiei potențiale a oricărui sistem în care acționează o forță conservativă (de exemplu, gravitația), atunci când sistemul variază de la configurația a la configurația b . W_{ab} este lucrul mecanic efectuat de către acea forță conservativă în timpul variației sistemului.

Energia potențială a sistemului în oricare configurație arbitrară b este (vezi ecuația 8-5, b)

$$E_{p, b} = -W_{ab} + E_{p, a}. \quad (16-13)$$

Pentru a da o valoare lui $E_{p, b}$ trebuie să alegem (arbitrar) configurația a ca fiind prin convenție o configurație de referință și trebuie să-i atribuim lui $E_{p, a}$ prin convenție o valoare (arbitrară), de obicei zero.

În capitolul 8 am ales drept configurație de referință pentru sistemul Pământ-particulă acea configurație în care particula se află în repaus pe suprafața Pământului și am atribuit acestei configurații energia potențială $E_{p, a} = 0$. Atunci când particula se află la o înălțime y deasupra suprafeței terestre, energia potențială $E_p (= E_{p, b})$ este dată de ecuația (16-13):

$$E_p = -W_{ab} + 0 = -(-mgy) = mgy.$$

Forța conservativă în discuție, gravitația, este îndreptată în jos și are valoarea $-mg$; deplasarea particulei $(+y)$ este îndreptată în sus față de nivelul de referință; de aici provine diferența de semn a acestor mărimi.

Pentru cazul mai general, în care restricția $y \ll R$ (în care R este raza Pământului) nu este impusă, este convenabil să alegem o altă configurație de referință, anume aceea în care particula și Pământul sînt separate printr-o distanță infinită. Prescriem valoarea zero energiei potențiale a sistemului în această configurație. În modul acesta configurația cu energia potențială zero este totodată configurația cu forța nulă. Am făcut o alegere analogă atunci cînd am definit configurația cu energie nulă a unui resort, ca fiind starea sa normală neîntinsă, pentru care forța de restabilire este zero.

Cînd particula de masă m se află la o distanță r de centrul Pământului, energia potențială a sistemului este dată de ecuația (16-3):

$$E_p(r) = -W_{\infty r} + 0 \quad (16-14)$$

în care $W_{\infty r}$ este lucrul mecanic efectuat de forța conservativă (gravitația) asupra particulei cînd particula se mișcă de la infinit pînă la o distanță r de centrul Pământului. Pentru simplitate presupunem acum că particula se mișcă către Pământ de-a lungul unei linii radiale. Forța gravitațională $F(r)$ care acționează asupra particulei (presupunînd $r \gg R$) va fi atunci $-GMm/r^2$, semnul minus indicînd o forță atractivă, adică o forță care trage particula către Pământ. Putem atunci afla pe $E_p(r)$ din ecuația (16-14):

$$\begin{aligned} E_p(r) &= -W_{\infty r} = -\int_{\infty}^r F(r) dr = \\ &= -\int_{\infty}^r \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r}. \end{aligned} \quad (16-15)$$

Semnul minus arată că energia potențială este negativă la orice distanță finită; adică energia potențială este zero la infinit și descrește atunci cînd distanța de separație descrește. Aceasta corespunde faptului că forța gravitațională exercitată asupra particulei de către Pământ este atractivă. Cînd particula se mișcă de la infinit, lucrul mecanic $W_{\infty r}$ efectuat de această forță asupra particulei este pozitiv, ceea ce înseamnă, conform ecuației (16-14), că $E_p(r)$ este negativ.

Ecuația (16-15) este valabilă indiferent de traiectoria urmată de particulă în mișcarea ei de la infinit pînă într-un punct aflat la distanța r . Putem arăta aceasta împărțind orice traiectorie arbitrară în porțiuni infinitezimale, în trepte, care sînt desenate alternativ de-a lungul razei perpendicular pe ea (fig. 16-12). Nu se efectuează nici un lucru mecanic de-a lungul segmentelor perpendiculare, cum ar fi AB , deoarece de-a lungul acestora forța este perpendiculară pe deplasare. Dar lucrul mecanic efectuat de-a lungul porțiunilor radiale ale traiectoriei, cum ar fi BC , se însumează dînd lucrul mecanic efectuat pe traiectoria directă de-a lungul unei raze, cum ar fi AE . Lucrul mecanic efectuat

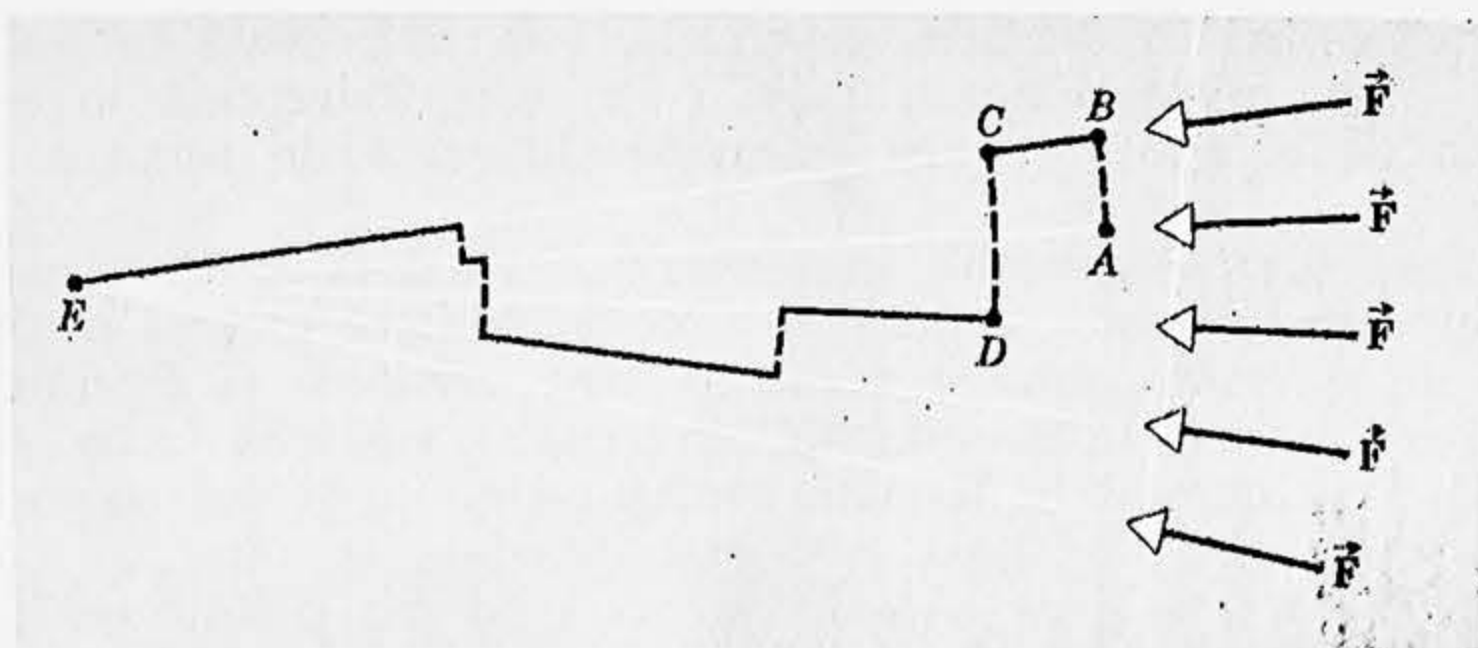


Figura 16-12. Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui corp de la A la E nu depinde de drum.

pentru a deplasa particula între două puncte într-un câmp gravitațional este deci independent de traiectoria concretă care leagă aceste puncte. Prin urmare forța gravitațională este o forță *conservativă*.

Ecuația (16-15) arată că energia potențială a particulelor M și m este o caracteristică a sistemului $M+m$. Energia potențială este o proprietate a *sistemului* de corpuri și nu a fiecărui corp izolat. Energia potențială variază atunci când M sau m este deplasat. Fiecare se află în câmpul gravitațional al celuilalt. De asemenea, nu are nici un sens să atribuim o parte din energia potențială lui M și o parte lui m . Adesea însă noi vorbim de energia potențială a unui corp m (de exemplu planetă sau piatră) în câmpul gravitațional al unui corp mult mai masiv M (Soare sau respectiv Pământ). Justificarea acestei exprimări, din care ar rezulta că energia potențială ar aparține planetei sau numai pietrei, este următoarea: când energia potențială a unui sistem de două corpuri se schimbă în energie cinetică, corpul mai ușor capătă cea mai mare parte a energiei cinetice. Soarele este atât de masiv față de o planetă încât abia dacă capătă vreo energie cinetică, și același lucru este valabil pentru Pământ în cadrul sistemului Pământ-Soare.

Putem deduce forța gravitațională din energia potențială. Relația pentru funcțiile energiei potențiale cu simetrie sferică este $F = -dE_p/dr$; vezi ecuația (8-7). Această relație se deduce din ecuația (16-15). Din ea obținem

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (16-16)$$

Semnul minus de aici arată că forța este atractivă, îndreptată spre interior de-a lungul unei raze, opusă ca sens vectorului de poziție radial.

Putem, dacă dorim, să asociem un câmp scalar cu gravitația. Definim mai întâi, foarte general, *potențialul gravitațional* V ca fiind *energia potențială gravitațională pe unitatea de masă* a unui corp aflat într-un câmp gravitațional. Atunci pentru un corp de masă M , cu simetrie sferică

$$V = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{GM}{r}. \quad (16-17)$$

Avem atunci asociat cu fiecare punct din spațiul din jurul corpului de masă M un număr — potențialul gravitațional. Acesta ne dă un câmp scalar, potențialul fiind o mărime scalară. Pentru a determina forța exercitată de acest câmp asupra unei particule de masă m plasată în el, calculăm $-dV/dr$ în punctul considerat și înmulțim cu m . Forța are valoarea $-mdV/dr$ și o direcție radială către centrul de forță M .

Exemplul 5. Viteza cosmică (de evadare). Am găsit deja energia potențială gravitațională a unei particule de masă m la suprafața Pământului sub forma (ecuația 16-15): $E_p(R) = -GM_p m/R_p$. Lucrul mecanic necesar pentru a deplasa un corp de la suprafața Pământului pînă la infinit este $GM_p m/R_p$, sau aproximativ $6,0 \cdot 10^7 \text{ J/Kg}$.

Dacă am putea transmite unui proiectil mai mult decît această energie la suprafața Pământului, atunci neglijînd rezistența atmosferei terestre, el ar părăsi Pământul fără a se întoarce vreodată. Pe măsură ce el se depărtează energia sa cinetică descrește și energia sa potențială crește, dar viteza sa nu se reduce niciodată la zero. Viteza inițială critică, numită viteză de evadare v_0 , astfel încît proiectilul nu se întoarce, este dată de

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{GM_p m}{R_p}$$

sau

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{GM_p}{R_p}} = 11,2 \text{ km/s.}$$

Dacă unui proiectil i se imprimă această viteză inițială, el va scăpa de atracția terestră. Pentru viteze inițiale mai mici decît această viteză, proiectilul se va întoarce. Energia sa cinetică devine zero la o anumită distanță finită de Pămînt și proiectilul cade înapoi pe Pămînt¹.

Moleculele ușoare din atmosfera superioară terestră pot atinge viteze suficient de înalte, datorită agitației termice pentru a evada în spațiul extraterestru. Hidrogenul gazos, care a fost prezent în atmosfera terestră cu mult timp în urmă, a dispărut astăzi din ea. Heliul gazos evadează cu o viteză mai mică, dar o mare parte este reîmprospătată prin dezintegrarea radioactivă din scoarța terestră. Viteza de evadare din câmpul Soarelui este mult prea mare pentru a permite hidrogenului să evadeze din atmosfera sa. Pe de altă parte, viteza de evadare de pe Lună este atît de mică încît ea nu poate reține nici o atmosferă. (Vezi problema 23.)

16-10. Energia potențială a sistemelor alcătuite din mai multe particule

Dacă două particule se află la o distanță r între ele, energia lor potențială este dată de ecuația (16-14):

$$E_p(r) = -W_{\infty r} \quad (16-14)$$

¹ Am ignorat forțele exercitate asupra proiectilului de alte corpuri decît Pămîntul. La distanțe suficient de mari de Pămînt trebuie să ținem seama de forțele gravitaționale exercitate de Lună, planete, Soare etc., astfel încît nu mai putem folosi rezultatul simplu al problemei „celor două corpuri“. Un proiectil poate părăsi Pămîntul, „capturat“ fiind de către un alt corp astronomic, de exemplu în cazurile „mai multor corpuri“ amintite.

În care $W_{\infty r}$ este lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională atunci când particulele se mișcă de la o distanță infinită până la o distanță r . Dăm acum o altă interpretare lui $E_p(r)$.

Să echilibrăm forța gravitațională printr-o forță externă aplicată de un agent extern și s-o aranjăm astfel încît în fiecare moment această forță externă să fie egală în modul și opusă ca sens cu forța gravitațională exercitată asupra fiecărei particule. Lucrul mecanic efectuat de forța externă în timpul mișcării particulelor de la o distanță infinită pînă la distanța r , nu este $W_{\infty r}$ ci $-W_{\infty r}$; aceasta rezultă din faptul că deplasările sînt aceleași însă forțele sînt egale în modul și de sens opus. Astfel putem interpreta ecuația (16-14) în modul următor: *Energia potențială a unui sistem de particule este egală cu lucrul mecanic care trebuie efectuat de către un agent extern pentru a constitui sistemul, plecînd de la configurația de referință standard.*

În modul acesta, dacă ridicăm o piatră de masă m la o distanță y deasupra suprafeței terestre, noi sîntem agentul extern (care separă piatra de Pămînt) și lucrul mecanic efectuat de noi pentru „constituirea sistemului” este $+mgy$, cca ce este de asemenea energia potențială. În mod analog, lucrul mecanic efectuat de un agent extern atunci cînd un corp de masă m se mișcă de la infinit pînă la o distanță r de Pămînt, este negativ deoarece agentul trebuie să exercite o forță de frînare asupra corpului; aceasta este în concordanță cu ecuația (16-14).

Aceste considerații sînt valabile pentru sisteme care conțin mai mult de două particule. Să considerăm trei corpuri de mase m_1 , m_2 și m_3 . Să presupunem că inițial ele sînt la distanțe infinite unul de altul. Problema este de a calcula lucrul mecanic efectuat de un agent extern pentru a le aduce în pozițiile arătate în figura 16-13. Să deplasăm întîi pe m_2 către m_1 de la infinit pînă la distanța \vec{r}_{12} . Lucrul mecanic efectuat împotriva forței gravitaționale exercitate de m_1 asupra lui m_2 este $-Gm_1m_2/r_{12}$. Să aducem acum pe m_3 de la infinit pînă la distanța \vec{r}_{13} de m_1 și \vec{r}_{23} de m_2 . Lucrul mecanic efectuat împotriva forței gravitaționale exercitate de m_1 asupra lui m_3 este $-Gm_1m_3/r_{13}$ și lucrul mecanic efectuat împotriva forței gravitaționale exercitate de m_2 asupra lui m_3 este $-Gm_2m_3/r_{23}$. Lucrul mecanic total efectuat pentru constituirea acestui sistem este egal cu energia potențială totală a sistemului

$$-\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Observăm că nu este necesară nici o operație vectorială în acest procedeu.

Indiferent de modul cum formăm sistemul, adică indiferent care corp este mișcat sau care traiectorie este urmată, vom găsi întotdeauna că este necesar același lucru mecanic pentru a aduce corpurile în configurația din figura 16-13 plecînd de la distanța inițială infinită dintre ele. Energia potențială trebuie deci asociată cu sistemul și nu cu unul sau cu



Figura 16-13. Trei corpuri de mase m_1 , m_2 și m_3 aduse de la infinit.

doi corpuri. Dacă am vrea să separăm din nou sistemul în trei corpuri izolate, ar trebui să furnizăm o cantitate de energie

$$+ \left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right).$$

Această energie poate fi privită ca un fel de energie de legătură care menține corpurile în configurația arătată.

Așa cum putem asocia o energie potențială elastică cu o stare comprimată sau întinsă a unui resort care are o particulă, tot astfel putem asocia o energie potențială gravitațională cu configurația unui sistem de particule menținute laolaltă de forțele gravitaționale. În mod analog, dacă vrem să concepem energia potențială elastică a unei particule ca fiind înmagazinată în resort, tot astfel putem concepe energia potențială ca fiind înmagazinată în câmpul gravitațional al sistemului de particule. O variație a configurației în fiecare caz duce la o variație a energiei potențiale.

Aceste concepte apar din nou atunci când întâlnim forțe de origine electrică sau magnetică sau de origine nucleară. Aplicarea lor este destul de largă în fizică. Avantajul metodei energetice față de metoda dinamică decurge din faptul că metoda energetică folosește mărimi scalare și operații scalare în loc de mărimi vectoriale și operații vectoriale. Atunci când forțele reale nu sînt cunoscute, așa cum este adesea cazul în fizica nucleară, metoda energetică este esențială.

Exemplul 6. Care este energia de legătură a sistemului Pământ-Soare? Se neglijează prezența altor planete sau sateliți.

Pentru simplitate presupunem că orbita Pământului în jurul Soarelui este circulară cu raza r_{ps} . Lucrul mecanic efectuat împotriva forței gravitaționale pentru a aduce Pământul și Soarele de la o distanță de separație infinită pînă la o distanță r_{ps} între ele este:

$$-G \frac{M_s M_p}{r_{ps}} \cong -5,0 \cdot 10^{33} \text{ J},$$

unde am luat $M_s \cong 330\,000 M_p$, $M_p = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r_{ps} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$. Semnul minus arată că forța este atractivă, astfel încît lucrul mecanic este efectuat de forța gravitațională. O cantitate echivalentă de lucru mecanic ar trebui efectuată de agentul exterior pentru a separa complet aceste corpuri pornind din repaus. Deoarece energia cinetică a Pământului pe orbita sa este jumătate din modulul energiei potențiale a sistemului Pământ-Soare, numai jumătate din acest lucru mecanic este necesar pentru a rupe sistemul, astfel încît energia de legătură efectivă, presupunînd că sistemul Pământ-Soare este în repaus după rupere, este de aproximativ $2,5 \cdot 10^{33} \text{ J}$.

Ce efect are prezența Lunii și a altor planete asupra energiei de legătură a Pământului în sistemul solar?

16-11. Considerații energetice în mișcările planetelor și sateliților

Să considerăm din nou mișcarea unui corp de masă m (de exemplu o planetă sau un satelit) în jurul unui corp masiv de masă M (de exemplu Soarele sau Pământul). Vom considera pe M în repaus într-un sistem de

referință inertial, corpul m rotindu-se în jurul său pe o orbită circulară. Energia potențială a sistemului este

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r},$$

unde r este raza orbitei circulare. Energia cinetică a sistemului este

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2,$$

Soarele fiind în repaus. Din ecuația care precede pe (16-11), obținem

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r}$$

astfel încît

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}.$$

Energia totală este

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \quad (16-18)$$

Această energie este constantă și negativă. Dar energia cinetică nu poate fi niciodată negativă și din ecuația (16-18) vedem că ea trebuie să tindă către zero cînd distanța tinde la infinit. Energia potențială este totdeauna negativă, afară de valoarea sa nulă la infinit. Semnificația energiei totale negative este atunci faptul că sistemul este închis, planeta de masă m fiind totdeauna legată de centrul solar atractiv M și niciodată nu scapă de el (fig. 16-14).

Chiar dacă considerăm orbitele eliptice, în care r și ω variază, energia totală este negativă. Ea este de asemenea constantă, corespunzător faptului că forțele gravitaționale sînt conservative. Prin urmare, atît energia totală cît și momentul cinetic total sînt constante în mișcarea planetelor. Aceste mărimi se numesc adesea *constante ale mișcării*. Obținem orbita reală a unei planete față de Soare plecînd de la aceste relații de conservare și eliminînd

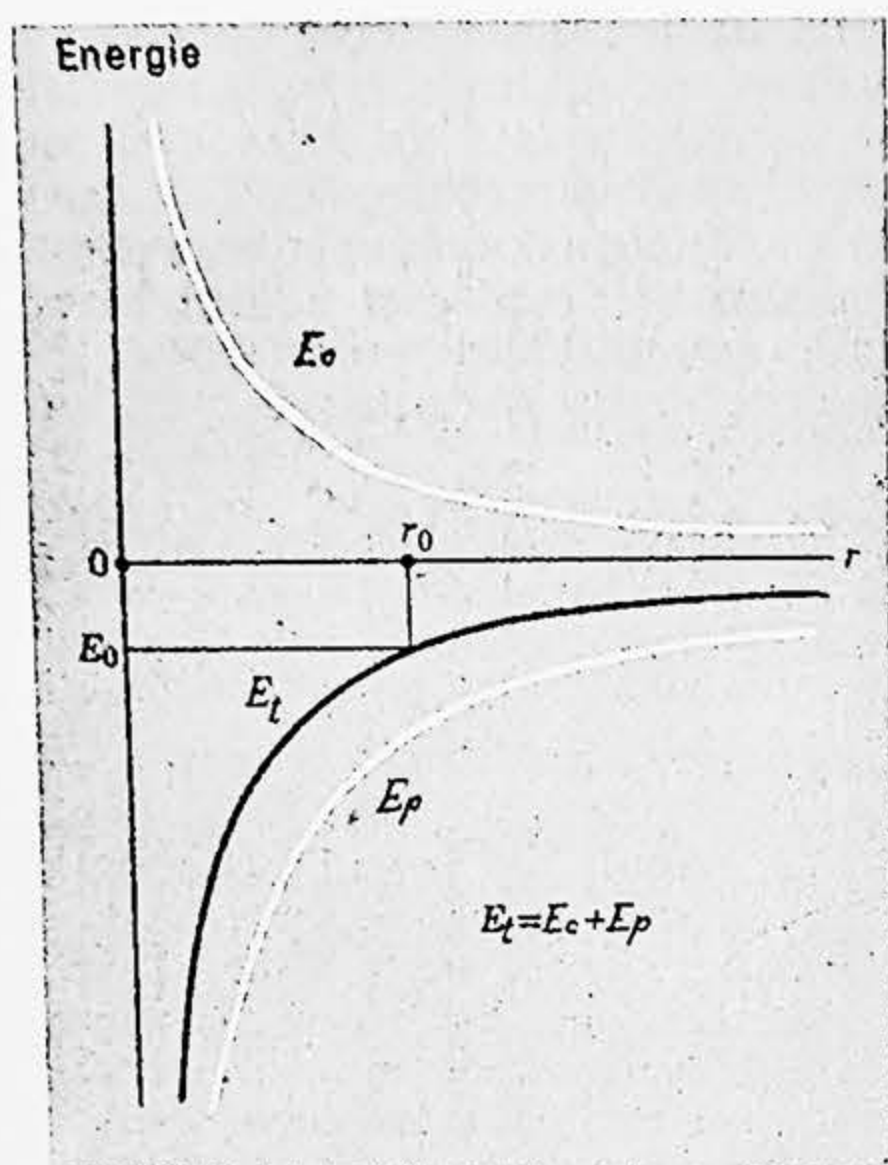


Figura 16-14. Energia cinetică E_c , energia potențială E_p și energia totală $E_t = E_p + E_c$ a unui corp în mișcare planetară circulară. O planetă cu energia totală $E_0 < 0$ va rămîne pe o orbită de rază r_0 . Cu cît planeta este mai departe de Soare, cu atît energia sa totală (constantă) este mai mare (adică este mai puțin negativă). Pentru a scăpa de centrul forțelor și a avea încă energie cinetică la infinit, este necesară o energie totală pozitivă.

variabila timp, folosind legile dinamicii și gravitației. Rezultatul este că orbitele planetare sînt eliptice.

În teoriile mai vechi ale atomului, cum a fost teoria lui Bohr a atomului de hidrogen, aceste ecuații mecanice erau folosite pentru descrierea mișcării unui electron în jurul unui centru nuclear atractiv. Aceleași relații erau folosite pentru orbite deschise (energia totală pozitivă) ca în experiențele lui Rutherford asupra împrăstierii particulelor nucleare încărcate. Forțele centrale și în particular forțele invers proporționale cu pătratul distanței se întîlnesc frecvent în sistemele fizice.

16-12. Pămîntul ca sistem de referință inerțial

În descrierea experiențelor care au fost fundamentale pentru definiția dată de noi forței și masei, a trebuit să presupunem un anumit sistem de referință față de care puteau fi măsurate accelerațiile. Dacă reperul însuși ar fi accelerat neuniform, n-am observa nici o regularitate în accelerațiile măsurate de noi. De fapt, experiențele noastre de laborator sînt efectuate într-un sistem de referință care este fix față de Pămînt. Am discutat deja efectul pe care-l are rotația Pămîntului în jurul propriei sale axe asupra măsurărilor noastre. Ce efect are mișcarea Pămîntului ca un întreg în jurul Soarelui sau unui alt corp cosmic?

Accelerația Pămîntului față de Soare este $\omega^2 r$ sau aproximativ $6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. S-ar părea la prima vedere că această accelerație, chiar mică fiind, ar putea să fie perturbatoare în experiențele în care intervin forțe mici. Că aceasta nu este totuși cazul rezultă din universalitatea legii atracției gravitaționale. Nu numai Pămîntul, ci și corpurile pe care le folosim în aparatele noastre de laborator sînt accelerate către Soare practic cu aceeași intensitate.

Să calculăm eroarea comisă prin neglijarea accelerației orbitale a Pămîntului. Accelerația Pămîntului spre Soare este k/r^2 unde r este distanța de la centrul Soarelui pînă la centrul Pămîntului, iar k este GM_s . Să considerăm acum un corp de aceea parte a Pămîntului care este mai depărtată de Soare. Ne putem imagina că îl cîntărim cu ajutorul unui dinamometru, de exemplu. Atunci cea parte a accelerației sale către Soare care se datorește atracției gravitaționale a Soarelui însuși, este

$$\frac{k}{(r+r_0)^2} = \frac{k}{r^2} \left(1 - \frac{2r_0}{r} + \dots + \text{termeni mult mai mici} \right),$$

unde r_0 este raza Pămîntului. Diferența dintre accelerația Pămîntului datorită atracției Soarelui (adică k/r^2) și accelerația aparatului datorită atracției Soarelui (expresia de mai sus), este mai mică decît $(k/r^2)(2r_0/r)$. Dar $2r_0/r$ este aproximativ 10^{-4} . Diferența va fi atunci mai mică decît 10^{-4} din accelerația Pămîntului, deci mai mică decît 10^{-6} m/s^2 . Accelerația relativă a corpului și Pămîntului datorită atracției Soarelui este de aproximativ o zecime de milionime din accelerația gravitațională a corpului datorită Pămîntului. Luna are un efect analog asupra corpului. Prin urmare numai dacă am putea măsura cu o precizie de $1:10^6$ ar fi nevole să ținem seama în mod serios de accelerația reperului atașat de Pămînt. Pentru aproape toate scopurile practice Pămîntul este destul de bun ca sistem de referință inerțial.

16-13. Principiul echivalenței

Să considerăm două sisteme de referință: (1) un sistem de referință (inerțial) neaccelerat S în care există un câmp gravitațional uniform și (2) un sistem de referință S' care este uniform accelerat față de un reper inerțial dar în care nu există nici un câmp gravitațional. În teoria relativității, Albert Einstein a arătat că aceste două repere sînt exact echivalente din punct de vedere fizic. Adică experiențele efectuate în aceleași condiții în aceste două repere vor da aceleași rezultate. Acesta este *principiul echivalenței*.

Să presupunem că o navă cosmică este în repaus într-un sistem de referință inerțial S în care există un câmp gravitațional uniform, de exemplu pe suprafața Pământului. În interiorul navei cosmice obiectele, cum ar fi un măr, lăsate libere vor cădea cu o accelerație, de exemplu \vec{g} , în câmpul gravitațional; obiectele care sînt în repaus — cum ar fi un astronaut care stă pe podea sau un pachet atârnat de un dinamometru legat de tavan — vor suferi o forță exercitată de podea sau respectiv resort, opusă greutății lor.

Să presupunem acum că racheta este pornită și nava cosmică ajunge într-o regiune din spațiul extraterestru unde nu există nici un câmp gravitațional. Fie accelerația navei cosmice, adică a noului nostru reper S' , $\vec{a} = -\vec{g}$ față de reperul inerțial S ; adică nava este accelerată de la Pământ spre exterior, dincolo de regiunea în care câmpul terestru (sau oricare alt câmp gravitațional) este apreciabil. Condițiile din nava cosmică vor fi atunci analoge cu cele dintr-o navă cosmică în repaus pe suprafața Pământului. În interiorul navei, dacă astronautul lasă liber un măr, el va fi accelerat în jos față de navă cu o accelerație \vec{g} . În adevăr, deoarece toate corpurile care sînt libere de orice forțe se mișcă cu viteză uniformă relativ la reperul inerțial S , toate aceste corpuri apar în cădere cu *aceeași* accelerație \vec{g} față de nava cosmică S' . Mai mult, obiectele care sînt în repaus relativ față de navă — cum ar fi un astronaut care stă pe podea sau un pachet atârnat de un dinamometru prins de tavan, vor suferi forțe indiscernabile de forțele care echilibrau greutatea lor în cazul cînd nava era în repaus în câmpul gravitațional din S .

În adevăr, dacă astronautul n-ar ști că motoarele rachetei accelerează nava sa din S , el ar avea motive să conchidă că se află într-un câmp gravitațional — un câmp ale cărui forțe au accelerat mărul în cădere în S' și ale cărui forțe cereau ca o forță de echilibrare să fie aplicată pachetului (tensiunea din resort) și astronautului (forța normală a podelei) pentru a-i ține în repaus în S' . Astronautul pur și simplu n-ar putea găsi nici o diferență, bazat fiind pe observațiile în cadrul propriului său reper, între o situație în care nava sa este accelerată față de un reper inerțial într-o regiune lipsită de orice câmp gravitațional și o situație în care nava nu este accelerată într-un reper inerțial dar în care există un câmp gravitațional uniform. Cele două situații sînt exact echivalente.

Einstein a subliniat faptul că, din principiul echivalenței rezultă că nu se poate vorbi de accelerația absolută a unui sistem de referință, ci numai de accelerația relativă, așa cum rezultă din teoria restrînsă a relativității faptul că nu se poate vorbi de viteza absolută a unui reper ci numai de una relativă. Din principiul echivalenței rezultă de asemenea că masa inertă și masa gravitațională sînt egale. În adevăr, toate corpurile care sînt libere de orice forțe se vor mișca cu viteză uniformă relativ la un reper inerțial indiferent care ar fi masele lor iner-

țiale și ele vor avea de aceea aceeași accelerație relativ la un reper accelerat. Prin urmare, din principiul echivalenței lui S și S' rezultă că toate corpurile vor cădea cu aceeași accelerație într-un câmp gravitațional uniform.

Din discuția de până acum vedem că un câmp gravitațional uniform poate fi imitat printr-un „câmp de accelerație”. În adevăr, un câmp gravitațional uniform poate fi „eliminat” prin trecerea la un reper accelerat în direcția câmpului cu o accelerație egală în modul cu aceea datorită câmpului. În acest reper nou o particulă a cărei mișcare era inițial supusă unui câmp gravitațional este acum o particulă liberă. De exemplu, într-un satelit artificial al Pământului, un măr lăsat liber de astronaut nu va cădea față de satelit și astronautul el însuși va fi eliberat de forțele care au contracarat atracția gravitațională înainte de lansare astfel încât el se simte fără greutate. În general însă, câmpurile gravitaționale, cum este cel terestru, nu sînt uniforme în întregul spațiu, astfel încît nu se pot înlocui câmpurile gravitaționale peste tot în spațiu trecînd pur și simplu la un singur reper accelerat față de sursa câmpului. Ar fi necesar un reper accelerat în mod diferit în fiecare punct din spațiu pentru a imita întregul câmp gravitațional.

Întrebări

1. Dacă forța de gravitație acționează asupra tuturor corpurilor proporțional cu masele lor, de ce un corp mai greu nu cade mai iute decît un corp ușor?

2. Observațiile astronomice moderne și procedeele de navigație folosesc punctul de vedere geocentric (sau ptolemeic) (folosind „sfera” cerească în rotație). Este aceasta o greșală? Dacă nu, atunci ce criteriu determină sistemul pe care îl folosim (copernican sau ptolemeic)? Cînd vom folosi sistemul heliocentric (sau copernican)?

3. Cum variază greutatea unui corp într-o călătorie de la Pămînt la Lună? Va varia masa sa?

4. Vom avea mai mult zahăr la o greutate de un newton la Poli sau la Ecuator?

5. Modifică concentrația masei terestre în jurul centrului său variația lui g cu altitudinea față de cea a unei sfere omogene? Cum?

6. Deoarece Pămîntul este umflat la Ecuator, izvorul riului Mississippi, deși deasupra nivelului mării, este mai apropiat de centrul Pămîntului decît la vărsarea sa. Cum poate atunci riul să curgă „la deal”?

7. Pămîntul este un sferoid turtit la poli din cauza efectului de „turtire” al rotației Pămîntului. Un grad de latitudine este mai mare sau mai mic lîngă poli sau lîngă Ecuator? De ce?

8. De ce putem afla mai multe lucruri despre forma Pămîntului studiînd mișcarea unui satelit artificial decît studiînd mișcarea Lunii?

9. Cum poate fi determinată masa Lunii?

10. Un ceasornic se bazează pe un resort oscilant, un altul pe un pendul. Ambele ceasornice sînt duse pe Marte. Vor indica ele același timp pe care l-au indicat pe Pămînt? Vor fi în concordanță unul cu altul? Să se explice. Marte are o masă de 0,1 din masa Pămîntului și o rază pe jumătate din raza Pămîntului.

11. Din legea a doua a lui Kepler și din observațiile mișcării Soarelui, văzut fiind de pe Pămînt, putem trage concluzia că Pămîntul este mai apropiat de Soare în timpul iernii în emisfera nordică decît în timpul verii. Să se explice.

12. Cere legea atracției universale ca planetele sistemului nostru solar să aibă orbitele reale observate? Plane-

tele unei alte stele, asemănătoare Soarelui nostru, ar avea aceleași orbite? Să se indice factorii care ar fi putut determina (condiționa) orbitele actuale observate.

13. Forța gravitațională exercitată de Soare asupra Lunii este mai mare (aproape de două ori) decât forța gravitațională exercitată de către Pământ asupra Lunii. De ce atunci Luna nu se desprinde de Pământ (de exemplu, în cazul unei eclipse de Soare)?

14. Să se explice de ce următorul raționament este greșit. „Soarele atrage toate corpurile de pe Pământ. La miezul nopții, când Soarele este exact dedesubt, el atrage un obiect în aceeași direcție în care îl atrage Pământul; la amiază când Soarele este exact deasupra el atrage un obiect în sens opus atracției Pământului. Prin urmare, toate obiectele trebuie să fie mai grele la miezul nopții (sau noaptea) decât la amiază (sau ziua)“.

15. Atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii asupra Pământului produce mareele. Efectul mareelor produse de Soare este aproximativ pe jumătate din cel produs de Lună. Atracția directă a Soarelui asupra Pământului este însă de aproximativ 175 ori mai mare decât a Lunii. De ce atunci Luna produce maree mai mari?

16. Dacă mareele lunare încetinesc rotația Pământului (datorită frecărilor), momentul cinetic al Pământului crește. Ce se întâmplă cu mișcarea Lunii ca o consecință a conservării momentului cinetic? Soarele (și mareele solare) joacă vreun rol aici?

17. Ne așteptăm oare ca energia totală a sistemului solar să fie constantă? Dar momentul cinetic total? Să se explice răspunsurile.

18. O rachetă are nevoie în adevăr de viteză de evadare (cosmică) de 40 300 km/oră în momentul inițial pentru a scăpa de atracția Pământului?

19. Obiectele aflate în repaus pe suprafața Pământului se mișcă pe tra-

ectorii circulare cu o perioadă de 24 h. Se găsesc ele „pe orbită“ în sensul în care se găsește un satelit terestru pe orbită? De ce nu? Ce durată ar trebui să aibă o „zi“ pentru ca astfel de obiecte să fie aduse pe o orbită adevărată?

20. Neglijând frecarea aerului și dificultățile tehnice poate fi lansat un satelit pe orbită, trăgându-l cu un tun uriaș de pe suprafața Pământului? Să se explice.

21. Poate să se miște un satelit pe o orbită stabilă într-un plan care nu trece prin centrul Pământului? Să se explice.

22. Va exista vreo diferență, măsurată de un observator de pe Pământ, între perioadele a doi sateliți, fiecare pe o orbită circulară în vecinătatea Pământului într-un plan ecuatorial, dar unul mișcându-se spre est și celălalt spre vest?

23. După ce Sputnik I a fost lansat pe orbită, ni s-a spus că el nu se va întoarce pe Pământ ci va arde în timpul coborîrii sale. Ținând seama că el nu a ars în timpul ascensiunii sale, cum este aceasta posibil?

24. Să se arate că un satelit își poate micșora viteza, adică să se arate că dacă forțele de frecare fac ca satelitul să piardă din energia totală, el se va mișca pe o orbită mai apropiată de Pământ și va avea o energie cinetică mai mare.

25. Un satelit artificial se mișcă pe o orbită circulară în jurul Pământului. Cum se va schimba orbita sa dacă unul din motoarele rachetei este momentan aprins: (a) spre Pământ, (b) în sens opus Pământului, (c) în sensul de mișcare a satelitului, (d) în sensul opus mișcării satelitului, (e) perpendicular pe planul orbitei?

26. Ce dificultăți ați întâmpina când vă plimbați în interiorul unei nave cosmice? La sărire? La băut?

27. Dacă o planetă cu o densitate dată ar fi făcută mai mare, forța sa

de atracție asupra unui obiect de pe suprafață ar crește din cauza masei mai mari a planetei, dar ar descrește din cauza distanței mai mari de la obiect până la centrul planetei. Care efect predomină?

28. Să considerăm o pătură sferică goală. Cum este potențialul gravitațional în interiorul păturii în comparație cu cel de pe suprafață? Cum este câmpul gravitațional în interiorul păturii?

Probleme

1. La ce altitudine deasupra suprafeței Pământului accelerația gravitațională va fi egală cu $4,9 \text{ m/s}^2$?

2. Deosebirea dintre masă și greutate a atras atenția atunci când Jean Richer a dus în 1672 un ceasornic cu pendul de la Paris la Cayenne în Guiana franceză, pentru a-l folosi în observații astronomice și a găsit că el rămânea în urmă în fiecare zi cu 2,5 min. Se știa deja din lucrările lui Huygens că perioada unui pendul de lungime dată este proporțională cu $1/\sqrt{g}$. Dacă $g = 980,9 \text{ cm/s}^2$ la Paris, care este g la Cayenne?

3. Care va fi perioada unui pendul care bate secunda (perioada = 2 s pe Pământ) pe suprafața Lunii?

4. Cât de departe de Pământ trebuie să se găsească un corp de-a lungul liniei spre Soare astfel încât atracția gravitațională a Soarelui să echilibreze pe cea a Pământului? Distanța până la Soare este de $1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$ și masa sa $3,24 \cdot 10^5 M_p$.

5. Un corp este suspendat de un dinamometru într-un vapor care plutește de-a lungul Ecuatorului cu o viteză v . Să se arate că indicația dinamometrului va fi apropiată de $G_0 (1 \pm 2\omega v/g)$, unde ω este viteza unghiulară a Pământului și G_0 este indicația dinamometrului atunci când

29. O piatră este lăsată să cadă de-a lungul axei unui puț de mină, vertical, adânc. Se neglijează rezistența aerului dar se ține seama de rotația Pământului. Va continua piatra să cadă de-a lungul axei puțului? Dacă nu, să se descrie mișcarea sa.

30. Putem privi gravitația ca o forță „fictivă” provenind din accelerația sistemului de referință al observatorului față de un sistem de referință inerțial și nu o forță „reală”?

vaporul este în repaus. Să se explice prezența semnelor plus și minus.

6. Un savant face o măsurătoare precisă a lui g într-un anumit punct din Oceanul Indian (la Ecuator) măsurând timpul de oscilație al unui pendul de o construcție bine cunoscută. Pentru a asigura o bază stabilă, măsurătorile sînt efectuate într-un submarin cufundat. S-a observat că se obțin rezultate puțin diferite pentru g atunci când submarinul se mișcă spre est decât atunci când se mișcă spre vest, viteza fiind în fiecare caz de 16 km/h . Să se explice această diferență și să se calculeze în fracțiuni de milion efectul pe care îl are asupra valorii lui g .

7. Două corpuri, avînd masele presupuse egale, sînt suspendate cu fire de lungimi diferite de o balanță la suprafața Pământului, așa cum este arătat în figura 16-15. Dacă firele au masă neglijabilă și diferă ca lungime cu h , (a) să se arate că eroarea de cîntărire, $W' - W$, este dată de $W' - W = -8\pi G \rho m h / 3$, și (b) să se afle diferența de lungime care ar da o eroare de unu la un milion. Se va lua masa fiecărui corp m și densitatea Pământului ρ de $5,5 \text{ g/cm}^3$.

8. Cu ce viteză ar trece coletul poștal prin centrul Pământului dacă ar fi expediat prin canalul de la exemplul 3?

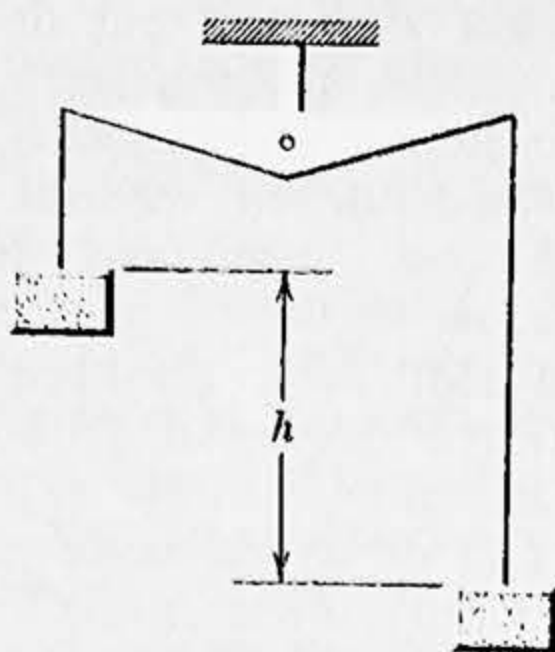


Figura 16-15.

9. (a) Să se arate că într-un canal săpat prin Pământ de-a lungul unei corzi și nu de-a lungul unui diametru, mișcarea unui obiect va fi armonică simplă. (b) Să se afle perioada mișcării. (c) Va atinge obiectul aceeași viteză de-a lungul corzii ca și de-a lungul unui diametru? Se va presupune că Pământul are o densitate uniformă.

10. Să considerăm o particulă aflată într-un punct P undeva înăuntrul unei pături sferice de materie. Presupunem că pătura are grosimea și densitatea uniforme. Construim un con dublu cu vârful în P care interceptează ariile A_1 și A_2 pe pătură (fig. 16-16). (a) Să se arate că forța gravitațională rezultantă exercitată asupra particulei din P de către elementele de masă in-

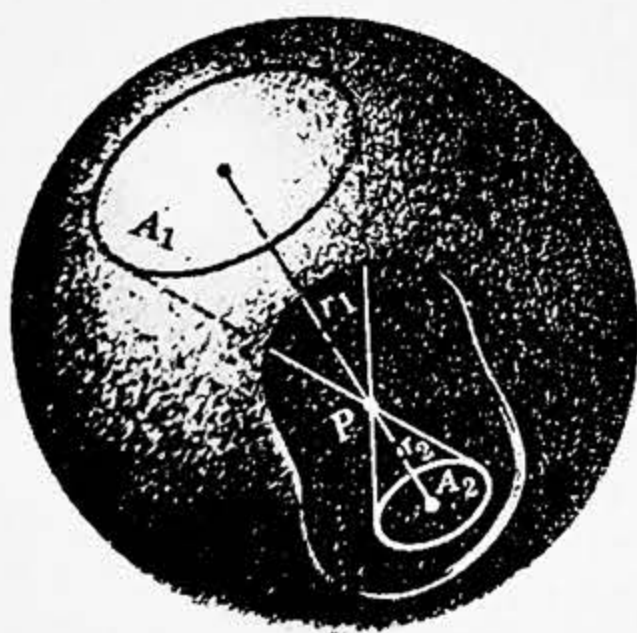


Figura 16-16.

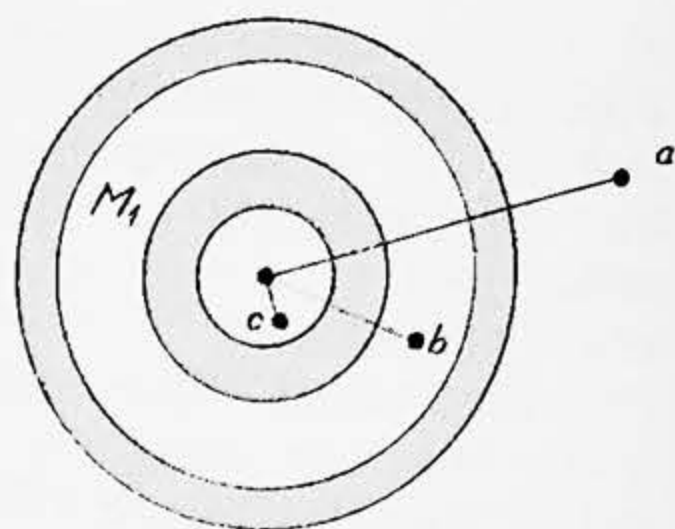


Figura 16-17.

terceptate este nulă. (b) Să se arate apoi că forța gravitațională rezultantă a întregii pături asupra unei particule din interior este nulă peste tot.

11. Două pături sferice concentrice de densitate uniformă și de mase M_1 și M_2 sînt aranjate ca în figura 16-17. Să se afle forța exercitată asupra unei particule de masă m dacă: (a) particula este situată în $r=a$; (b) dacă particula este situată în $r=b$ și (c) particula este situată în $r=c$. Distanța r este măsurată de la centrul păturilor.

12. Următoarea problemă a fost dată la „Olimpiada“ din 1946 la Universitatea de Stat din Moscova (vezi fig. 16-18): într-o sferă de plumb de rază R este practică o cavitate sferică astfel încît suprafața sa atinge suprafața exterioară a sferei de plumb și trece prin centrul acesteia. Masa sferei înainte de practicarea cavității era M . Cu ce forță, conform legii atracției universale, va atrage sfera de plumb găurită o mică sferă de masă m care se află la o distanță d de centrul sferei de plumb pe linia dreaptă care unește centrele sferelor și a cavității?

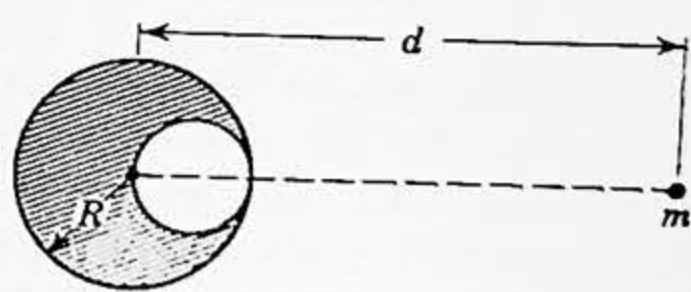


Figura 16-18.

13. (a) Cu ce viteză orizontală trebuie lansat un satelit la 160 km deasupra suprafeței terestre astfel încât el să aibă o orbită circulară în jurul Pământului? Se va lua raza Pământului $6,4 \cdot 10^6$ m. (b) Care va fi perioada rotației?

14. Să se folosească argumente calitative pentru a explica de ce următoarele patru perioade sînt egale între ele (toate sînt de 84 min): (a) timpul de revoluție al unui satelit aflat imediat deasupra suprafeței terestre; (b) perioada de oscilație a unui colet într-un tunel săpat prin pămînt; (c) perioada unui pendul simplu care are o lungime egală cu raza Pământului într-un cîmp uniform de $9,8$ N/kg; (d) perioada unui pendul simplu infinit aflat în cîmpul gravitațional real al Pământului.

15. Un proiectil este tras vertical de pe suprafața pămîntului cu o viteză inițială de 10 km/s. Neglijînd frînarea atmosferică, cît de departe va ajunge el deasupra suprafeței Pământului? Se va lua raza Pământului 6400 km. Se va neglija rotația Pământului.

16. Este nevoie de mai multă energie pentru a urca un satelit pînă la 1600 km deasupra Pământului decît pentru a-l lansa pe o orbită acolo? 3200 km? 4800 km? Se va lua raza Pământului 6400 km.

17. Doi sateliți terestri, A și B, fiecare de masă m , trebuie lansați pe orbite (aproape) circulare în jurul centrului Pământului. Satelitul A trebuie să orbiteze la o altitudine de 6400 km. Satelitul B trebuie să orbiteze la o altitudine de 19200 km. Raza Pământului R_p este de 6400 km (fig. 16-19). (a) Care este raportul dintre energia potențială a satelitului B și cea a satelitului A pe orbită? (Să se explice rezultatul cu ajutorul lucrului mecanic

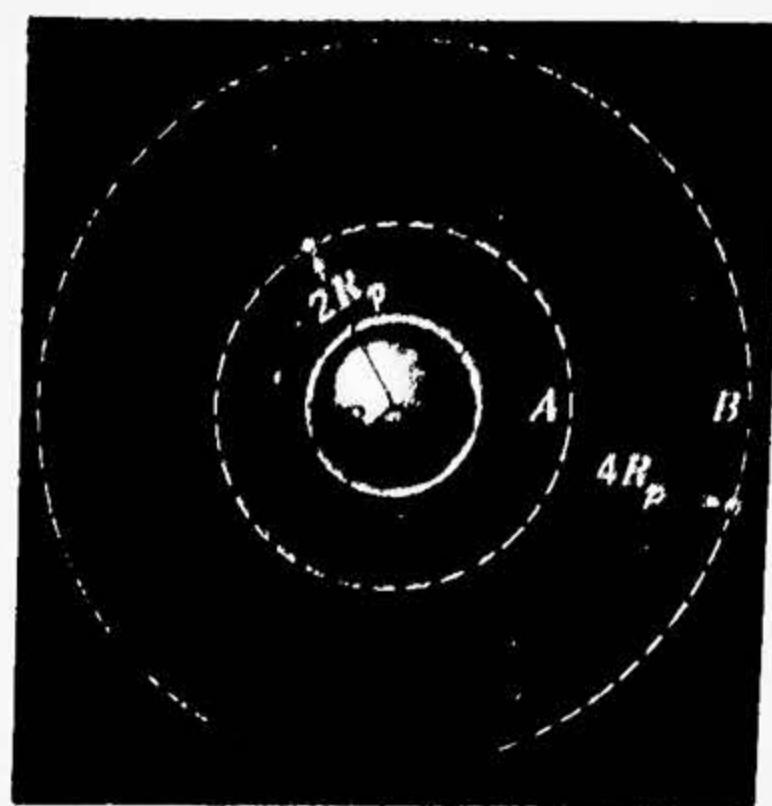


Figura 16-19.

necesar pentru a deplasa fiecare satelit de pe orbita sa la infinit.) (b) Care este raportul dintre energia cinetică a satelitului B și cea a satelitului A, pe orbită? (c) Care satelit are energie totală mai mare, dacă fiecare are o masă de $14,6$ kg? Cu cît?

18. (a) Poate fi lansat un satelit pînă la o distanță la care el se va roti în jurul Pământului cu o viteză unghiulară egală cu cea cu care se rotește Pământul, astfel încît el să rămînă mereu deasupra aceluiași punct de pe Pămînt? (b) Planul orbitei sale trebuie să fie un plan ecuatorial? (c) Care ar fi raza unei astfel de orbite?

19. Să considerăm doi sateliți A și B de masă egală m , mișcîndu-se pe aceeași orbită circulară de rază r în jurul Pământului P dar în sensuri opuse de rotație și deci într-o cursă de

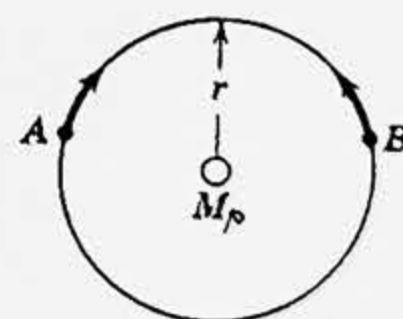


Figura 16-20.

clocnire (vezi fig. 16-20). (a) Să se afle în funcție de G , M_p , m și r , energia mecanică totală $E_A + E_B$ a sistemului format de Pământ plus cei doi sateliți, înainte de clocnire. (b) Dacă clocnirea este complet inelastică astfel încît rezultă un singur corp (masă $= 2m$), să se afle energia mecanică totală imediat după clocnire. (c) Să se descrie mișcarea următoare a corpului.

20. Un satelit se mișcă inițial pe o orbită aproximativ circulară la 640 km deasupra suprafeței Pământului, masa sa fiind de 217 kg. (a) Să se afle viteza sa. (b) Să se afle perioada sa. Din diferite cauze satelitul pierde energie mecanică cu o viteză (medie) de 142 kJ la fiecare revoluție orbitală completă. Adoptînd aproximația rezonabilă că traiectoria este „un cerc cu rază încet descrescîndă”, (c) să se determine distanța de la suprafața Pământului, viteza și perioada satelitului la sfîrșitul celei de-a 1500 revoluții orbitale. (d) Care este forța de frînare medie? (e) Se conservă momentul cinetic?

21. Distanța medie de la Marte pînă la Soare este de 1,524 ori distanța de la Pământ la Soare. Să se afle numărul de ani necesari planetei Marte pentru a face o revoluție în jurul Soarelui.

22. Să se determine masa Pământului cunoscînd perioada T și raza r a orbitei Lunii în jurul Pământului; $T = 27,3$ zile și $r = 380 \cdot 10^3$ km.

23. (a) Să se arate că pentru a evada (a scăpa) din atmosfera unei planete, o condiție necesară pentru o moleculă este aceea ca ea să aibă o viteză $v^2 > 2GM/r$, unde M este masa planetei și r este distanța moleculei pînă la centrul planetei. (b) Să se determine viteza de evadare din atmosfera Pământului a unei particule la

1000 km deasupra suprafeței Pământului. (c) Să se calculeze aceeași viteză pentru Lună și pentru Soare.

24. Marte are un diametru mediu de 6760 km, Pământul unul de $12,75 \times 10^3$ m. Masa planetei Marte este $0,11 M_p$. (a) Cum este densitatea medie a planetei Marte față de cea a Pământului? (b) Care este valoarea lui g pe Marte? (c) Care este viteza de evadare de pe Marte?

25. O pereche de stele se rotește în jurul centrului de masă comun. Una din stele are o masă M de două ori mai mare decît masa m a celeilalte, adică $M = 2m$. Centrele lor se află la o distanță d unul de altul, d fiind mare în comparație cu dimensiunile fizice ale stele. (a) Să se deducă o expresie pentru perioada de rotație a stelelor în jurul centrului lor de masă comun în funcție de d , m și G . (b) Să se compare momentele cinetice ale celor două stele în jurul centrului lor de masă comun, calculînd pentru aceasta raportul L_m/L_M . (c) Să se compare energiile cinetice ale celor două stele, calculînd pentru aceasta raportul E_m/E_M .

26. Într-o stea dublă, cele două stele, fiecare de masă $3 \cdot 10^{30}$ kg, se rotesc în jurul centrului lor de masă comun la o distanță de 10^{11} m. (a) Care este viteza lor unghiulară comună? (b) Să presupunem că un meteorit trece prin acest centru de masă mișcîndu-se perpendicular pe planul orbital al stelelor. Care trebuie să fie viteza sa pentru a putea evada din câmpul gravitațional al stelei duble?

27. Trei corpuri identice de masă M sînt situate în vîrfurile unui triunghi echilateral de latură L . Cu ce viteză trebuie să se miște dacă ele se rotesc sub influența forțelor de gravitație reciproce pe o orbită circulară care circumscribe triunghiul păstrîndu-l mai departe echilateral?

28. Două particule de masă m respectiv M sînt inițial în repaus la o distanță mică una de alta. Să se arate că în fiecare moment viteza lor relativă de apropiere datorită atracției gravitaționale este $\sqrt{2G(M+m)/d}$, unde d este distanța dintre ele în acel moment.

29. O particulă de masă m este supusă unei forțe centrale atractive de modul k/r^2 , unde k este o constantă. Dacă în momentul cînd particula se află într-o poziție extremă pe orbita sa închisă, la o distanță a de centrul de atracție, viteza sa este $\sqrt{k/2ma}$, să se afle cealaltă poziție extremă.

30. Care este variația procentuală a accelerației Pămîntului spre Soare datorită eclipsei totale a Soarelui în punctul în care Luna este de aceea parte a Pămîntului care este direct opusă Soarelui?

31. Un corp cu masa de 800 kg și altul cu masa de 600 kg sînt separate cu 0,25 m. (a) Care este intensitatea cîmpului gravitațional generat de aceste corpuri într-un punct situat la 0,20 m de corpul cu masa de 800 kg și la 0,15 m de corpul cu masa de 600 kg? (b) Care este potențialul gravitațional în acest punct datorit acelorasi mase?

32. Două corpuri avînd masele de 200 respectiv 800 g sînt separate cu 12 cm. (a) Să se afle forța gravitațională exercitată asupra unității de masă într-un punct de pe linia care unește corpurile, situat la 4,0 cm de corpul cu masa de 200 g. (b) Să se afle energia potențială pe unitatea de masă în acel punct. (c) Ce lucru mecanic este necesar pentru a deplasa această unitate de masă pînă la un punct situat la 4,0 cm de corpul cu masa de 800 g de-a lungul liniei centrelor?

33. (a) Să se scrie o expresie pentru energia potențială a unui corp de masă m situat în cîmpul gravitațional

al Pămîntului și Lunii. Fie M_p masa Pămîntului, M_l masa Lunii (unde $M_p = 81 M_l$), R distanța de la centrul Pămîntului, r distanța de la centrul Lunii și d distanța Pămînt—Lună. (b) În ce punct sau puncte cîmpul gravitațional generat de Pămînt și de Lună va fi nul? (c) La ce se va reduce expresia de la punctul (a) dacă m se află pe suprafața Pămîntului? Pe suprafața Lunii? Fie R_p și R_l razele respective. (d) Să se scrie o expresie pentru cîmpul gravitațional la suprafața Pămîntului. La suprafața Lunii.

34. O sferă de substanță, de rază a , are o cavitate concentrică de rază b , așa cum este arătat în secțiunea transversală din figura 16-21. (a) Să se reprezinte forța gravitațională F exercitată de sferă asupra unei particule de masă m , situată la o distanță r de centrul sferei, în funcție de r , în intervalul $0 \leq r \leq \infty$. Să se considere în particular punctele $r=0$, b , a și ∞ . (b) Să se reprezinte curba corespunzătoare a energiei potențiale $E_p(r)$ a sistemului. (c) Cum s-ar putea obține din aceste grafice graficul intensității cîmpului gravitațional și graficul potențialului gravitațional generat de sferă?

35. Variația lui g în interiorul Pămîntului este dată în tabela de la pag. 452. Raza Pămîntului este de 6 400 km.

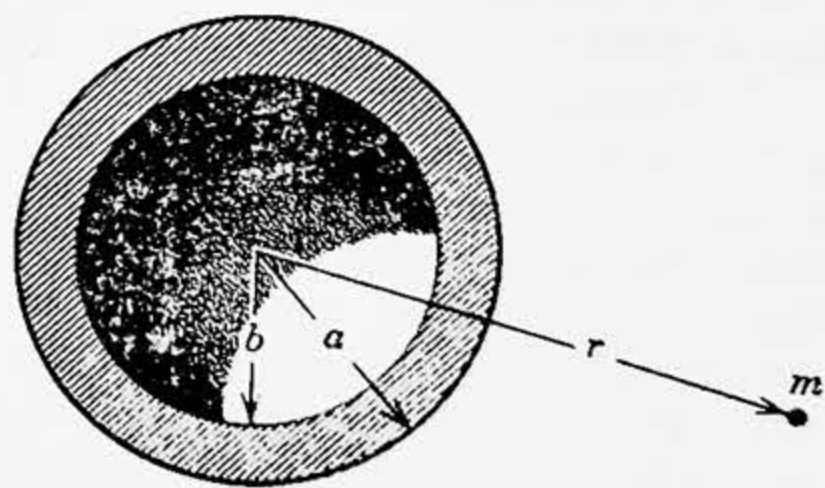


Figura 16-21.

Adâncimea km	g m/s ²	Adâncimea km	g m/s ²
0	9,82	1 400	9,88
33	9,85	1 600	9,86
100	9,89	1 800	9,85
200	9,92	2 000	9,86
300	9,95	2 200	9,90
413	9,98	2 400	9,98
600	10,01	2 600	10,09
800	9,99	2 800	10,26
1 000	9,95	2 900	10,37
1 200	9,91	4 000	8,00

În interiorul nucleului central terestru (sub 2 900 km) valorile lui g scad monoton (dar nu liniar) de la 10,37 m/s² pînă la zero. Variația reală a lui g sub 4 000 km este nesigură. (a) Să se reprezinte calitativ g în funcție de r (unde r este distanța pînă la centrul Pămîntului) de la 0 la 6 400 km. (b) Să se explice îngrijit cum trebuie să varieze densitatea Pămîntului atunci cînd ne deplasăm de la suprafața sa pînă la centrul său pentru a explica această variație a lui g . (c) Se va lua $\rho=1$ la suprafață (valoarea sa medie este în realitate 3,0 g/cm³) și se va reprezenta calitativ ρ în funcție de r . Se va presupune peste tot că ρ și g posedă simetrie sferică.

36. În afară de accelerația dirijată spre axa de rotație a Pămîntului și spre Soare, un sistem de referință legat de Pămînt este accelerat spre centrul Galaxiei. Luînd perioada rotației Soarelui în jurul centrului galactic de $2,5 \cdot 10^8$ ani și distanța sa pînă la centru de $2,4 \cdot 10^{20}$ m, să se compare aceste trei accelerații pentru un punct de pe Ecuator.

37. *Pendulul lui Foucault.* Un pendul al cărui capăt superior este fixat astfel încît să-i permită să oscileze liber în orice direcție, poate fi folosit pentru a repeta o experiență demonstrată pentru prima dată în public de către Foucault la Paris, în 1851. Dacă pendulul este pus să oscileze, planul oscilațiilor se va roti încet față de o linie trasată pe podea, deși tensiunea din firul de suspensie a bilei și atracția gravitațională a Pămîntului asupra bilei se află într-un plan vertical. (a) Să se arate că acesta este un rezultat al faptului că Pămîntul nu este un sistem de referință inerțial. (b) Să

se arate că pentru un pendul Foucault la o latitudine θ , perioada de rotație a planului este $(24/\sin \theta)$ h. (c) Să se explice cît mai simplu rezultatul pentru $\theta = 90^\circ$ (la poli) $\theta = 0^\circ$ (la Ecuator).

38. Fizicienii au făcut speculații relativ la existența posibilă a corpurilor cu masă negativă; pentru astfel de corpuri ipotetice, a fost pusul că m din formulele fizicii trebuie înlocuit cu $-m$. Să presupunem că două particule de masă $+m$ și respectiv $-m$ sînt așezate la o distanță d între ele. Să se arate: (a) forța care acționează între ele și (b) accelerația fiecărei particule. Să se descrie mișcarea prevăzută, presupunînd că ambele particule sînt inițial în repaus și să se arate că această mișcare nu infirmă legile de conservare a impulsului și energiei mecanice. Nu au fost descoperite astfel de particule cu masă negativă.

39. (a) Să se arate că problema celor două corpuri de la paragraful 16-7 poate fi simplu redusă la o problemă a unui singur corp folosind conceptul

de masă redusă de la paragraful 15-8. Adică, să se arate că dacă folosim $\mu = mM/(m+M)$ în locul lui m , putem rezolva problema mișcării lui m relativ la M exact ca și cum M ar fi în originea sistemului nostru de referință inerțial. (b) Să se arate că ipoteza făcută în paragraful 16-7 că R este neglijabil de mic în comparație cu r ,

este echivalentă cu ipoteza că masa redusă μ este egală cu m . (c) Să se compare μ pentru sistemul Pământ—Soare cu masa Pământului; să se compare μ pentru sistemul Lună—Pământ cu masa Lunii. (d) Dacă am folosi masa redusă μ a sistemului de două corpuri în locul lui m , cum ar afecta aceasta ecuațiile de la paragraful 16-7?

Statica fluidelor

17-1. Fluidele

Se obișnuiește să se clasifice substanțele din punct de vedere macroscopic, în solide și fluide. Un *fluid* este o substanță care poate *curge*. Prin urmare, termenul de fluid include lichidele și gazele. Astfel de clasificări nu sînt întotdeauna exacte. Unele fluide cum este rășina sau smoala, curg așa de încet încît ele se comportă ca solide în intervalele de timp în care lucrăm cu ele. Plasma, care reprezintă un gaz puternic ionizat, nu se potrivește în nici una din aceste categorii; ea se numește adesea „a patra stare a materiei” pentru a o distinge de starea solidă, lichidă sau gazoasă. Chiar diferența dintre un lichid și un gaz nu este distinctă deoarece, variînd presiunea și temperatura în mod convenabil, este posibil de a transforma un lichid (de exemplu apa) în gaz (de exemplu vapori) fără apariția vreunui menisc și fără a-l fierbe; densitatea și viscozitatea variază în mod continuu în timpul procesului¹. În acest text însă, vom defini un fluid așa cum este el înțeles în mod obișnuit și vom fi interesați numai în acele proprietăți ale fluidelor care sînt legate de proprietatea lor de a curge. Prin urmare, aceleași legi fundamentale controlează comportarea din statică și dinamică atît a lichidelor cît și a gazelor în ciuda diferențelor dintre ele pe care le observăm la presiuni obișnuite.

Pentru solide care au dimensiuni și forme bine definite, am formulat mecanica corpurilor rigide, modificată prin legile elasticității pentru corpurile care nu pot fi considerate perfect rigide. Deoarece fluidele își schimbă forma în mod continuu și în cazul gazelor au un volum egal cu cel al vasului în care sînt cuprinse, trebuie să dezvoltăm noi metode

¹ Pentru a face aceasta trebuie folosite presiuni mai înalte decît așa-numita presiune critică; pentru H_2O presiunea critică este de 218 atmosfere.

de rezolvare a problemelor în mecanica fluidelor. Aplicațiile mecanicii la medii continue, atât solide cât și fluide, se bazează pe legile mișcării lui Newton combinate cu legi convenabile ale forței. Pentru fluide, ca și pentru solide de altfel, este convenabil să dezvoltăm formulări speciale ale acestor legi fundamentale.

17-2. Presiunea și densitatea

Există o diferență în modul în care o forță de suprafață acționează asupra unui fluid și asupra unui solid. Pentru un solid nu există restricții privind direcția unei astfel de forțe, dar pentru un fluid în repaus forța de suprafață trebuie să fie totdeauna îndreptată perpendicular pe suprafață. Aceasta deoarece un fluid în repaus nu poate susține o forță tangențială; părțile de fluid ar aluneca pur și simplu unele peste altele dacă ar fi supuse unei astfel de forțe. În adevăr, incapacitatea fluidelor de a rezista la asemenea forțe tangențiale (sau eforturi de forfecare sau alunecare) este aceea care le conferă capacitatea lor caracteristică de a-și schimba forma sau de a curge.

De aceea este convenabil să descriem forța care acționează asupra unui fluid specificând *presiunea* p , care este definită ca intensitatea forței *normale* pe unitatea de suprafață. Presiunea se transmite către frontierele solide sau prin secțiuni arbitrare ale fluidului, *perpendicular* pe aceste frontiere sau secțiuni în fiecare punct. Presiunea este o mărime scalară. Unele unități obișnuite de presiune sînt: N/m^2 , $\text{kgf/cm}^2 = 1 \text{ at}$, $\text{dyn/cm}^2 = \text{barye}$, $\text{bar} = 10^6 \text{ barye}$, torr (mm Hg) ($760 \text{ torr} = 1 \text{ atm}$).

Un fluid sub presiune exercită o forță asupra oricărei suprafețe în contact cu el. Să considerăm o suprafață închisă conținând un fluid (figura 17-1). Un element de suprafață poate fi reprezentat printr-un vector $\Delta \vec{S}$ a cărui intensitate ne dă aria elementului și a cărui direcție se ia după normala exterioară la elementul de suprafață. Atunci forța $\Delta \vec{F}$ exercitată de fluid asupra acestui element de suprafață este

$$\vec{F} = p \Delta \vec{S}.$$

Deoarece $\Delta \vec{F}$ și $\Delta \vec{S}$ au aceeași direcție, presiunea p poate fi scrisă astfel

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

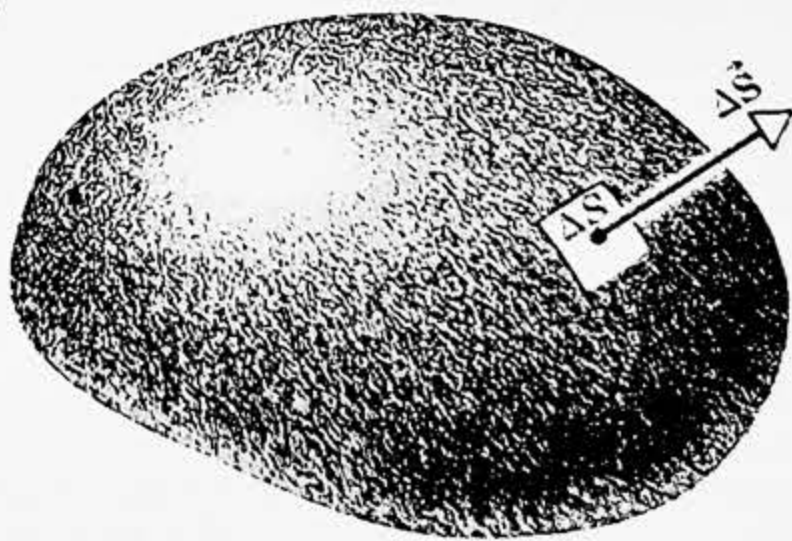


Figura 17-1. Un element de suprafață ΔS poate fi reprezentat printr-un vector $\Delta \vec{S}$ egal în modul cu aria sa și dirijat ca direcție perpendicular pe el

Presiunea astfel definită poate depinde de dimensiunea elementului de arie ΔS pe care îl alegem. Pentru a evita această dificultate îmbunătățim definiția dată de noi presiunii luând un element mic de suprafață conținând punctul de studiat și considerînd limita acestui raport cînd elementul se reduce la un punct. Atunci presiunea din acel punct este dată de

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Presiunea poate varia de la punct la punct pe suprafață.

Densitatea ρ a unui fluid omogen (masa împărțită la volum) poate depinde de mai mulți factori, cum sînt temperatura și presiunea la care el este supus. Pentru lichide densitatea variază foarte puțin pe intervale largi de presiune și temperatură și o putem trata cu siguranță ca o constantă pentru scopurile noastre; vedeți datele pentru apă din tabela 17-1. Densitatea unui gaz, însă, este foarte sensibilă la variații de temperatură și presiune; vedeți datele pentru aer din tabela 17-1. Această tabelă arată intervalul de densități care se întîlnesc în natură.

Tabela 17-1

DENSITĂȚILE UNOR MATERIALE ȘI OBIECTE ÎN kg/m^3

Spațiul interstelar	$10^{-18} - 10^{-21}$
Vid înalt de laborator	$\sim 10^{-16}$
Hidrogen: la 0°C și 1,0 atm	$9,0 \cdot 10^{-2}$
Aer: la 0°C și 1,0 atm	1,3
la 100°C și 1,0 atm	0,95
la 0°C și 50 atm	6,5
Styroplast	$\sim 1 \cdot 10^2$
Gheață	$0,92 \cdot 10^3$
Apă: la 0°C și 1,0 atm	$1,000 \cdot 10^3$
la 100°C și 1,0 atm	$0,958 \cdot 10^3$
la 0°C și 50 atm	$1,002 \cdot 10^3$
Aluminiu	$2,7 \cdot 10^3$
Mercur	$1,36 \cdot 10^4$
Platină	$2,14 \cdot 10^4$
Pămîntul: densitatea medie	$5,52 \cdot 10^3$
densitatea nucleului	$9,5 \cdot 10^3$
densitatea scoarței	$2,8 \cdot 10^3$
Soarele: densitatea medie	$1,4 \cdot 10^3$
densitatea în centru	$\sim 1,6 \cdot 10^5$
Stelele pitice albe (densități centrale)	$10^8 - 10^{15}$
Nucleul de uraniu	$\sim 10^{17}$

17-3. Variația presiunii într-un fluid în repaus

Dacă un fluid este în echilibru, fiecare porțiune de fluid este în echilibru. Să considerăm un mic element de volum de fluid în interiorul fluidului. Fie acest element de forma unui disc subțire situat la o distanță y deasupra unui nivel de referință, așa cum se arată în figura 17-2, a. Grosimea discului este dy și fiecare față are aria A . Masa acestui element este $\rho A dy$ și greutatea sa este $\rho g A dy$. Forțele exercitate

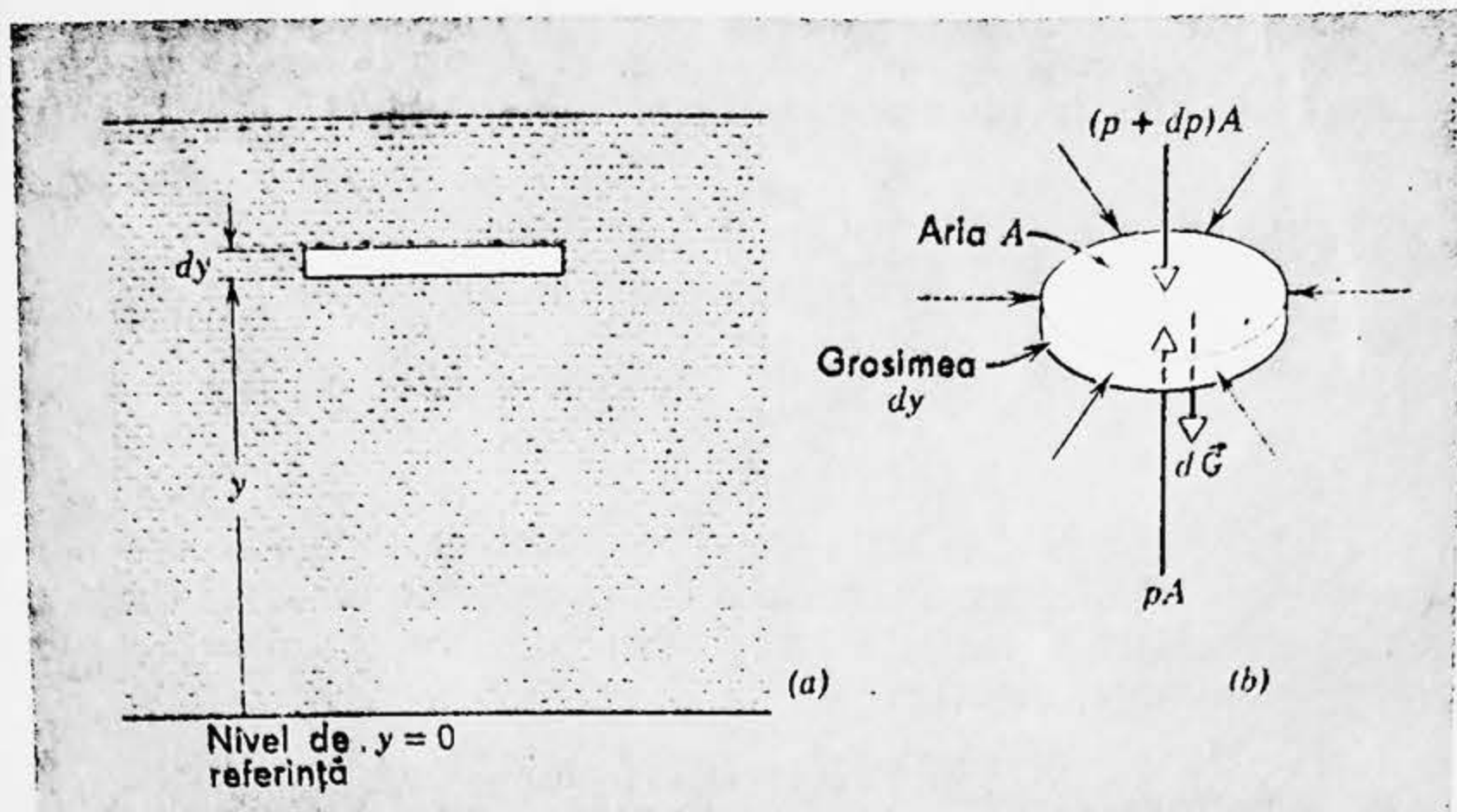


Figura 17-2. (a) Un element mic de volum de fluid în repaus. (b) Forțele exercitate asupra elementului.

asupra elementului de către fluidul înconjurător sînt perpendiculare pe suprafața sa în fiecare punct (figura 17-2, b).

Forța orizontală rezultantă este nulă, deoarece elementul nu are accelerație orizontală. Forțele orizontale se datoresc numai presiunii fluidului și în virtutea simetriei presiunea trebuie să fie aceeași în toate punctele dintr-un plan orizontal aflat la înălțimea y .

Elementul de fluid nu este accelerat nici în direcție verticală, astfel încît forța verticală rezultantă asupra lui trebuie să fie nulă. Forțele verticale însă se datoresc nu numai presiunii fluidului pe fețele sale, ci și greutății elementului. Dacă notăm cu p presiunea de pe fața inferioară și cu $p + dp$ presiunea pe fața sa superioară, forța în sus va fi pA (exercitată asupra feței inferioare) și forța în jos va fi $(p + dp)A$ (exercitată asupra feței superioare) plus greutatea elementului dG . Prin urmare, pentru echilibrul vertical

$$pA = (p + dp)A + dG = (p + dp)A + \rho g A dy$$

și

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (17-1)$$

Această ecuație ne spune cum variază presiunea cu înălțimea deasupra unui nivel de referință într-un fluid în echilibru static. Cînd înălțimea crește (dy pozitiv), presiunea descrește (dp negativ). Cauza acestei variații de presiune este greutatea pe unitatea de arie a secțiunii transversale a straturilor de fluid aflate între punctele între care se măsoară diferența de presiune.

Mărimea ρg se numește adesea *greutatea specifică* a fluidului; ea reprezintă greutatea pe unitatea de volum a fluidului. Pentru apă, de exemplu, greutatea specifică este $9,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$.

Dacă p_1 este presiunea la înălțimea y_1 și p_2 presiunea la înălțimea y_2 deasupra nivelului de referință, integrarea ecuației (17-1) dă

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

sau

$$p_2 - p_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy. \quad (17-2)$$

Pentru lichide ρ este practic constant deoarece lichidele sînt aproape incompresibile; și diferențele de nivel sînt rar atît de mari încît să fie nevoie să considerăm variația lui g . Prin urmare, considerînd pe ρ și pe g drept constante, obținem

$$p_2 - p_1 = - \rho g (y_2 - y_1) \quad (17-3)$$

pentru un lichid omogen.

Dacă un lichid are o suprafață liberă, aceasta reprezintă un nivel natural de la care se măsoară distanțele. Pentru a schimba nivelul nostru de referință la suprafața superioară, îl considerăm pe y_2 ca înălțime a suprafeței la care presiunea p_2 , care acționează asupra fluidului, este de obicei presiunea exercitată de către atmosfera terestră, p_0 . Luăm atunci pe y_1 ca un nivel oarecare și notăm presiunea la acel nivel cu p . Atunci

$$p_0 - p = - \rho g (y_2 - y_1).$$

Dar $y_2 - y_1$ este adîncimea h sub suprafață la care presiunea este p (vezi figura 17-3), astfel încît

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (17-4)$$

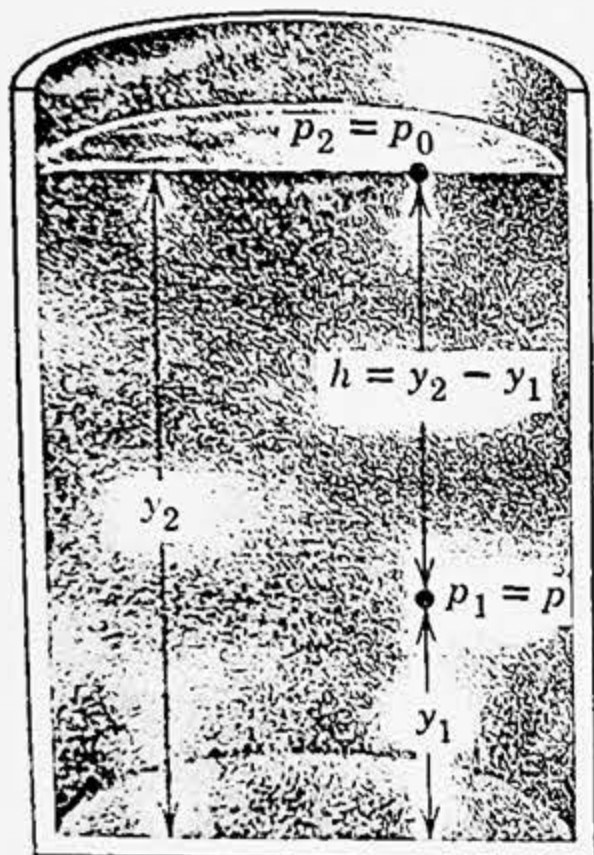


Figura 17-3. Un lichid a cărui suprafață exterioară superioară este deschisă presiunii atmosferice.

Aceasta arată clar că presiunea este aceeași în toate punctele situate la aceeași adîncime.

Pentru gaze ρ este relativ mic și diferența de presiune între două puncte este de obicei neglijabilă (vezi ecuația 17-3). Astfel, într-un vas conținînd un gaz, presiunea poate fi considerată peste tot aceeași. Acesta nu este însă cazul dacă $y_2 - y_1$ este foarte mare. Presiunea aerului variază mult dacă ne ridicăm la înălțimi mari în atmosferă. În adevăr, în astfel de cazuri, densitatea ρ variază cu altitudinea și ρ trebuie cunoscut ca o funcție de y pentru a putea integra ecuația (17-2).

Exemplul 1. Putem căpăta o idee rezonabilă asupra variației presiunii cu altitudinea în atmosfera terestră dacă presupunem că densitatea ρ este proporțională cu presiunea. Aceasta ar fi foarte aproape de adevăr dacă temperatura aerului

ar rămâne aceeași la toate altitudinile. Folosind această ipoteză și presupunând de asemenea că variația lui g cu altitudinea este neglijabilă, să se afle presiunea p la o altitudine y deasupra nivelului mării.

Din ecuația (17-1) avem

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Deoarece ρ este proporțional cu p , avem

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0},$$

unde ρ_0 și p_0 sînt valorile cunoscute ale densității și presiunii la nivelul mării. Atunci

$$\frac{dp}{dy} = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g,$$

astfel încît

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dy.$$

Integrînd aceasta de la valoarea p_0 în punctul $y=0$ (nivelul mării) pînă la valoarea p din punctul y (deasupra nivelului mării), obținem

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} y$$

sau

$$p = p_0 e^{-g(\rho_0/p_0)y}$$

Dar

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2, \quad \rho_0 = 1,20 \text{ kg/m}^3 \text{ (la } 20^\circ\text{C)},$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

astfel încît

$$g \frac{\rho_0}{p_0} = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0,116 \text{ km}^{-1}$$

Prin urmare,

$$p = p_0 e^{-ay}$$

unde $a = 0,116 \text{ km}^{-1}$.

Am văzut că, deoarece lichidele sînt aproape incompresibile, straturile inferioare nu sînt comprimate sensibil de către greutatea straturilor superioare suprapuse peste acestea și densitatea ρ este practic constantă la toate nivelele. Pentru gaze la temperatură uniformă densitatea ρ a unui strat este proporțională cu presiunea p din acel strat. Variația presiunii cu distanța deasupra fundului unui fluid, este una pentru gaz și alta pentru lichid. Figura 17-4 arată distribuția presiunii în apă și în aer.

Ecuația (17-3) dă legătura dintre presiunile în oricare două puncte într-un fluid, indiferent de forma vasului care îl conține. Oricare ar fi forma vasului, două puncte din fluid pot fi legate printr-un drum format din trepte verticale și orizontale. De exemplu să considerăm punctele A și B în lichidul omogen conținut în tubul de forma literei U

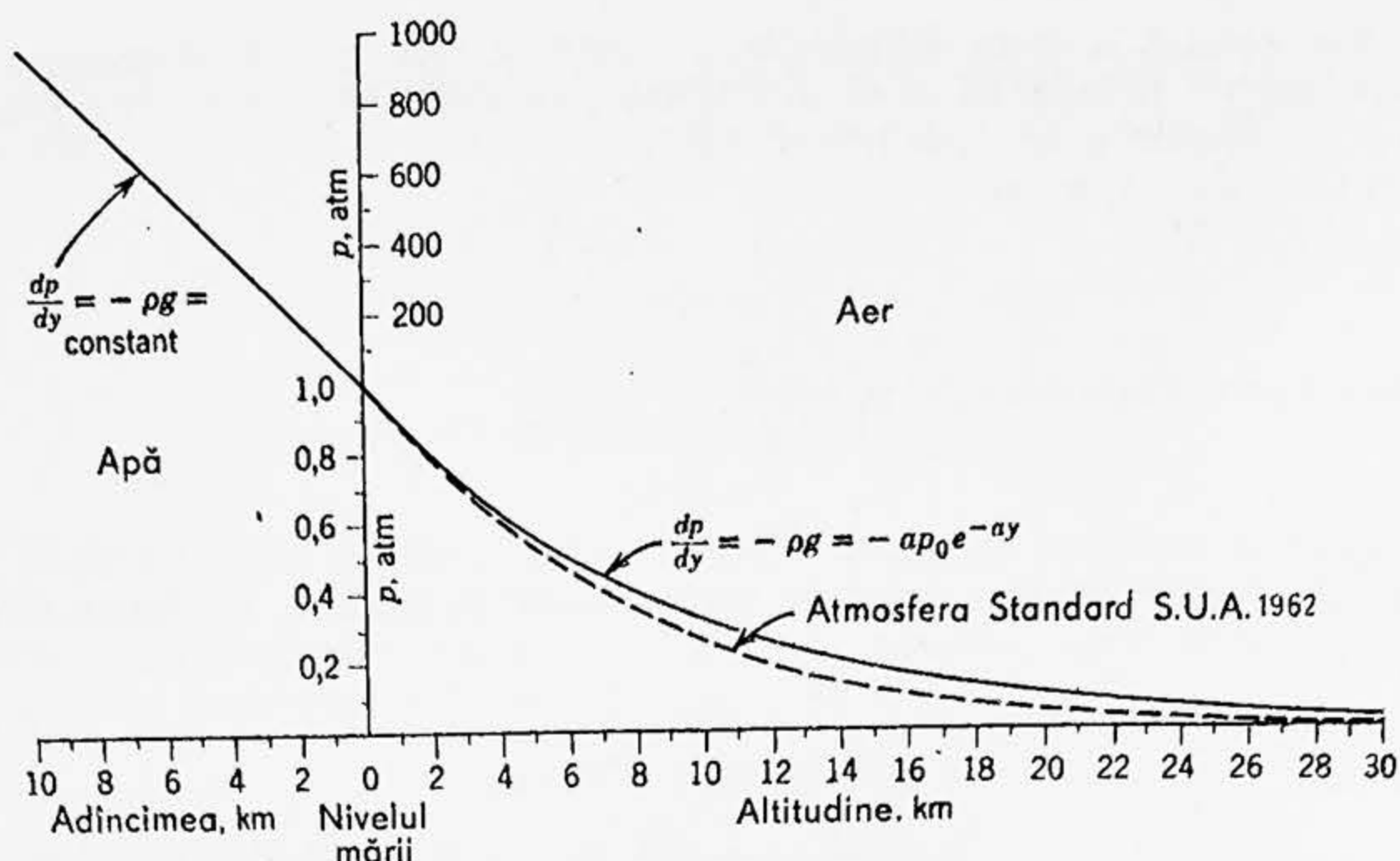


Figura 17-4. Exemplul 1. Variația presiunii cu altitudinea în aer și cu adâncimea în apă. Observăm că scările presiunii sînt diferite pentru altitudine și adâncime. Linia plină pentru aer este calculată în ipoteza că aerul are o temperatură constantă și g nu variază cu altitudinea. Linia întreruptă (atmosfera standard, Statele Unite ale Americii - 1962) reprezintă un calcul mai rafinat în care nu se fac aceste ipoteze.

din figura 17-5, *a*. De-a lungul drumului frînt în zigzag de la A la B există o diferență de presiune $\rho g y'$ pentru fiecare segment vertical de lungime y' , în timp ce de-a lungul fiecărui segment orizontal nu există variație de presiune. Prin urmare, diferența de presiune $p_B - p_A$ este egală cu ρg înmulțit cu suma algebrică a segmentelor verticale de la A la B , adică $\rho g (y_2 - y_1)$.

Dacă tubul în U conține lichide diferite nemiscibile, de exemplu un lichid dens în ramura din dreapta și unul mai puțin dens în ramura din

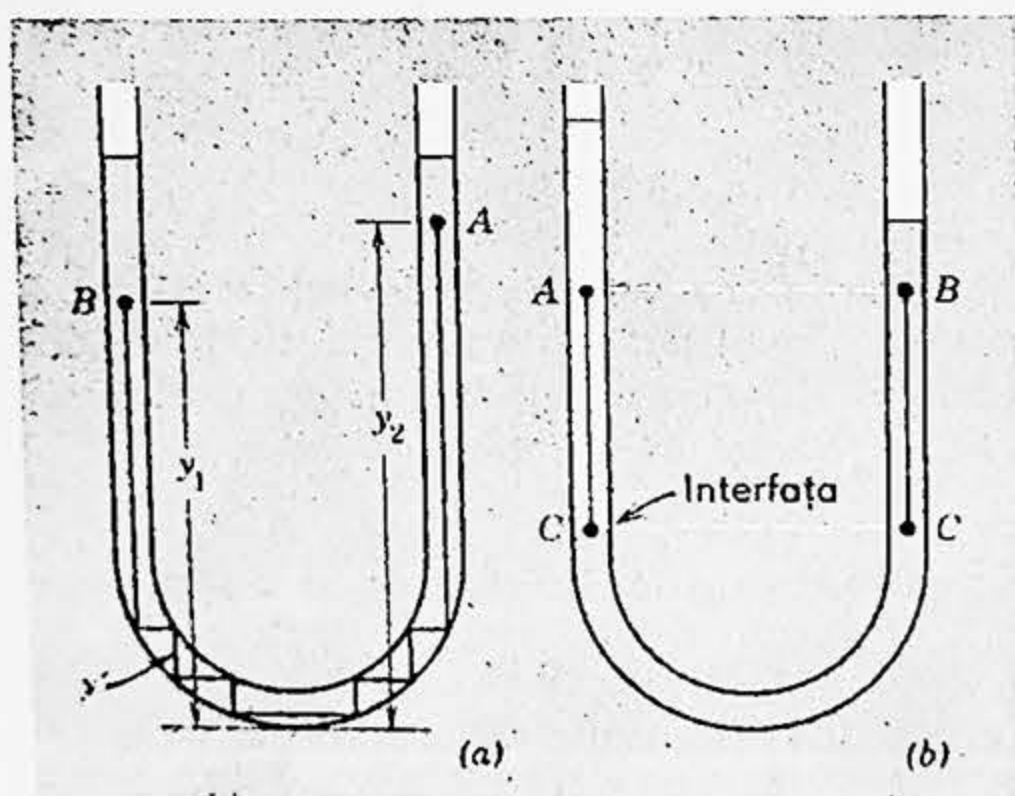


Figura 17-5. (a) Diferența de presiune dintre două puncte A și B dintr-un lichid omogen depinde numai de diferența lor de înălțime $y_2 - y_1$. (b) Două puncte A și B aflate la același nivel se pot găsi la presiuni diferite dacă densitățile în acele puncte sînt diferite.

stînga, după cum se arată în figura 17-5, b, presiunea poate fi diferită la același nivel în cele două ramuri. În figură suprafața lichidului este mai înaltă în ramura din stînga decît în cea din dreapta. Presiunea în A va fi mai mare decît presiunea în B . Presiunea în C este aceeași în ambele ramuri, însă presiunea scade mai puțin de la C la A decît de la C la B , deoarece o coloană de lichid cu secțiunea transversală de o unitate care leagă pe A de C va cîntări mai puțin decît o coloană corespunzătoare care leagă pe B de C .

Exemplul 2. Un tub în formă de U este umplut parțial cu apă. Un alt lichid, care nu se amestecă cu apa, este turnat într-o ramură pînă cînd ajunge la o distanță d deasupra nivelului apei din cealaltă ramură, care între timp a urcat cu o distanță l (fig. 17-6). Să se afle densitatea lichidului relativ la densitatea apei.

În figura 17-6 punctele C se află la aceeași presiune. Prin urmare căderea de presiune de la C pînă la fiecare suprafață este aceeași, deoarece fiecare suprafață se află la presiune atmosferică.

Căderea de presiune din ramura cu apă este $\rho_a g 2l$; $2l$ provine din faptul că coloana de apă a urcat pe o distanță l într-o ramură și a coborît pe o distanță l în cealaltă ramură, de la poziția sa inițială. Căderea de presiune din cealaltă ramură este $\rho g(d+2l)$, unde ρ este densitatea lichidului necunoscut. Prin urmare

$$\rho_a g 2l = \rho g(d+2l)$$

și

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{2l}{2l+d}.$$

Raportul dintre densitatea unei substanțe și densitatea apei se cheamă *densitate relativă* a acelei substanțe.

17-4. Principiul lui Pascal și principiul lui Arhimede

Figura 17-7 arată un lichid într-un cilindru închis cu un piston asupra căruia putem aplica o presiune exterioară p_0 . Presiunea p într-un punct arbitrar P la o distanță h sub suprafața superioară a lichidului este dată de ecuația (17-4):

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Să mărim presiunea externă cu o cantitate arbitrară Δp_0 (care nu trebuie să fie neapărat mică în comparație cu p_0). Deoarece lichidele sînt

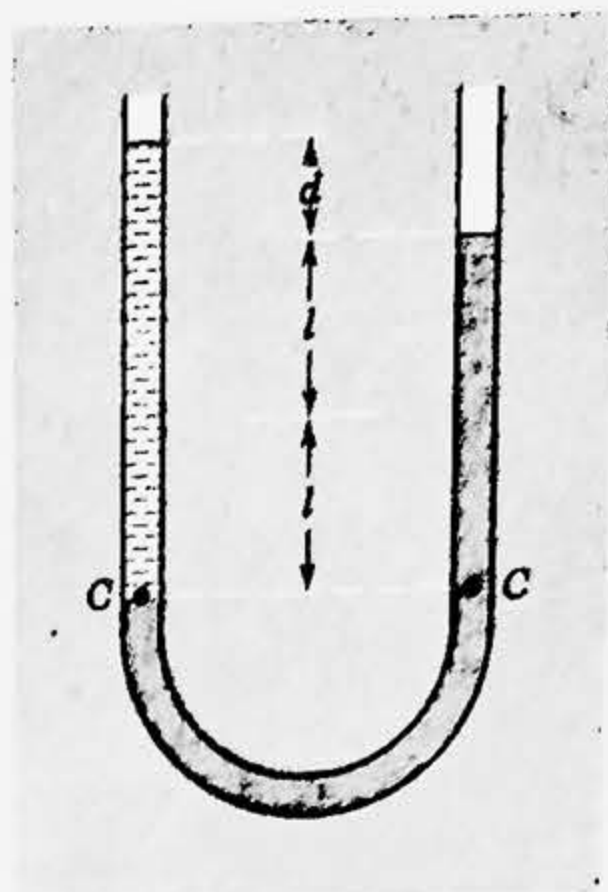


Figura 17-6. Exemplul 2.

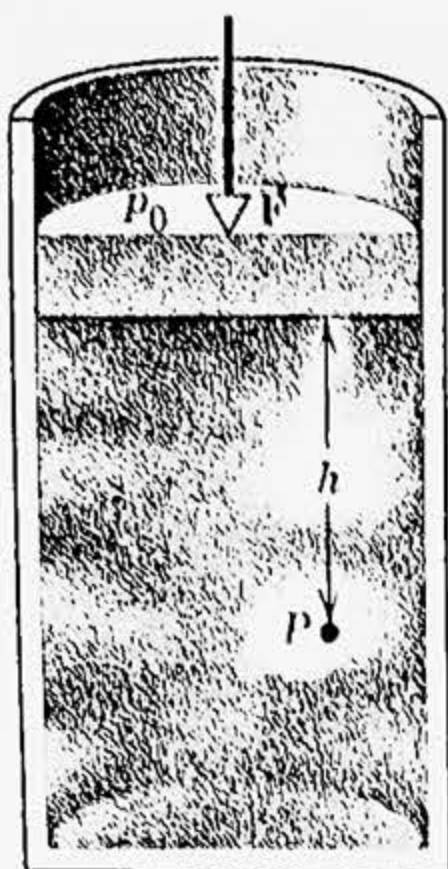


Figura 17-7. Un fluid aflat într-un cilindru acoperit cu un piston mobil. Presiunea în fiecare punct P se datorește nu numai greutății fluidului de deasupra nivelului lui P , ci și forței exercitate de către piston.

practic incompresibile, densitatea ρ din ecuațiile precedente rămâne practic constantă în timpul procesului. Ecuația arată că, în aceste condiții, variația de presiune Δp în fiecare punct arbitrar P este egală cu Δp_0 . Acest rezultat a fost formulat de către savantul francez Blaise Pascal (1623—1662) și se numește *principiul lui Pascal*. El este formulat de obicei astfel: Presiunea aplicată unui fluid închis se transmite cu aceeași intensitate pînă la fiecare porțiune de fluid și pînă la pereții vasului respectiv. Acest rezultat este o consecință necesară a legilor mecanicii fluidelor și de fapt nu un principiu independent.

Deși noi presupunem adesea că lichidele sînt incompresibile ele sînt de fapt ușor compresibile. Aceasta înseamnă că o variație a presiunii aplicată unei porțiuni de lichid se propagă prin lichid ca o undă cu viteza sunetului din acel lichid. După ce perturbația s-a stins și echilibrul s-a restabilit se găsește că principiul lui Pascal este valabil. Principiul este valabil și pentru gaze cu ușoare complicații de interpretare produse de variațiile mari de volum care pot avea loc atunci cînd variază presiunea exercitată asupra gazului comprimat.

Principiul lui Arhimede este de asemenea o consecință necesară a legilor staticii fluidelor. Dacă un corp este cufundat în întregime sau parțial într-un fluid (fie lichid, fie gaz) în repaus, fluidul exercită o presiune pe toate părțile suprafeței corpului în contact cu fluidul. Presiunea este mai mare pe porțiunile cufundate mai adînc. Rezultanta tuturor forțelor este o forță îndreptată în sus numită forță arhimedică asupra corpului cufundat. Putem determina mărimea și direcția acestei forțe rezultante foarte simplu, după cum urmează.

Presiunea exercitată asupra fiecărei porțiuni de suprafață a corpului sigur nu depinde de materialul din care este confecționat corpul. Să presupunem atunci că corpul, sau acea parte din el care este cufundată, este înlocuit cu fluid, același ca și fluidul înconjurător. Acest fluid va suferi presiunile care au acționat asupra corpului cufundat (figura 17-8), și va fi în repaus. Prin urmare, forța rezultantă în sus asupra lui va fi egală cu greutatea sa și va acționa vertical în sus în centrul său de greutate. De aici rezultă *principiul lui Arhimede* și anume faptul că un corp cufundat în întregime sau parțial într-un fluid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea fluidului dislocuit de corp. Am văzut că forța acționează vertical în sus în centrul de greutate al flu-

dului înainte de a-l dislocui. Punctul co-
respunzător din corpul cufundat se
cheamă *centru* de presiune.

Exemplul 3. Ce fracțiune din volumul
total al unui iceberg iese deasupra apei? Den-
sitatea gheței este $\rho_{gh}=0,92 \text{ g/cm}^3$ și densitatea
apei marine este $\rho_a=1,03 \text{ g/cm}^3$. Greutatea ice-
bergului este

$$G_i = \rho_{gh} V_i g,$$

unde V_i este volumul icebergului; greutatea vo-
lumului V_a de apă marină dislocuit este forța
arhimedică

$$F_A = \rho_a V_a g.$$

Dar F_A este egală cu G_i , deoarece icebergul este
în echilibru, astfel încît

$$\rho_a V_a g = \rho_{gh} V_i g$$

și

$$\frac{V_a}{V_i} = \frac{\rho_{gh}}{\rho_a} = \frac{0,92}{1,03} = 89\%.$$

Volumul de apă dislocuit V_a este egal cu volumul porțiunii cufundate a iceber-
gului, astfel încît 11% din iceberg se află afară.

17-5. Măsurarea presiunii

Evangelista Torricelli (1608—1647) a propus o metodă de măsurare
a presiunii atmosferice prin inventarea barometrului cu mercur în 1643.
Barometrul cu mercur este un tub lung de sticlă care a fost umplut cu
mercur și apoi răsturnat într-o cuvă cu mercur, ca în figura 17-9. Spa-
țiul aflat deasupra coloanei de mercur conține numai vapori de mercur
a căror presiune este așa de mică la temperaturi obișnuite încît poate
fi neglijată. Se poate arăta ușor (vezi ecuația 17-3) că presiunea at-
mosferică p_0 este

$$p_0 = \rho g h.$$

Majoritatea aparatelor pentru măsurarea presiunii (manometrele)
folosesc presiunea atmosferică ca nivel de referință și măsoară diferența
dintre presiunea existentă și presiunea atmosferică, numită presiune

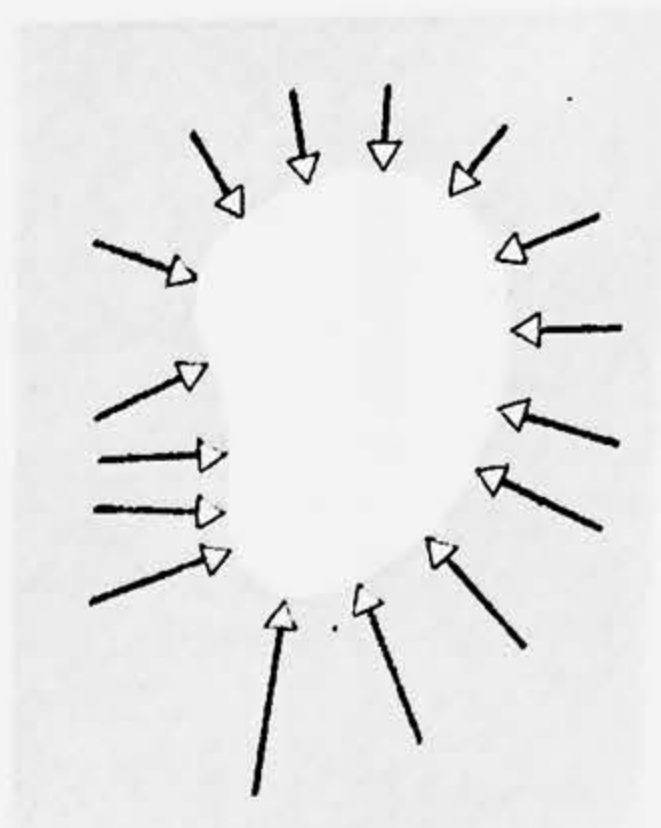


Figura 17-8. Principiul lui
Arhimede.

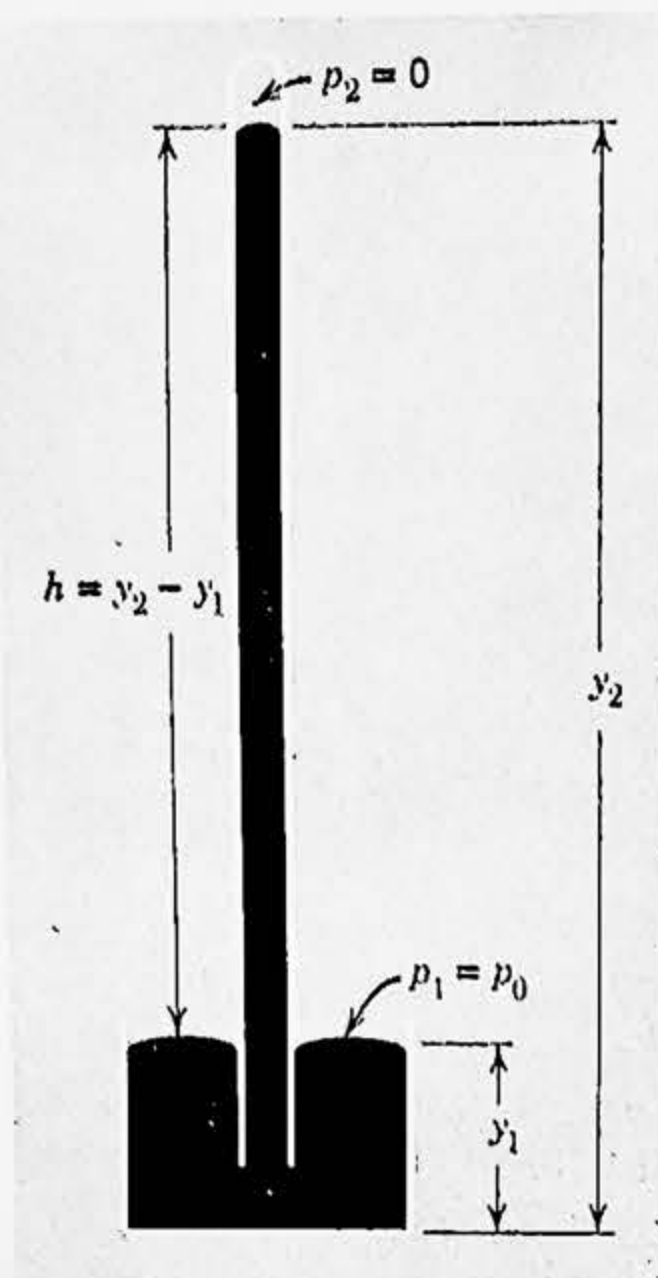


Figura 17-9. Barometrul lui Torricelli.

manometrică (diferențială). Presiunea reală într-un punct dintr-un fluid se numește *presiune absolută*. Presiunea relativă (manometrică) se dă fie peste, fie sub presiunea atmosferică. Un manometru care măsoară presiuni sub presiunea atmosferică se numește de obicei manometru de vid.

Presiunea atmosferică în fiecare punct este numeric egală cu greutatea unei coloane de aer cu aria secțiunii transversale egală cu unitatea, întinsă de la acel punct până la extremitatea superioară a atmosferei. Presiunea atmosferică într-un punct descrește deci cu altitudinea. Există variații ale presiunii atmosferice de la o zi la alta, deoarece atmosfera nu este statică. Coloana de mercur din barometru va avea o înălțime de aproximativ 76 cm la nivelul mării, variind cu presiunea atmosferică. O presiune echivalentă cu cea exercitată exact de 76 cm de mercur la 0°C în câmp gravitațional normal (standard), $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$, se numește o *atmosferă* (1 atm). Densitatea mercurului la această temperatură este $13,5950 \text{ g/cm}^3$. Prin urmare o atmosferă este echivalentă cu

$$1 \text{ atm} = (13,5951 \text{ g/cm}^3) (980,665 \text{ cm/s}^2) \cdot 76,00 \text{ cm} = \\ = 101\,325 \text{ N/m}^2 \cong 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Presiunile sînt adesea indicate specificînd înălțimea unei coloane de mercur, aflată la 0°C într-un câmp gravitațional normal, care exercită aceeași presiune. De aici originea expresiei „centimetri coloană, de mercur (cm·Hg)”. Presiunea este însă raportul dintre forță și arie și nu o lungime.

Torricelli a fost succesorul lui Galilei ca profesor de matematică la Academia din Florența. El și-a descris experiențele cu barometrul cu mercur în două scrisori din 1644 către prietenul său M. A. Ricci din Roma. În aceste scrisori el spune că scopul investigațiilor sale era „nu numai de a produce un vid, ci de a crea un instrument care să arate schimbările aerului, cînd mai greu și mai dens, cînd mai ușor și mai fin”. Auzind de experiențele italianului, Blaise Pascal, în Franța a raționat că dacă coloana de mercur era ținută pur și simplu de presiunea aerului, atunci coloana ar trebui să fie mai scurtă la o altitudine mai înaltă. El a încercat aceasta pe clopotnița unei biserici din Paris, dar dorind rezultate mai decisive, a scris cumnatului său să încerce experiența pe Puy de Dôme, un munte înalt din Auvergne. S-a constatat o diferență de 7,5 cm în înălțimea mercurului „ceea ce ne-a încîntat prin admirație și uimire”. Pascal a construit el însuși un barometru folosind vin roșu și un tub de sticlă lung de 13,8 m.

Semnificația principală a acestor experiențe din acel timp era concepția pe care o aveau că poate fi creat un spațiu vid. Aristotel credea că nu poate exista vid și un scriitor de mai târziu ca Descartes, era de aceeași concepție. Timp de două mii de ani filozofii vorbeau de oroarea pe care natura o are pentru spațiul vid: *horror vacui*. Datorită acestei orori se spunea că natura previne formarea unui vid apucând orice substanță învecinată și umplând cu ea instantaneu orice spațiu vidat. Prin urmare mercurul sau vidul ar umple tubul răsturnat datorită faptului că „natura are oroare de vid”. Experiențele lui Torricelli și Pascal au arătat că există limitări în capacitatea naturii de a preveni un vid. Ei au provocat senzație la acea vreme. Intenția de a produce vid a devenit o realitate practică prin dezvoltarea pompelor de către Otto von Guericke în Germania în jurul anului 1650 și de către Robert Boyle în Anglia în jurul anului 1660. Deși aceste pompe erau relativ primitive, ele constituiau totuși un instrument pentru experimentări. Cu o pompă și un balon de sticlă se putea crea un spațiu experimental în care să se studieze modul în care sînt afectate proprietățile căldurii, luminii, sunetului și mai târziu a electricității și magnetismului, de o atmosferă tot mai rarefiată. Deși chiar astăzi noi nu putem evacua complet orice urmă de gaz dintr-un vas închis, acești experimenatori din secolul al XVII-lea au eliberat știința de gogorița *horror vacui* și au stimulat eforturile pentru crearea sistemelor cu vid înalt.

Cu excepția telescopului, nici o altă descoperire științifică din secolul al XVII-lea nu a trezit curiozitatea și dorința de cunoaștere în așa măsură cum au făcut-o experiențele cu barometrul și cu pompa de aer.

Manometrul în U cu un capăt deschis (figura 17-10) măsoară diferențele de presiune. El constă dintr-un tub în formă de U conținând un lichid, un capăt al tubului fiind deschis în atmosferă, iar celălalt capăt fiind legat la sistemul (vasul) în care vrem să măsurăm presiunea p . Din ecuația (17-4) obținem

$$p - p_0 = \rho gh.$$

Astfel, diferența de presiune $p - p_0$ este proporțională cu diferența de înălțime a coloanelor de lichid din tubul U. Dacă vasul conține gaz cu presiune mare, se folosește un tub cu un lichid dens cum este mercurul; dacă este vorba de presiuni de gaz joase se poate folosi apa.

Exemplul 4. Un manometru în U cu mercur, cu capătul deschis (fig. 17-10) este legat la un vas cu gaz. Mercurul este cu 39,0 cm mai sus în ramura dreaptă decît în ramura stîngă, în timp ce un barometru de alături indică o presiune atmosferică de

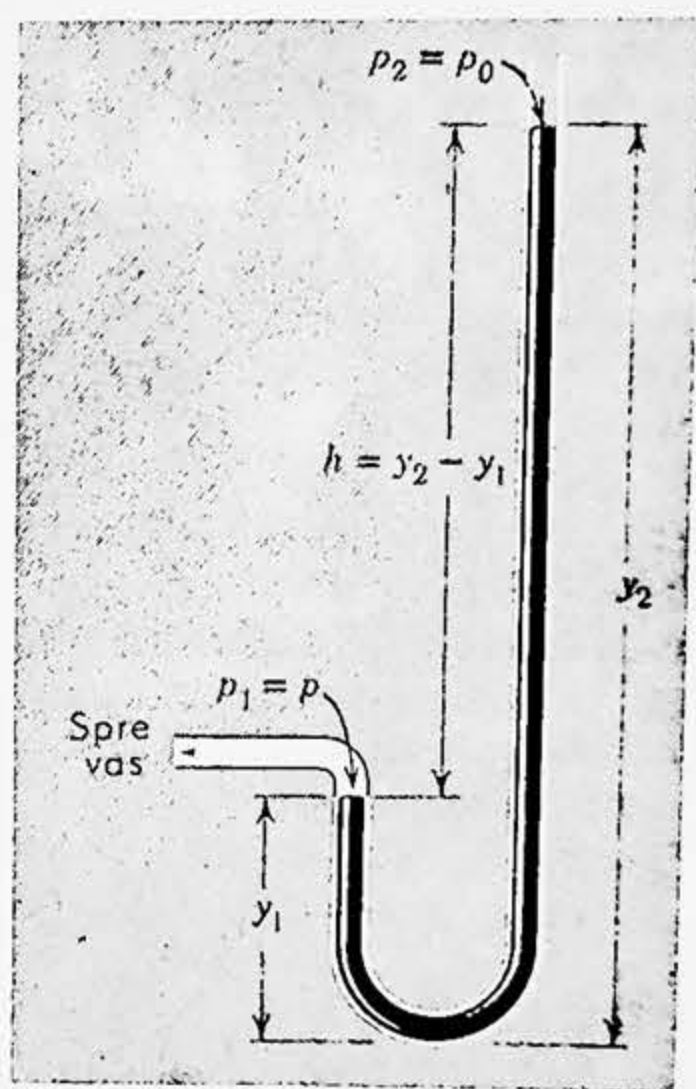


Figura 17-10. Manometrul cu capăt deschis, folosit pentru măsurarea presiunii dintr-un vas.

75,0 cm-Hg. Care este presiunea absolută a gazului? Să se exprime răspunsul în torri, atm și N/m^2 .

Presiunea gazului este presiunea de deasupra coloanei de mercur din stînga. Această presiune este egală cu presiunea de la același nivel orizontal din coloana din dreapta. Presiunea la acest din urmă nivel este egală cu presiunea atmosferică (75,0 cm-Hg) plus presiunea exercitată de coloana suplimentară de 39,0 cm de mercur sau (considerînd valori normale pentru densitatea mercurului și pentru gravitație) în total 114 cm-Hg. Prin urmare presiunea absolută a gazului este

$$1140 \text{ torr} = \frac{1140}{760} \text{ atm} = 1,50 \text{ atm} = (1,50)(1,013 \cdot 10^5) \text{ N/m}^2 = 1,52 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Care este presiunea manometrică a gazului?

Întrebări

1. (a) Două corpuri (de exemplu, bile) au aceeași formă și dimensiune dar unul este mai dens decît celălalt. Presupunînd că rezistența aerului este aceeași pentru fiecare corp, să se arate că dacă aceste corpuri sînt lăsate liber simultan de la aceeași înălțime, corpul mai greu va ajunge primul pe sol. (b) Două corpuri (de exemplu, picături de ploaie) au aceeași formă și densitate dar unul este mai mare decît celălalt. Presupunînd că rezistența aerului este proporțională cu viteza corpului prin aer, care corp va cădea mai repede?

2. În fiecare din cele trei vase arătate (fig. 17-11), toate avînd aceeași arie a bazei, se toarnă apă pînă la același nivel. Dacă presiunea este aceeași pe suprafața superioară a fiecărui vas, forța exercitată pe baza fiecărui vas este aceeași. De ce atunci cele trei

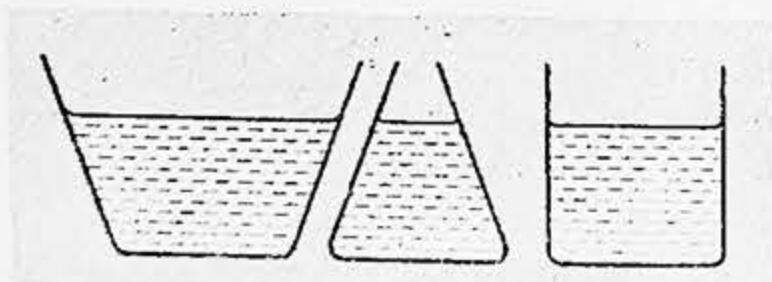


Figura 17-11.

vase au greutate diferite dacă sînt puse pe o balanță? Acest rezultat aparent contradictoriu este cunoscut de obicei sub numele de „paradoxul hidrostatic”.

3. Poate un alpinist să urce suficient de sus astfel încît presiunea atmosferică să se reducă la jumătate din valoarea sa de la nivelul mării?

4. (a) Un cub de gheață plutește într-un pahar cu apă. Cînd gheața se topește, va crește nivelul apei? Să se explice. (b) Dacă cubul de gheață conține un corp de plumb, nivelul apei va scădea atunci cînd se topește gheața? Să se explice.

5. Este valabilă legea lui Arhimede într-un vas în cădere liberă? Într-un satelit care se mișcă pe o orbită circulară? Să se explice.

6. O bilă sferică confecționată din plută plutește pe jumătate cufundată într-o cană cu ceai în repaus pe sol. Se va ridica sau se va scufunda ea la bordul unei nave cosmice care navighează în spațiul cosmic? Pe suprafața lui Jupiter?

7. Două corpuri de greutate și volume egale și avînd aceeași formă cu excepția faptului că unul are o deschidere la partea inferioară, iar celăl-

lalt este închis ermetic, sînt cufundate la aceeași adîncime în apă. Este lucrul mecanic necesar pentru a cufunda un corp, mai mic într-un caz decît în celălalt? Dacă este așa, pentru care corp și de ce?

8. O minge plutește pe suprafața apei dintr-un vas deschis în atmosferă. Va rămîne mingea scufundată la aceeași adîncime, se va scufunda sau va urca dacă: (a) vasul este acoperit și aerul evacuat, (b) vasul este acoperit și aerul este comprimat?

9. Să se explice de ce un balon umflat va urca pînă la o anumită înălțime odată pornit să urce, în timp ce un submarin se va scufunda totdeauna spre fundul oceanului odată pornit să se scufunde, dacă nu se produc nici un fel de schimbări. Cum poate atunci să stea un submarin la un anumit nivel sub apă?

10. O pungă mare de plastic cîntărește la fel cînd este goală sau umplută cu aer la presiunea atmosferică. De ce? Vor fi greutatea aceleași dacă sînt măsurate în vid?

11. Un cargobot, care are o spărtură și abia poate pluti, la limită pe Marea Nordului, se îndreaptă prin estuarul Tamisei către docurile din Londra. El se va scufunda pînă să ajungă la sosire. De ce?

12. Este adevărat că un obiect care plutește se va afla în echilibru stabil dacă centrul său de presiune se află deasupra centrului său de greutate? Să se illustreze prin exemple.

13. Foarte des un vapor care se scufundă se răstoarnă după scufundarea în apă. De ce?

14. Un șlep încărcat cu blocuri de fier se află într-o ecluză de canal. Dacă se aruncă fierul peste bord, ce se va întîmpla cu nivelul apei din ecluză?

15. O găleată de apă este suspendată de un dinamometru. Se va schimba indicația dinamometrului dacă o bucată de fier suspendată de un fir

este cufundată în apă? Dacă o bucată de plută este pusă pe apă?

16. Să se explice de ce o tijă uniformă de lemn care plutește în poziție orizontală dacă nu este încărcată, va pluti vertical dacă se adaugă un corp cu o greutate suficientă la un capăt. Vezi problema 8.

17. Un cilindru plin este așezat într-un balon în contact cu baza. Cînd se toarnă lichid în balon, lichidul nu pătrunde pe sub cilindru, care rămîne în contact strîns cu baza. Se exercită vreo forță arhimedică asupra cilindrului? Să se explice.

18. Să se evalueze cu atenție forța arhimedică exercitată de atmosferă asupra unui om.

19. Un manometru în U cu capătul deschis are o ramură cu diametrul dublu față de cealaltă ramură. Să se explice cum va afecta aceasta funcționarea manometrului. Contează care ramură este legată la camera în care vrem să măsurăm presiunea?

20. O căldare deschisă și plină cu apă se află pe un plan înclinat neted sub un unghi α față de orizontală. Să se afle înclinarea la echilibru față de orizontală a suprafeței libere a apei dacă: (a) căldarea este ținută în repaus; $a=0$ și $v=0$; (b) căldarea este lăsată să alunece în jos cu viteză constantă, $a=0$, $v=\text{const}$; (c) căldarea alunecă în jos fără restricții; $a=\text{const}$. Dacă planul este curbat astfel încît $a \neq \text{const}$, ce se va întîmpla?

21. Dacă un tub de formă de U conținînd apă este rotit în jurul unei axe verticale care trece prin centrul unei ramuri, nivelul apei va coborî într-o ramură și va urca în cealaltă ramură în comparație cu nivelul de repaus. Să se explice cu grijă cele întîmplate. Vezi problema 22.

22. Să se explice cum se face că presiunea este o mărime scalară, deși forțele pe care le poate produce ea sînt vectori?

Probleme

1. (a) Să se afle presiunea la adâncimea de 1500 m sub nivelul mării. Densitatea relativă a apei marine este 1,03. (b) Să se afle presiunea în atmosferă la 16 km deasupra nivelului mării.

2. Un tub simplu în formă de U conține mercur. Dacă se toarnă apă în ramura din dreapta astfel încât nivelul se ridică cu 13,6 cm, cu cât va urca mercurul în ramura din stînga peste nivelul său inițial?

3. În 1654 Otto von Guericke, primarul orașului Magdeburg și inventator al pompei de aer, a făcut o demonstrație în fața Dietei Imperiale în care două grupe a câte opt cai nu au putut desface două emisfere de alamă vidate. (a) Să se arate că forța F necesară pentru a separa emisferele este $F = \pi R^2 P$ unde R este raza exterioară a emisferelor, iar P este diferența de presiune din exteriorul și interiorul sferei (fig. 17-12). (b) Luînd R egal cu 0,30 m și presiunea interioară 0,1 atm, ce forță ar trebui să exercite fiecare grup de cai pentru a separa emisferele? (c) De ce erau folosite două grupe de cai? Nu putea dovedi un singur grup tot atît de bine?

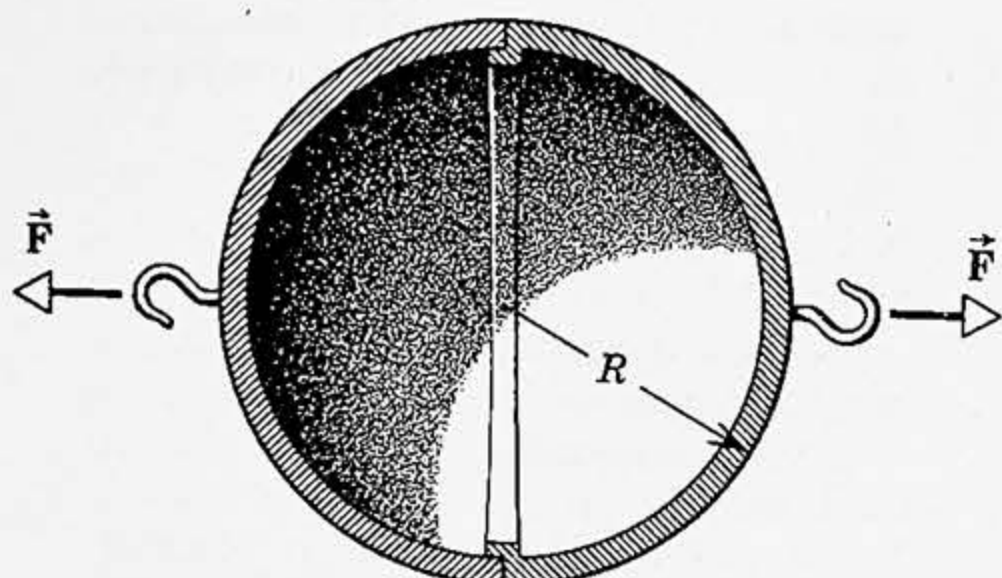


Figura 17-12.

4. Înălțimea la care presiunea atmosferică este egală cu $1/e$ din presiunea la nivelul mării, se numește înălțime echivalentă sau efectivă a

atmosferei la nivelul mării. (a) Să se arate că înălțimea efectivă H la nivelul mării este egală de asemenea cu înălțimea unei atmosfere care are aceeași densitate peste tot ca la nivelul mării și care exercită aceeași presiune la nivelul mării ca și atmosfera infinită reală. (b) Să se arate că înălțimea efectivă la nivelul mării este de 8,6 km.

5. Adâncimea apei în spatele unui dig este D , ca în figura 17-13. Fie L lățimea digului. (a) Să se afle forța rezultantă exercitată asupra digului de către apă și momentul exercitat în jurul lui O de către această forță. (b) Care este linia de acțiune a forței rezultante echivalente?

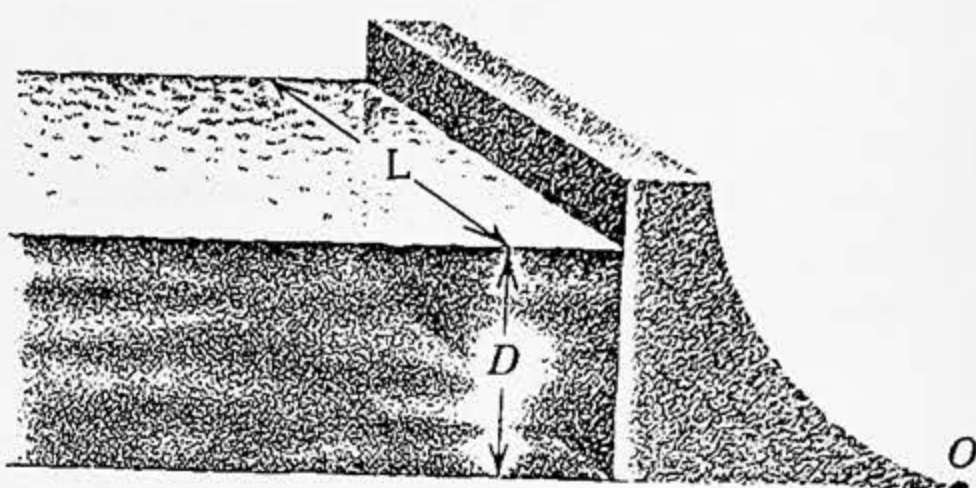


Figura 17-13.

6. Un bazin de înot are dimensiunile $25 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$. Dacă el este umplut cu apă, care este forța exercitată asupra fundului bazinului? Asupra pereților laterali? Asupra pereților de la capete?

7. Un tub în formă de U este umplut cu un lichid omogen. Lichidul este temporar împins în jos într-o ramură cu ajutorul unui piston. Pistonul este îndepărtat și nivelul lichidului oscilează în fiecare ramură. Să se arate că perioada oscilațiilor este $\pi \sqrt{2L/g}$, unde L este lungimea totală a lichidului din tub.

8. O tijă cilindrică de lemn este încărcată cu plumb la un capăt astfel

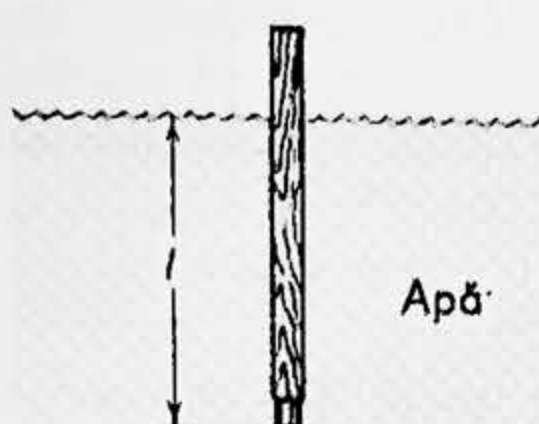


Figura 17-14.

încît ea plutește vertical în apă ca în figura 17-14. Lungimea porțiunii cufundate este $l=2,4$ m. Tijă este pusă să oscileze pe direcție verticală. (a) Să se arate că oscilațiile sînt armonice simple. (b) Să se afle perioada. Se va neglija faptul că apa are un efect de frinare asupra mișcării.

9. Două vase cilindrice identice avînd bazele la același nivel, conțin fiecare un lichid de densitate ρ . Aria fiecărei baze este A , dar într-un vas lichidul are înălțimea h_1 , iar în celălalt h_2 . Să se afle lucrul mecanic efectuat de gravitație pentru a egala nivelele atunci cînd cele două vase sînt conectate între ele.

10. Suprafața de contact a două fluide de densități diferite, care sînt în repaus și nu sînt miscibile, este orizontală. Să se dovedească acest rezultat general: (a) din faptul că energia potențială a unui sistem trebuie să fie minimă la echilibrul stabil; (b) din faptul că în oricare două puncte din același plan orizontal în fiecare fluid presiunile trebuie să fie egale.

11. Un piston de arie transversală mică a este folosit într-o presă hidraulică pentru a exercita o forță mică f asupra lichidului închis acolo. Un tub de legătură duce către un piston mai mare de arie transversală A (fig. 17-15). (a) Ce forță F va suporta pistonul mai mare? (b) Dacă pistonul mic are un diametru de 3,8 cm, iar pistonul mare un diametru de 53,3 cm, ce greutate

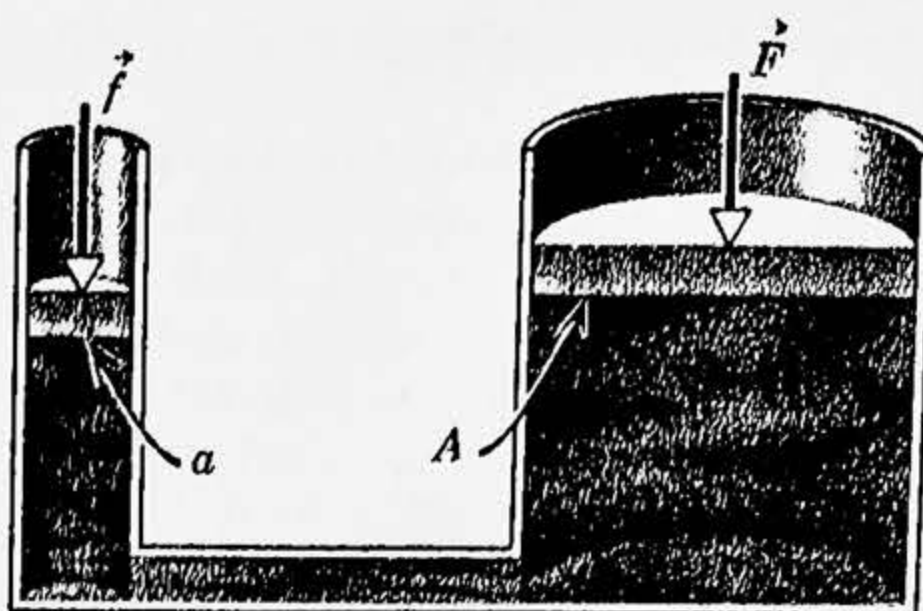


Figura 17-15.

de pe pistonul mic va ține în echilibru 2,0 tone de pe pistonul mare?

12. Care este aria minimă a unui bloc de gheață de 0,30 m grosime care plutește pe apă și care este în stare să țină un automobil cîntărind 1,2 t? Are importanță locul unde este plasat automobilul pe blocul de gheață?

13. Un bloc de oțel are greutatea de 271 N în aer și 181 N în apă. Care este volumul cavităților din blocul de oțel?

14. O pătură sferică de oțel plutește, fiind aproape complet cufundată în apă. Dacă diametrul exterior este de 0,60 m și densitatea relativă a fierului 7,8, să se afle diametrul din interior.

15. Un bloc de lemn plutește în apă avînd cufundat două treimi din volumul său. În ulei el are cufundat 0,90 din volum. Să se afle densitatea lemnului și a uleiului.

16. Un bloc de lemn cîntărește 4,0 kg și are o densitate relativă de 0,60. El trebuie încărcat cu plumb astfel încît să plutească în apă avînd cufundat 0,90 din volumul său. Ce greutate de plumb este necesară: (a) dacă plumbul este pus deasupra lemnului? (b) Dacă plumbul este fixat sub lemn?

17. Un cub plutind pe mercur are cufundat un sfert din volumul său. Dacă se adaugă apă suficientă pentru a acoperi cubul, ce fracțiune din volumul său va rămîne cufundată în

mercur? Depinde răspunsul de forma corpului?

18. O bară uniformă lungă de lemn, cu secțiunea transversală pătrată, pluteste pe apă fie cu cele două fețe opuse paralele cu suprafața apei, fie cu toate cele patru fețe sub 45° față de nivelul apei. Care din aceste poziții are loc pentru densitățile de 0,20, 0,50 și 0,80 g/cm³?

19. Să presupunem că densitatea greutateilor de alamă este de 8,0 g/cm³, iar densitatea aerului de 1,2 kg/m³. Ce eroare (în procente) provine din neglijarea forței arhimedice datorită aerului atunci când cântărim un obiect de masă m și de densitatea relativă ρ pe o balanță cu pîrghie?

20. (a) Să considerăm un vas conținând un fluid supus unei accelerații a îndreptată vertical în sus. Să se arate că variația presiunii cu adîncimea din fluid este dată de

$$p = \rho h(g + a),$$

unde h este adîncimea, iar ρ densitatea. (b) Să se arate de asemenea că dacă fluidul, ca un întreg, suferă o accelerație a vertical în jos, presiunea la o adîncime h este dată de

$$p = \rho h(g - a).$$

(c) Care este situația în cădere liberă?

21. (a) Să considerăm accelerația orizontală a unei mase de lichid într-un vas deschis. Accelerația de acest fel face ca suprafața lichidului să coboare în fața vasului și să urce în spatele vasului. Să se arate că suprafața lichidului formează un unghi θ cu orizontala, unde $\tan \theta = a/g$, a fiind accelerația orizontală. (b) Cum variază presiunea cu adîncimea?

22. (a) O masă de fluid se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul axei verticale centrale a unui vas cilindric. Să se arate că variația presiunii în direcția radială este dată de

$$dp/dr = \rho \omega^2 r.$$

(b) Luînd $p = p_0$ pe axa de rotație ($r = 0$), să se arate că presiunea p într-un punct r este

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2.$$

(c) Să se arate că suprafața lichidului este de forma unui paraboloid (fig. 17-16), adică o secțiune verticală a suprafeței este parabola $y = \omega^2 r^2 / 2g$.

(d) Să se arate că variația presiunii cu adîncimea este $dp = \rho g dh$.

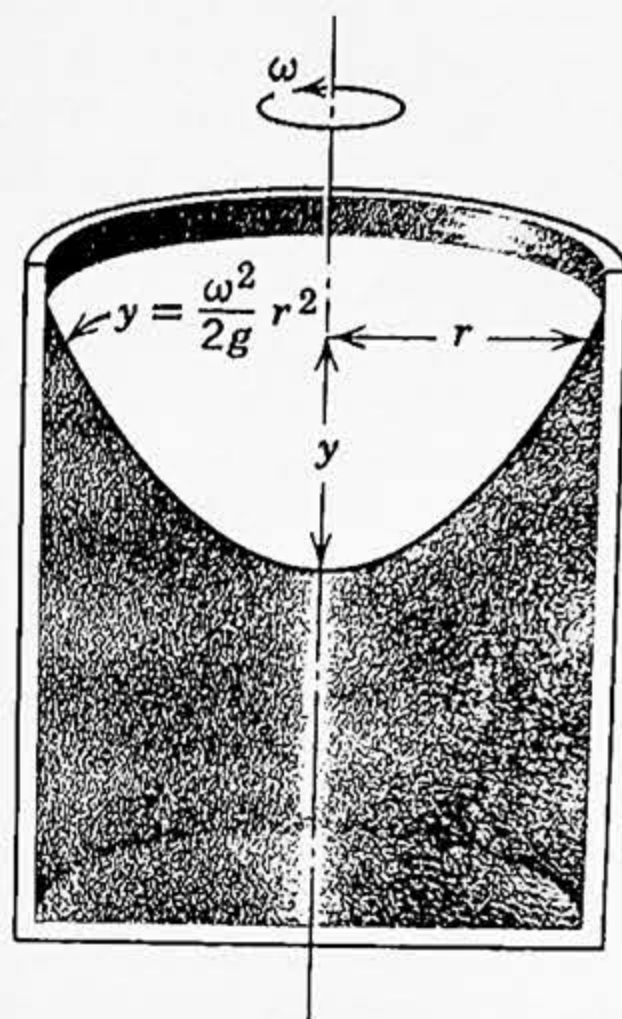


Figura 17-16.

Dinamica fluidelor

18-1. Conceptele generale ale curgerii fluidelor

Un mod de a descrie mișcarea unui fluid este de a împărți fluidul în elemente de volum infinitezimale, pe care le putem numi particule de fluid, și de a urmări mișcarea acestor particule. Aceasta este o sarcină dificilă. Ar trebui să atribuim coordonatele x, y, z fiecărei particule de fluid și să specificăm aceste coordonate ca funcții de timpul t . Coordonatele x, y, z la momentul t , ale particulei de fluid care se afla în x_0, y_0, z_0 la momentul t_0 sunt determinate de funcțiile $x(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, $z(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ care descriu atunci mișcarea fluidului. Acest procedeu constituie o generalizare directă a conceptelor mecanicii punctului material și a fost pentru prima dată dezvoltat de către Joseph Louis Lagrange (1736—1813).

Există o tratare dezvoltată de Leonhard Euler (1707—1783), care este mai convenabilă pentru majoritatea scopurilor. În această tratare renunțăm la încercarea de a specifica istoria fiecărei particule de fluid și în schimb specificăm densitatea și viteza fluidului în fiecare punct din spațiu în fiecare moment. Aceasta este metoda pe care o vom urma aici. Descriem mișcarea fluidului specificând densitatea $\rho(x, y, z, t)$ și viteza $\vec{v}(x, y, z, t)$ în punctul (x, y, z) la momentul t . Ne concentrăm astfel atenția asupra a ceea ce se întâmplă într-un anumit punct din spațiu, într-un anumit moment, în loc să urmărim ce se întâmplă cu o anumită particulă de fluid. Oricare mărime folosită în descrierea stării fluidului, de exemplu presiunea p , va avea o valoare bine definită în fiecare punct din spațiu și în fiecare moment de timp. Deși această descriere a mișcării fluidului ne concentrează atenția asupra unui punct din spațiu, în locul unei particule de fluid, nu putem evita urmărirea particulelor însele, cel puțin pentru intervale de timp foarte scurte dt . Deoarece particulele în primul rând și nu punctele din spațiu, sunt acelea cărora li se aplică legile mecanicii.

Pentru a înțelege natura simplificărilor pe care le vom face, să considerăm mai întâi câteva caracteristici generale ale curentului de fluid.

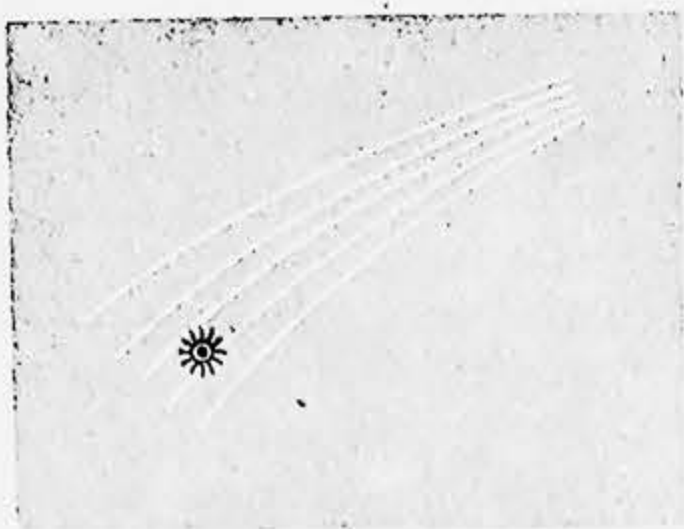


Figura 18-1. O mică roată cu palete așezată într-un lichid care curge se învîrtește în cazul curgerii rotaționale și nu se rotește în cazul curgerii irotazionale.

Curgerea fluidului poate fi *staționară* sau *nestaționară*. Dacă viteza fluidului v în fiecare punct dat este constantă în timp se spune că mișcarea fluidului este staționară. Adică, în oricare punct dat într-o curgere staționară, viteza fiecărei particule de fluid care trece pe acolo este totdeauna aceeași. Într-un alt punct particula poate trece cu o viteză diferită, dar oricare altă particulă care trece prin acest al doilea punct se comportă acolo întocmai ca aceea particulă cînd a trecut prin acel punct. Aceste condiții pot fi realizate la viteze de curgere mici; un fluid care curge domol este un exemplu. Într-o curgere nestaționară, ca într-un flux puternic al mării la gura unui râu, vitezele v

sînt funcții de timp. În cazul curgerii turbulente, ca la o cascadă sau la o cădere de apă, vitezele variază în mod neregulat de la un punct la altul și de la moment la moment.

Curgerea fluidului poate fi *rotațională* sau *irotatională*. Dacă elementul de fluid în fiecare punct nu are viteză unghiulară netă în jurul aceluia punct, curgerea fluidului este irotatională. Ne putem imagina o mică roată cu palete cufundată în fluidul care curge (figura 18-1). Dacă roata se deplasează fără să se rotească, mișcarea este irotatională; în caz contrar este rotațională. Curgerea irotatională este importantă în special din cauză că ea duce la probleme matematice destul de simple. Momentul cinetic nu va juca nici un rol aici și \vec{v} este relativ simplă. Curgerea rotațională include mișcarea în vârtejuri, cum sînt vârtejurile de apă, și mișcarea în care vectorul viteză variază pe direcția transversală.

Curgerea fluidului poate fi *compresibilă* sau *incompresibilă*. Lichidele pot fi de obicei considerate ca fiind incompresibile. Dar chiar un gaz puternic compresibil suferă uneori variații neglijabile de densitate. Curgerea sa este atunci practic incompresibilă. În zboruri cu viteze mult mai mici decît viteza sunetului în aer (descrise de aerodinamica subsonică), mișcarea aerului față de aripi este o curgere aproape incompresibilă. În astfel de cazuri densitatea ρ este o constantă independentă de x , y , z și t și tratarea matematică a curgerii fluidului este prin aceasta mult simplificată.

În sfîrșit, curgerea fluidului poate fi *viscoasă* sau *nevîscoasă*. Viscositatea în mișcarea fluidului este analogul frecării din mișcarea solidelor. În multe cazuri, ca în problemele cu lubrificație, ea este foarte importantă. Uneori însă ea este neglijabilă. Viscositatea introduce forțe tangențiale între straturile de fluid aflate în mișcare relativă și duce la o disipare a energiei mecanice

Vom restrînge discuția noastră referitoare la dinamica fluidelor în cea mai mare parte la curgerea staționară, irotațională, incompresibilă, nevîscoasă.

Simplificările matematice care rezultă din această vor fi evidente. Riscăm însă ca, făcînd atît de multe ipoteze simplificatoare, să nu mai vorbim de un fluid real.¹ Mai mult, uneori este dificil să decidem dacă o proprietate dată a unui fluid — de exemplu viscozitatea sa — poate fi neglijată într-o situație particulară. În ciuda tuturor acestor ipoteze, analiza restrînsă pe care o vom da are largi aplicații în practică, după cum vom vedea.

18-2. Linii de curent

În curgerea staționară viteza \vec{v} într-un punct dat este constantă în timp. Să considerăm punctul P (figura 18-2) în interiorul fluidului. Deoarece \vec{v} din P nu variază în timp, fiecare particulă care ajunge în P va trece prin el cu aceeași viteză și în aceeași direcție. Același lucru este adevărat pentru punctele Q și R . Prin urmare, dacă trasăm traiectoria particulei, așa cum este făcut în figură, acea curbă va fi traiectoria oricărei particule care ajunge în P . Această curbă se numește *linie de curent*. Linia de curent este paralelă cu viteza particulelor de fluid în fiecare punct. Niciodată două linii de curent nu se intersectează între ele, deoarece dacă s-ar intersecta, o particulă de fluid care ar ajunge în punctul de intersecție s-ar putea mișca fie pe o traiectorie, fie pe cealaltă, deci curgerea nu ar putea fi staționară. În curgerea

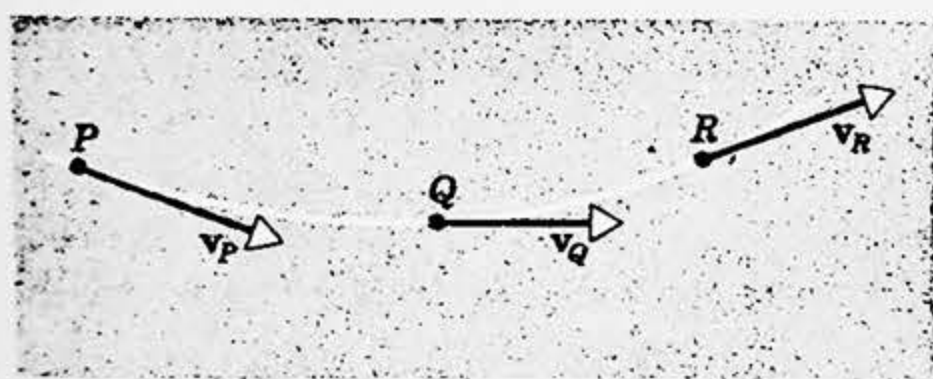


Figura 18-2. O particulă care trece prin punctele P , Q și R descrie o linie de curent, presupunînd că curgerea este staționară. Oricare altă particulă care trece prin P se va mișca de-a lungul aceleiași linii de curent în cazul curgerii staționare.

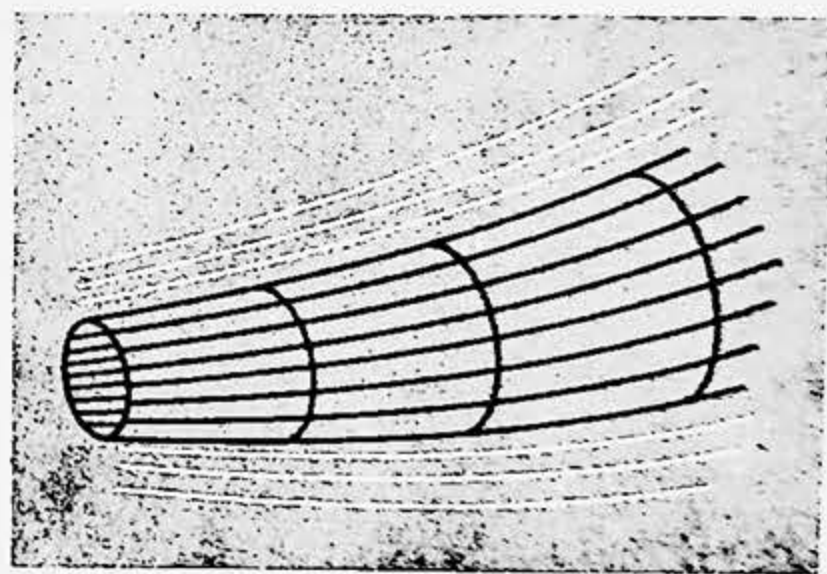


Figura 18-3. Un tub de curent format dintr-un fascicul de linii de curent.

¹ Richard Feynman a menționat că John von Neuman a numit acest fluid idealizat „apă uscată”.

staționară tabloul liniilor de curent din fluidul care curge este staționară în timp¹.

În principiu putem trasa o linie de curent prin orice punct din fluid. Să presupunem o curgere staționară și să trasăm un număr finit de linii de curent pentru a forma un fascicul asemănător tabloului de linii de curent din figura 18-3. Această regiune tubulară se numește *tub de curent*. Frontiera unui astfel de tub constă din linii de curent și este totdeauna paralelă cu viteza particulelor de fluid. Prin urmare, *fluidul nu poate traversa frontierele unui tub de curent* și tubul de curent se comportă ca un fel de țeavă (conductă) de aceeași formă. Fluidul care intră la un capăt trebuie să iasă prin celălalt capăt.

18-3. Ecuația de continuitate

În figura 18-4 am desenat un tub subțire de curent. Viteza fluidului din interior, deși paralelă cu tubul în orice punct, poate avea valori diferite în puncte diferite. Fie v_1 viteza particulelor de fluid în P și v_2 viteza particulelor de fluid în Q . Fie A_1 și A_2 ariile secțiunilor transversale ale tubului în punctele P și respectiv în Q . În intervalul de timp Δt , un element de fluid parcurge aproximativ distanța $v\Delta t$. Atunci masa de fluid Δm_1 care traversează aria A_1 în intervalul de timp Δt este aproximativ

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

sau debitul masic $\Delta m_1 / \Delta t$ este aproximativ $\rho_1 A_1 v_1$. Trebuie să luăm pe Δt suficient de mic astfel încât în acest interval de timp nici v nici A să nu varieze apreciabil pe distanța pe care o parcurge fluidul. La limită când $\Delta t \rightarrow 0$, obținem definițiile precise:

debitul masic în $P = \rho_1 A_1 v_1$, și debitul masic în $Q = \rho_2 A_2 v_2$,

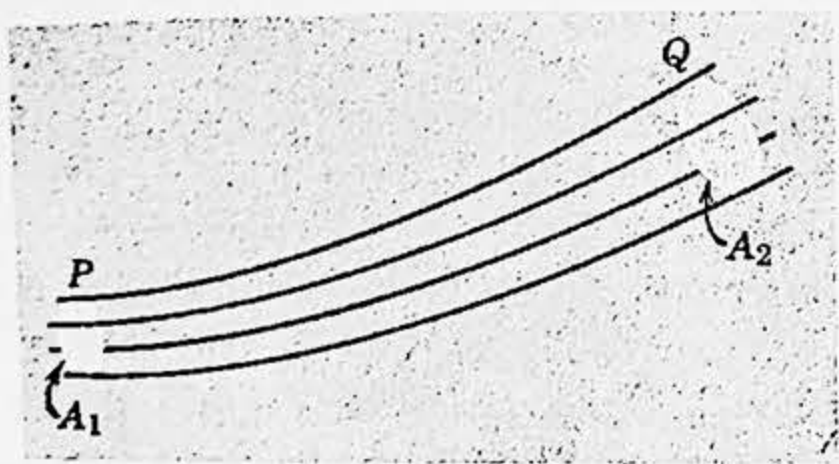


Figura 18-4. Un tub de curent folosit pentru demonstrarea ecuației de continuitate.

¹ Familia de linii de curent dintr-un fluid se desenează astfel încât în orice punct din fluid direcția vitezei instantanee \vec{v} a particulei de fluid din acest punct este tangentă la linia de curent din acel punct. În curgerea nestaționară tabloul liniilor de curent din fluid variază în timp și traiectoria unei particule individuale de fluid, prin fluid, nu coincide cu o linie de curent în acel moment dat. Linia de curent și linia de mișcare a particulei se ating între ele în punctul în care se află particula în momentul considerat. Traiectoria sau linia de mișcare și linia de curent coincid numai pentru curgerea staționară.

unde ρ_1 și ρ_2 sînt densitățile fluidului în P , respectiv Q . Deoarece fluidul nu poate trece prin pereții tubului și nu există „izvoare” sau „puțuri” (izvoare „negative”) care să creeze sau să distrugă fluid în tub, masa care traversează fiecare secțiune a tubului în unitatea de timp trebuie să fie aceeași. În particular, debitul masic din P trebuie să fie egal cu cel din Q :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

sau

$$\rho A v = \text{const.} \quad (18-1)$$

Acest rezultat (ecuația 18-1) exprimă legea conservării masei în dinamica fluidelor.

Vă așteptați ca ecuația (18-1) să fie valabilă dacă curgerea este vîscoasă? Dacă este rotațională?

În cazul general în care există surse și în care densitatea variază atît cu timpul, cît și cu poziția, masa trebuie încă să se conserve și putem scrie (fără demonstrație) *ecuația continuității* care exprimă acest fapt. Ea este

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = S \quad (18-2)$$

în care v_x , v_y și v_z sînt componentele vitezei fluidului; la fel ca și densitatea ρ , ele pot varia atît cu poziția cît și cu timpul¹.

Să considerăm un element de volum mic într-un astfel de fluid. Se poate arăta că:

1. Suma primilor trei termeni din ecuația (18-2) dă debitul masic net spre exterior, pe unitatea de volum, din elementul de volum.

2. Termenul al patrulea dă „viteza” (pe unitatea de volum) cu care se acumulează masa în interiorul elementului de volum.

3. Ultimul termen, S , dă „viteza” (pe unitatea de volum) cu care masa este introdusă în elementul de volum de către o „sursă” (dacă S este pozitiv) sau dispare din elementul de volum într-un „puț” (dacă S este negativ).

Este clar că, cu aceste interpretări ale termenilor săi, ecuația (18-2) reprezintă formularea conservării masei pentru curgerea fluidului. Este această ecuație corectă din punct de vedere dimensional?

Dacă $S=0$ în ecuația (18-2) atunci nu există surse (pozitive sau negative). Dacă suma primilor trei termeni este negativă, există un *aflux* net de masă spre elementul de volum. În modul acesta, masa conținută în elementul de volum trebuie să crească cu timpul pe măsură ce fluidul este „îngrămădit sau pătrunde înăuntru”. Aceasta este în concordanță cu ecuația (18-2) deoarece, în condițiile formulate, $\partial \rho / \partial t$ trebuie să fie pozitiv, ceea ce înseamnă că densitatea fluidului (și deci masa fluidului) din elementul de volum crește în timp.

¹ Deoarece aceste patru mărimi sînt funcții de mai mult decît o variabilă, am scris derivatele din ecuația (18-2) ca derivate parțiale. Vezi de exemplu *Mecanica fizică*, paragraful 12-3 de R. B. Lindsay, D. Van Nostrand Company, 1961, pentru o deducere a ecuației (18-2).

Dacă fluidul este incompresibil, așa cum vom presupune de acum înainte, $\rho_1 = \rho_2$ și ecuația (18-1) ia forma mai simplă

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

sau

$$Av = \text{const.} \quad (18-3)$$

Produsul Av dă *debitul volumic* sau viteza de flux, așa cum este adesea numit. Observăm că acesta prezice faptul că într-o curgere incompresibilă staționară viteza fluidului variază invers proporțional cu aria secțiunii transversale, fiind mai mare în porțiunile mai înguste ale tubului. Faptul că produsul Av rămâne constant de-a lungul unui tub de curent ne permite să interpretăm într-un anumit mod tabloul liniilor de curent. Într-o porțiune îngustă a tubului liniile de curent trebuie să fie mai dese decât într-o porțiune mai largă. Prin urmare, pe măsură ce distanța dintre liniile de curent descrește, viteza fluidului trebuie să crească. De aceea, tragem concluzia că liniile de curent rare indică regiunile de viteză mică, iar liniile de curent dese indică regiunile de viteză mare.

Putem obține un alt rezultat interesant aplicând legea a doua a mișcării curgerii fluidului între P și Q (figura 18-4). O particulă de fluid care în P are viteză v_1 trebuie să fie decelerată în direcția înaintării atunci când capătă o viteză de înaintare mai mică v_2 în Q . Prin urmare, fluidul este decelerat atunci când trece de la P la Q . Decelerația poate proveni de la o diferență de presiune care acționează asupra particulei de fluid care curge de la P la Q sau se poate datora acțiunii gravitației. Într-un tub orizontal forța gravitațională nu variază. În consecință putem trage concluzia că într-o curgere orizontală staționară presiunea este mai mare acolo unde viteza este mai mică.

Ați fost vreodată într-o mulțime de oameni care se înghesuie să treacă printr-o ușă mică deschisă? Mai la o parte, în spatele mulțimii, aria secțiunii transversale este mare, presiunea este mare, dar viteza de avansare destul de mică. Prin ușa de secțiune mică presiunea este mai slabă și viteza de avansare mărită. Acest „fluid uman” particular este compresibil și viscos, desigur, și curgerea este uneori turbulentă și rotațională.

18-4. Ecuația lui Bernoulli

Ecuația lui Bernoulli este o relație fundamentală în mecanica fluidelor. Ca toate ecuațiile din mecanica fluidelor ea nu constituie un principiu nou ci derivă din legile fundamentale ale mecanicii lui Newton. Este convenabil să deducem această ecuație din teorema energiei cinetice (vezi secțiunea 7-4), deoarece ea reprezintă în esență o formulare a teoremei energiei cinetice pentru curgerea fluidelor.

Să considerăm curgerea nevîscoasă, staționară, incompresibilă a unui fluid printr-o conductă (țeavă) sau tub de curent ca în figura 18-5. Porțiunea de conductă arătată în figură are o secțiune transversală uniformă A_1 la stînga. Acolo ea este orizontală și se află la o înălțime y_1 deasupra unui anumit nivel de referință. Ea se lărgeste treptat și urcă

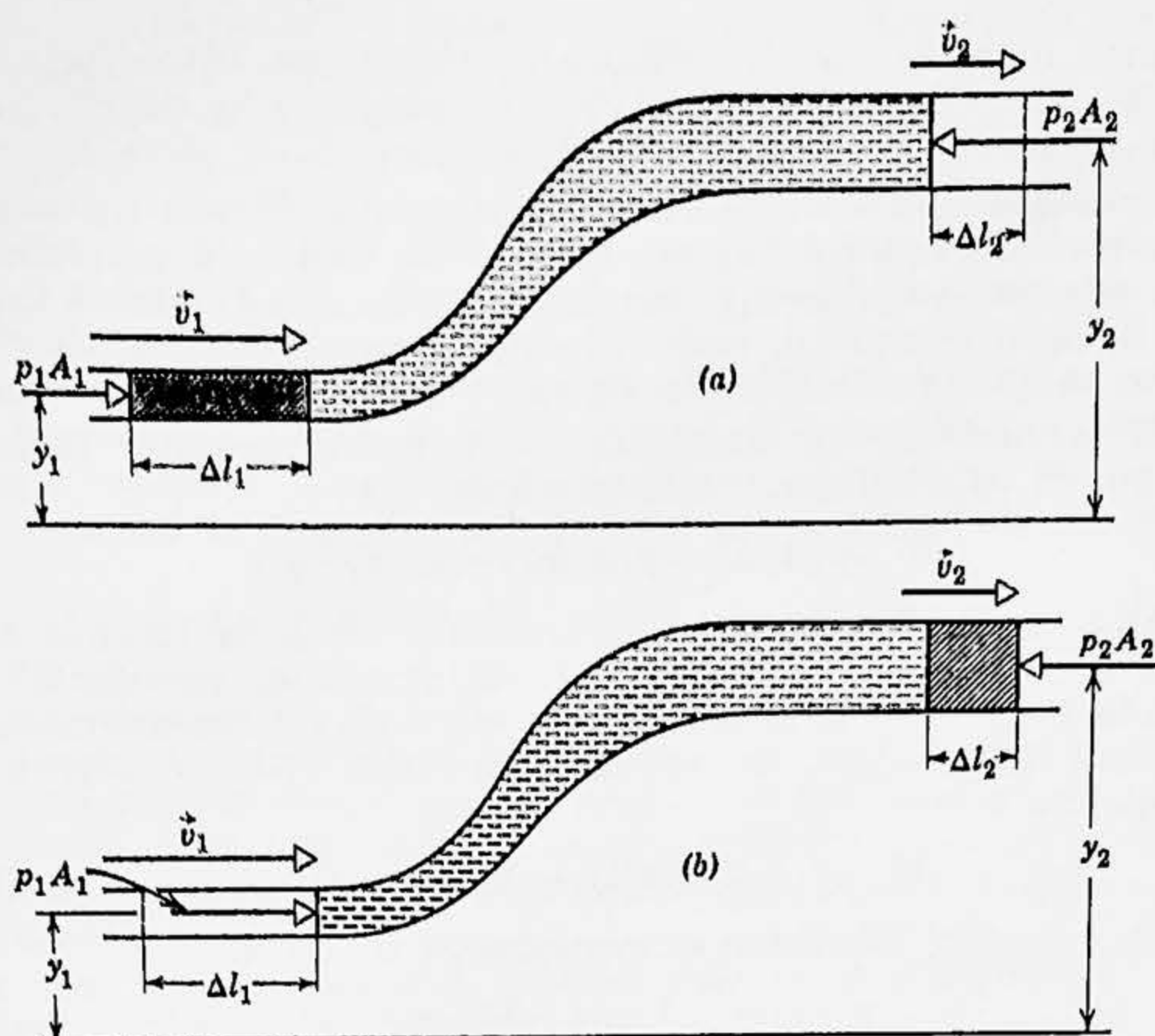


Figura 18-5. O porțiune de fluid (hașurată oblic și/orizontal) se mișcă printr-o secțiune a unui conducte de la poziția arătată în (a) spre cea arătată în (b).

astfel încât la dreapta are o secțiune transversală uniformă A_2 . Ea este orizontală la înălțimea y_2 . Să ne concentrăm atenția asupra porțiunii de fluid reprezentată de cele două hașurări, oblică și orizontală, și să numim acest fluid „sistem”. Să considerăm acum mișcarea sistemului de la poziția arătată în (a) spre poziția arătată în (b). În toate punctele din porțiunea îngustă a tubului presiunea este p_1 și viteza v_1 ; în toate punctele din porțiunea largă presiunea este p_2 și viteza v_2 .

Teorema energiei cinetice (vezi ecuația 7-14) afirmă că: *Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra unui sistem este egal cu variația energiei cinetice a sistemului*. În figura 18-5 forțele care efectuează lucrul mecanic asupra sistemului, presupunând că putem neglija forțele de viscozitate, sînt forțele de presiune $p_1 A_1$ și $p_2 A_2$ care acționează asupra capetelor stîng și respectiv drept ale sistemului, și forța de gravitație. Cînd fluidul curge prin tub, efectul net, după cum ne arată compararea figurilor 18-5, a și b, este de a ridica o cantitate de fluid, reprezentată prin aria hașurată oblic în figura 18-5, a, pînă în poziția arătată în figura 18-5, b. Cantitatea de fluid reprezentată prin hașurarea orizontală nu se schimbă în timpul curgerii.

Putem afla lucrul mecanic W efectuat asupra sistemului de către forța rezultantă, după cum urmează:

1. Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de forța de presiune $p_1 A_1$ este $p_1 A_1 \Delta l_1$.

2. Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de către forța de presiune $p_2 A_2$ este $-p_2 A_2 \Delta l_2$. Observăm că acesta este negativ, ceea ce înseamnă că lucrul mecanic pozitiv este efectuat de către sistem.

3. Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de către gravitație se datorește urcării fluidului hașurat oblic de la înălțimea y_1 pînă la înălțimea y_2 și este $-mg(y_2 - y_1)$ în care m este masa fluidului în oricare din cele două arii hașurate oblic. El este de asemenea negativ deoarece lucrul mecanic este efectuat de sistem *împotriva* forței gravitaționale.

Lucrul mecanic W efectuat asupra sistemului de către forța rezultantă se obține adunînd acești trei termeni:

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg(y_2 - y_1).$$

Dar $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ este volumul elementului de fluid hașurat oblic pe care îl putem scrie ca m/ρ , în care ρ este densitatea (constantă) a fluidului. Reamintim că cele două elemente de fluid au aceeași masă, astfel încît punînd $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ am presupus că fluidul este incompresibil. Cu această ipoteză avem

$$W = (p_1 - p_2) (m/\rho) - mg(y_2 - y_1). \quad (18-4, a)$$

Variația energiei cinetice a elementului de fluid este

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (18-4, b)$$

În baza teoremei energiei cinetice (ecuația 7-14) avem atunci

$$W = \Delta E_c$$

sau

$$(p_1 - p_2) (m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (18-5, a)$$

care poate fi rearanjată astfel

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (18-5, b)$$

Deoarece indicii 1 și 2 se referă la oricare două puncte de-a lungul tubului de curent, putem omite indicii și scrie

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{const.} \quad (18-6)$$

Ecuația (18-6) se numește *ecuația lui Bernoulli* pentru curgerea incompresibilă, nevîscoasă și staționară. Ea a fost prezentată pentru prima dată de către Daniel Bernoulli (1700—1782) în cartea sa *Hydrodynamica* din 1738.

Ecuația lui Bernoulli este riguros aplicabilă numai curgerii staționare, mărimile implicate fiind evaluate de-a lungul unei linii de curent. În figura noastră linia de curent folosită este de-a lungul axei conductei. Dacă curgerea este irotatională, însă, se poate arăta (vezi problema 21 pentru acest caz particular) că constanta din ecuația (18-6) este aceeași pentru toate liniile de curent.

Intr-un fluid incompresibil nevâscos nu putem varia temperatura fluidului prin mijloace mecanice. Prin urmare, ecuația lui Bernoulli, așa cum a fost formulată mai sus, se referă la procese izoterme (temperatură constantă). Este posibil însă să schimbăm temperatura unui fluid *compresibil* nevâscos cu mijloace mecanice. Putem generaliza această ecuație pentru a include fluidele compresibile, adăugând în membrul stîng al ecuației (18-6) un termen u , care reprezintă *energia internă* pe unitatea de volum a fluidului. Acest termen (și presiunea p) vor avea o valoare ce depinde de temperatură.

Dacă curgerea este vîscoasă, asupra fluidului acționează forțe de natura forțelor de frecare, astfel încît o anumită cantitate din lucru mecanic efectuat, care apăsarea ca o variație a energiei cinetice în cazul curgerii nevîscoase, apare acum ca energie termică în fluid. Trebuie atunci să scriem ecuația (18-5, a) astfel

$$(p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + Q$$

unde Q reprezintă energia termică generată în curgerea vîscoasă de la punctul 1 pînă la punctul 2. În practică, ecuația lui Bernoulli poate fi modificată în mod corespunzător folosind corecții empirice pentru conversiunea energiei mecanice în energie termică. Dacă însă tubul este neted și diametrul este mare în comparație cu lungimea, și dacă fluidul curge încet și are o vîscozitate mică, căldura generată este neglijabilă.

Așa cum statica punctului material este un caz particular al dinamicii punctului material, tot astfel statica fluidelor este un caz particular al dinamicii fluidelor. De aceea, nu constituie nici o surpriză faptul că legea variației presiunii cu înălțimea într-un fluid în repaus este inclusă în ecuația lui Bernoulli ca un caz particular. În adevăr fie fluidul în repaus; atunci $v_1 = v_2 = 0$ și ecuația (18-5, b) devine

$$p_1 + \rho gy_1 = p_2 + \rho gy_2$$

sau

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

care este aceeași cu ecuația (17-3).

În ecuația (18-6) toți termenii au dimensiunea unei presiuni (a se verifica aceasta). Presiunea $p + \rho gh$, care ar fi prezentă chiar dacă n-ar avea loc nici o curgere ($v = 0$), se numește *presiune statică*; termenul $\frac{1}{2}\rho v^2$ se numește *presiune dinamică*.

18-5. Aplicații ale ecuației Bernoulli și ecuației de continuitate

Ecuația lui Bernoulli poate fi folosită pentru a determina vitezele fluidului cu ajutorul măsurătorilor de presiune. Principiul general folosit în astfel de aparate de măsură este următorul: ecuația continuității cere ca viteza fluidului la gîtuitură să crească; ecuația lui Bernoulli ne arată atunci că presiunea trebuie să scadă acolo. Adică, pentru o conductă orizontală $\frac{1}{2}\rho v^2 + p$ este egal cu o constantă; dacă v crește și fluidul este incompresibil, p trebuie să descrească. Acest rezultat a fost dedus de asemenea din considerații dinamice în paragraful 18-3.

1. Debitmetrul lui Venturi

Acesta este un manometru (figura 18-6) montat în conductă pentru a măsura viteza de curgere a unui lichid. Un lichid de densitate ρ curge prin conductă de secțiune transversală A . La gîtuirea aria secțiunii se reduce la valoarea a și o ramură a manometrului este plasată acolo, așa cum se arată. Fie ρ' densitatea lichidului manometric, de exemplu mercurul. Aplicînd ecuația lui Bernoulli și ecuația continuității punctelor 1 și 2, studentul poate arăta că viteza de curgere în A este

$$v = a \sqrt{\frac{2 (\rho' - \rho) gh}{\rho (A^2 - a^2)}}.$$

Dacă vrem să aflăm fluxul de volum sau debitul de volum R , care reprezintă volumul de lichid transportat prin orice secțiune în o secundă, calculăm produsul

$$R = vA.$$

2. Tubul lui Pitot

Acest dispozitiv (figura 18-7) este folosit pentru a măsura viteza de curgere a unui gaz. Să considerăm gazul, de exemplu aerul, care curge prin orificiile din a . Aceste orificii sînt paralele cu direcția de curgere și sînt plasate destul de departe în spate, astfel încît viteza și presiunea în exteriorul orificiilor au valorile din curentul liber. Presiunea din ramura stîngă a manometrului, care este legată cu aceste orificii, este atunci presiunea statică din curentul de gaz, p_a . Deschiderea ramurii drepte a manometrului este așezată perpendicular pe curent. Viteza se reduce la zero în b și gazul stagnează în acel punct. Presiunea din b

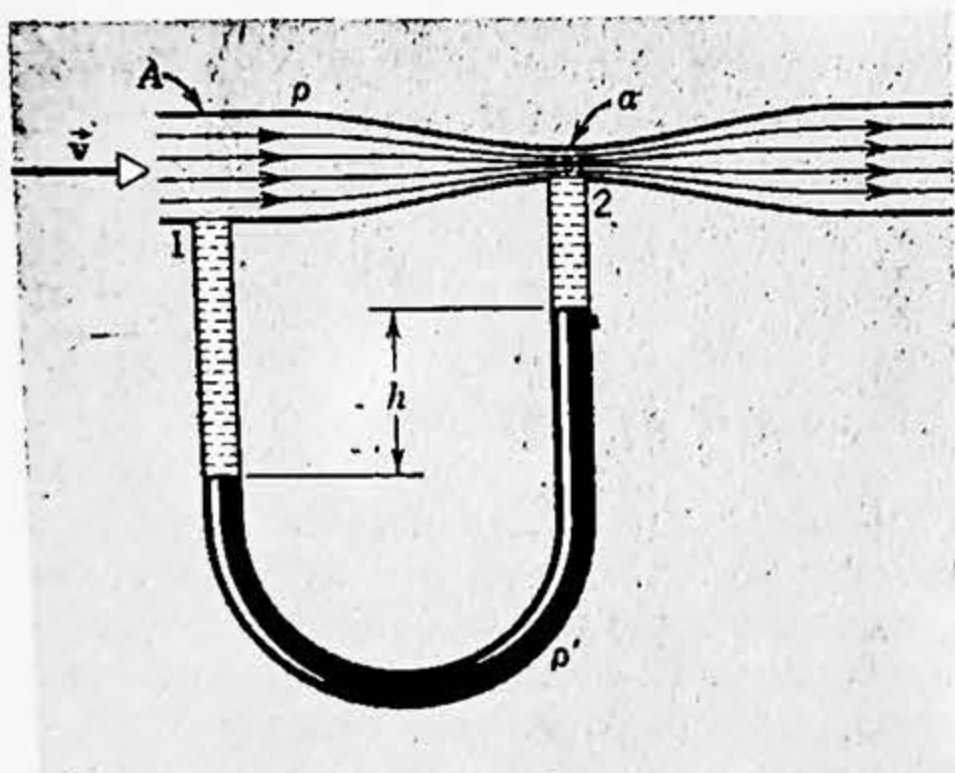


Figura 18-6. Dispozitivul lui Venturi, folosit pentru a măsura viteza de curgere a unui fluid.

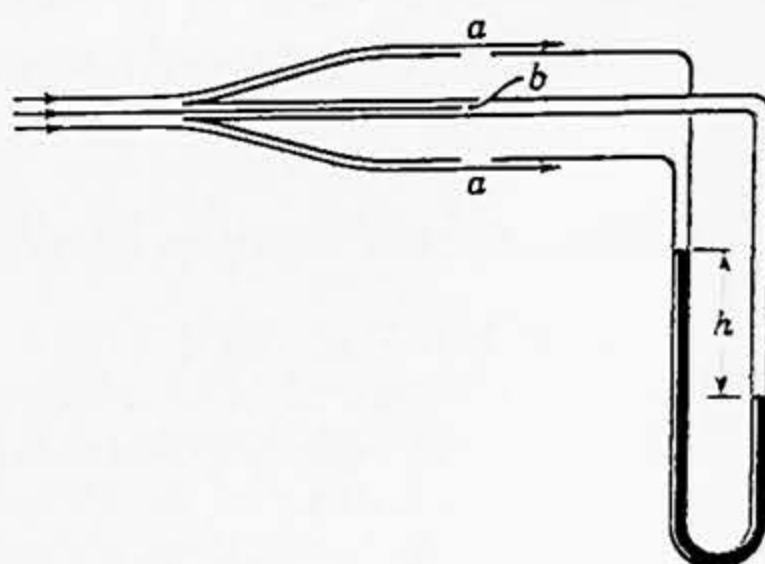


Figura 18-7. Diagrama secțiunii transversale printr-un tub Pitot.

este presiunea frontală totală, p_b . Aplicînd ecuația lui Bernoulli punctelor a și b , obținem

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_b,$$

unde, după cum se arată în figură, p_b este mai mare decît p_a . Dacă h este diferența de înălțime a lichidului din ramurile manometrului și ρ' este densitatea lichidului manometric, atunci

$$p_a + \rho' gh = p_b.$$

Comparînd aceste două ecuații, găsim

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho' gh$$

sau

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}$$

care ne dă viteza gazului. Acest dispozitiv poate fi etalonat pentru a citi direct viteza v și este cunoscut în acest caz sub numele de indicator de viteză a aerului.

3. Portanța dinamică (efectul lui Magnus)

Portanța dinamică este forța care acționează asupra unui corp, cum ar fi o aripă de avion sau de navă, sau o minge în rotație, în virtutea mișcării sale printr-un fluid. Trebuie s-o distingem de *portanța statică*, care reprezintă forța arhimedică care acționează asupra unui obiect cum ar fi un balon, în acord cu principiul lui Arhimede.

Figura 18-8, *a* arată liniile de curent în jurul unei mingi (care nu se învîrtește) în timp ce se mișcă prin aer. Pentru conveniență examinăm situația dintr-un sistem de referință în care mingea este în repaus și aerul se mișcă în jurul ei. Acest sistem de referință poate fi realizat în practică montînd mingea într-un tunel aerodinamic. Din simetria liniilor de curent rezultă clar că viteza aerului este aceeași în punctele corespunzătoare deasupra și dedesubtul mingii, cum sînt punctele 1 și 2 în figura 18-8, *a*. Din ecuația lui Bernoulli deducem că atunci cînd presiunile în astfel de puncte corespondente sînt egale și cînd aerul nu exercită vreo forță în sus sau în jos asupra mingii în virtutea mișcării sale portanța dinamică este nulă.

Într-o experiență separată, punem în rotație o minge în jurul unei axe care este perpendiculară pe planul figurii 18-8, *b*. Deoarece mingea nu este perfect netedă, ea antrenează cu ea aerul din jurul ei, liniile de curent legate de această mișcare fiind arătate în figură.

În sfîrșit, să combinăm cele două mișcări aruncînd o minge și învîr-tînd-o în același timp. Figura 18-8, *c* arată liniile de curent rezultate, văzute fiind dintr-un sistem de referință în care centrul de masă al mingii este în repaus. Aceste linii de curent reprezintă o distribuție a vitezelor care se găsește prin adunarea (vectorială) în fiecare punct a vitezelor din figurile 18-8, *a* și *b*. Vitezele în punctul 1 se adună numeric

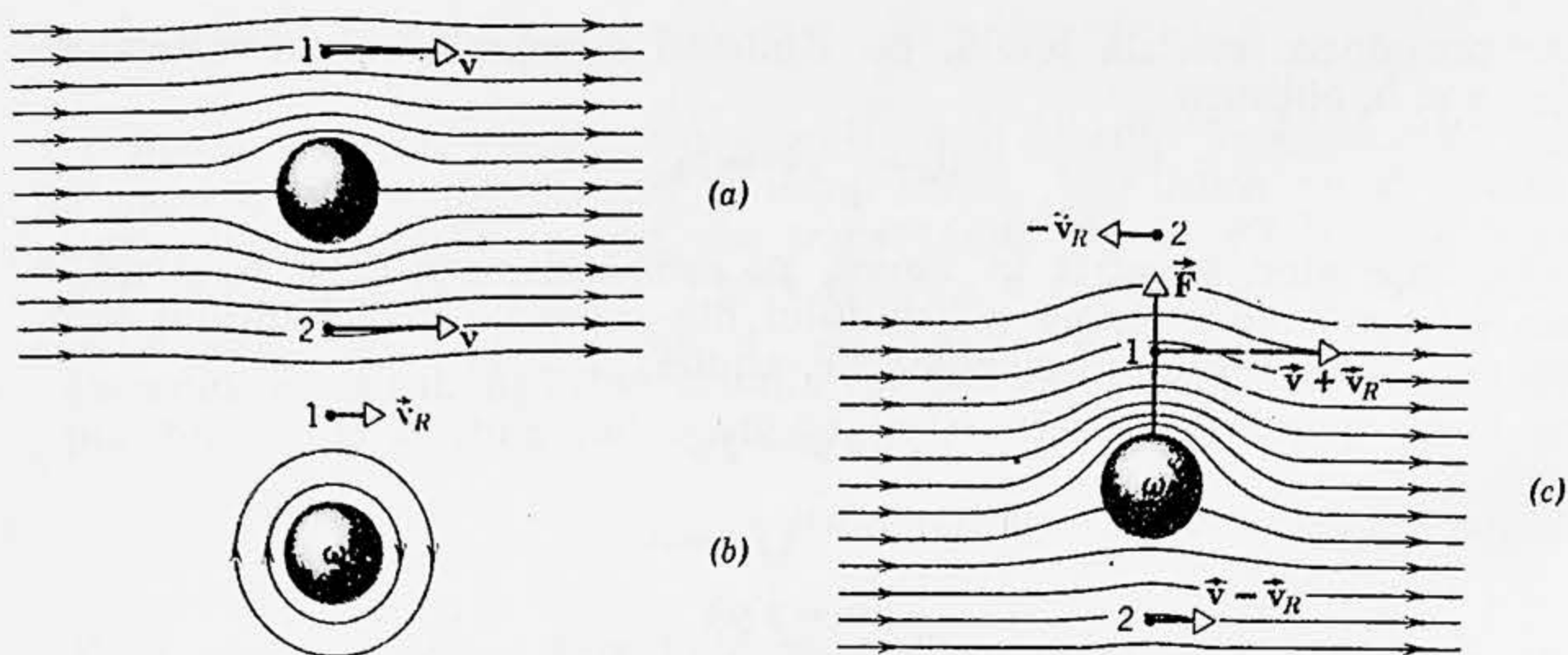


Figura 18-8. (a). Linii de curent ale aerului care curge în jurul unei mingi de baseball care nu se rotește. Viteza \vec{v} este arătată pentru punctele tipice 1 și 2 care se corespund. (b) Linii de curent ale aerului care curge în jurul unei mingi de baseball care se rotește, indicându-se vitezele \vec{v}_R și $-\vec{v}_R$ în punctele 1 respectiv 2. (c). Compunerea lui (a) și (b). Vitezele din punctele 1 și 2 sînt arătate împreună cu forța de ascensiune dinamică (portanța) \vec{F} .

în timp ce vitezele din punctul 2 se scad. În modul acesta, viteza în punctul 1 din figura 18-8, c este *mai mare* decît viteza din punctul 2 așa cum, în adevăr, ne sugerează îndesirea liniilor de curent. Din principiul lui Bernoulli rezultă atunci că presiunea în punctul 1 este mai mică decît presiunea din punctul 2, astfel încît ia naștere o forță netă în sus (portanța dinamică) asupra mingii care se rotește (efectul Magnus). Astfel de forțe exercitate asupra mingilor de baseball sau mingilor de tenis care se rotesc, sînt bine cunoscute în practică¹.

Atunci cînd asupra unui obiect se exercită o forță de ascensiune dinamică ea se datorește totdeauna sistemului nesimetric de linii de curent care sînt relativ

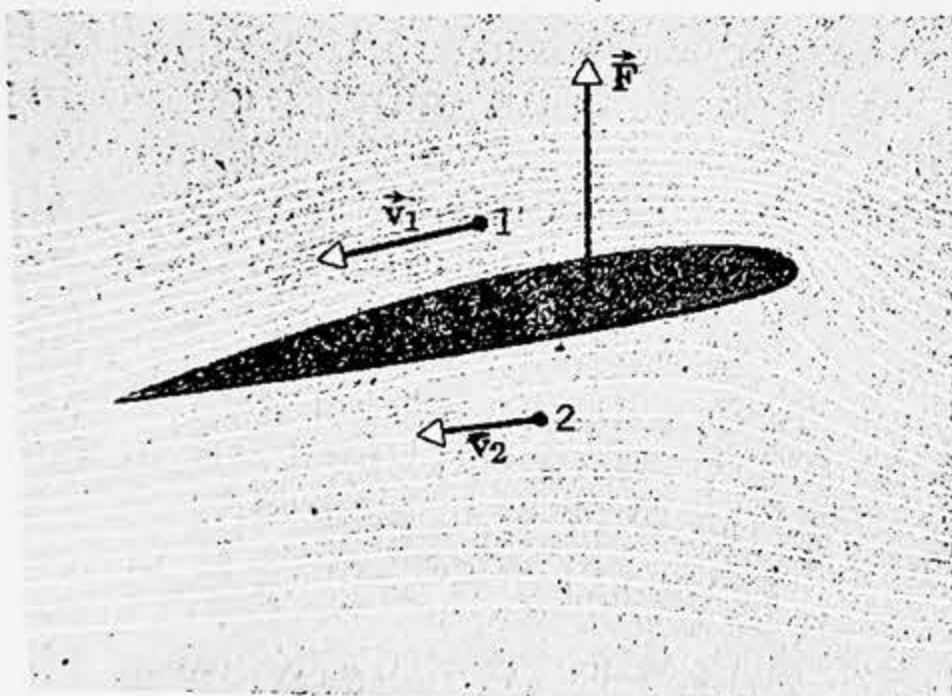


Figura 18-9. Linii de curent în jurul unei aripi de avion.

dese pe o față și relativ rare pe cealaltă față, analog celor din figura 18-8, c, ceea ce corespunde, după cum arată figura 18-8, b, circulației fluidului în jurul obiectului.

¹ Vezi *Vasul lui Flettner*, un articol de Albert Einstein în cartea sa *Essays in Science*, Philosophical Library, New York. Vasul lui Flettner, la fel ca o barcă cu pînze, capătă forță de mișcare datorită vîntului. În locul unei pînze el are un cilindru mare care este pus în rotație în jurul unei axe verticale de către un mic motor. Forța de „ascensiune” dinamică, rezultantă (în acest caz orizontală) propulsează vasul.

Pentru o minge care se învîrtește circulația se obține punînd pur și simplu obiectul în rotație; în alte cazuri de portanță dinamică, între care aripa de avion este un bun exemplu, tabloul liniilor de curent care conține circulația necesară se obține dînd corpului o formă convenabilă și orientîndu-l convenabil în fluidul care se mișcă. Figura 18-9 arată liniile de curent în jurul unei aripi de avion. După cum am cerut, ele sînt mai dese deasupra aripei și sînt mai rare sub aripă astfel încît (compară cu fig. 18-8, c) principiul lui Bernoulli prezice portanța dinamică observată, orientată în sus.

4. Forța de propulsie asupra unei rachete

În sfîrșit, ca ultim exemplu, să calculăm tracțiunea asupra unei rachete, produsă de ejectarea gazelor prin ajutoraj. Să considerăm o cameră (fig. 18-10) care are aria secțiunii transversale A , umplută cu un gaz de densitate ρ la o presiune p . Fie un mic orificiu de secțiune A_0 în fundul camerei. Vrem să aflăm viteza v_0 cu care iese gazul prin orificiu.

Să scriem ecuația lui Bernoulli (ecuația 18-5, b) astfel

$$p_1 - p_2 = \rho g(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2).$$

Pentru un gaz densitatea este atît de mică încît putem neglija variația presiunii cu înălțimea într-o cameră (vezi paragraful 17-3). Prin urmare, dacă p reprezintă presiunea p_1 în cameră și p_0 reprezintă presiunea atmosferică p_2 imediat în exteriorul orificiului, avem

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2)$$

sau

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \quad (18-7)$$

unde v este viteza gazului în interiorul camerei, iar v_0 este viteza de efuziune a gazului prin orificiu. Deși un gaz este compresibil și curgerea poate deveni turbulentă, putem trata curgerea ca fiind staționară și incompresibilă pentru presiuni și viteze de efuziune care nu sînt prea mari.

Să presupunem acum o continuitate a curgerii masei (într-un motor de rachetă această se obține atunci cînd masa gazelor ejectate este egală cu masa gazului creat prin arderea combustibilului), astfel încît (pentru o densitate presupusă constantă)

$$Av = A_0 v_0.$$

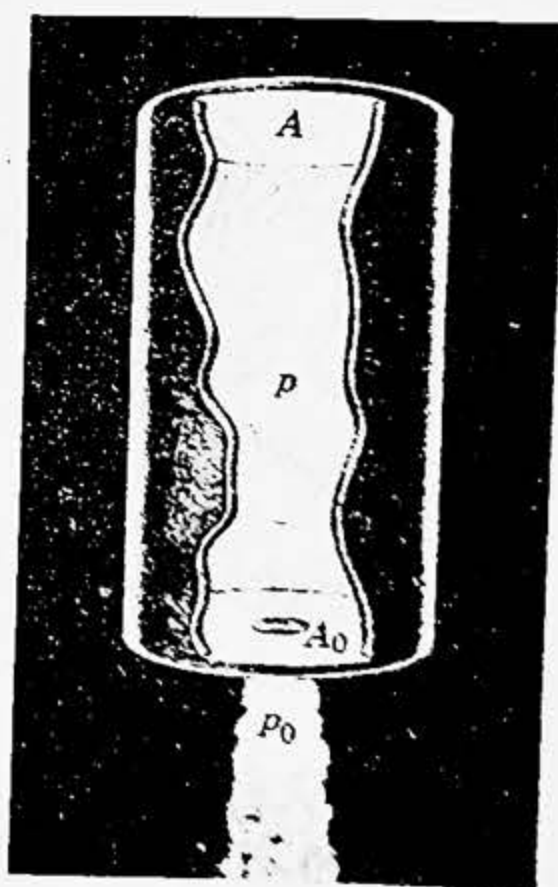


Figura 18-10. Fluidul ieșind din camera de ardere.

Dacă orificiul este foarte mic astfel încât $A_0 \ll A$, atunci $v_0 \gg v$ și putem neglija pe v^2 în comparație cu v_0^2 în ecuația (18-7). Prin urmare viteza de efuziune este

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}}. \quad (18-8)$$

Dacă camera noastră este camera de eșapament a unei rachete, tracțiunea asupra rachetei (secțiunea 9-7) este $v_0 dM/dt$. Dar masa de gaz ejectată în timpul dt este $dM = \rho A_0 v_0 dt$ astfel încât

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2,$$

și din ecuația (18-8) rezultă forța de propulsie

$$2A_0(p-p_0). \quad (18-9)$$

18-6. Conservarea impulsului în mecanica fluidelor

În mecanica newtoniană a punctului material deducerea legilor de conservare a impulsului și momentului cinetic folosește în mod explicit legea a treia a mișcării a lui Newton. Forțele interne și momentele interne într-un sistem mecanic se reduc între ele în virtutea legii a treia, rămânând numai forțele externe și momentele externe care contribuie la impuls și moment cinetic. În cazul unui fluid forțele interne sînt reprezentate prin presiunea din interiorul fluidului. Dar conceptul de presiune, el însuși, conține în mod implicit legea a treia a lui Newton. Forța produsă de presiunea exercitată perpendicular pe orice element de suprafață, într-un sens, este egală în modul și opusă ca sens cu forța exercitată perpendicular pe același element de suprafață dar în celălalt sens. De asemenea, fiecare din aceste două forțe se aplică în același loc, anume pe elementul de suprafață. Ambele forțe trebuie să aibă aceeași linie de acțiune. Prin urmare, în ecuațiile pentru viteza de variație a impulsului sau momentului cinetic al unui fluid, presiunile interne se vor reduce între ele. Atunci, putem trage concluzia că viteza de variație în timp a impulsului total într-un volum V a fluidului în mișcare, este egală cu forța externă totală care acționează asupra lui. În mod analog, viteza de variație în timp a momentului cinetic total într-un volum V al fluidului în mișcare, este egală cu momentul extern total care acționează asupra lui. De aici rezultă legile de conservare a impulsului și momentului cinetic.

18-7. Cîmpurile vitezelor de curgere

În capitolul despre gravitație am văzut cum putem rezuma situația fizică din vecinătatea maselor prin folosirea unui cîmp. Fiecare punct din cîmp poate fi privit ca avînd un vector asociat, anume \vec{g} , forța gravitațională pe unitatea de masă în acel punct. Sau, altfel, putem asocia o mărime scalară cu fiecare punct din spațiu, anume potențialul gravitațional V . Putem atunci desena o suprafață, numită suprafață echipotențială, prin toate punctele care au același potențial. Trasăm mai multe astfel de suprafețe, potențialul pe una din ele diferind printr-o con-

stantă de potențialul de pe suprafața vecină etc. Forța gravitațională în fiecare punct este atunci îndreptată de-a lungul unei linii care trece prin acel punct perpendicular pe aceste suprafețe și modulul ei este determinat din „viteza” de variație cu distanța a potențialului în aceea direcție, așa cum este indicat de distanțarea și orientarea suprafețelor echipotențiale. Prin trasarea liniilor de forță putem reprezenta intuitiv modul în care spațiul este afectat de prezența masei.

În mod analog, în dinamica fluidelor putem rezuma starea fizică dintr-un fluid în mișcare cu ajutorul unui câmp al vitezelor de curgere. În general, câmpul vitezelor este un câmp *vectorial*. Asociem o mărime vectorială cu fiecare punct din spațiu și anume viteza de curgere \vec{v} din acel punct. Pentru o curgere staționară câmpul vitezelor este staționar. Desigur, chiar în acest caz o particulă de fluid oarecare poate avea totuși o viteză variabilă atunci când se mișcă de la un punct la altul în câmp. Câmpul ne dă proprietățile spațiului din care deducem comportarea particulei în acest spațiu. Dacă curgerea este irotațională, precum și staționară, o numim curgere *potențială*. Atunci viteza de curgere \vec{v} poate fi legată de un potențial al vitezelor ψ , așa cum în gravitație \vec{g} poate fi legat de potențialul gravitațional V . Dacă trasăm suprafețe de potențial egal al vitezelor, așa cum am trasat suprafețele de potențial gravitațional egal, putem deduce pe \vec{v} din suprafețele echipotențiale de curgere exact cum am dedus pe \vec{g} din suprafețele echipotențiale gravitaționale. Prin urmare, un câmp pentru curgerea potențială este analog cu un câmp al forțelor conservative.

O masă de fluid care curge poate fi totdeauna împărțită în tuburi de curent. Dacă curgerea este staționară, tuburile rămân neschimbate ca formă și fluidul care se află la un moment dat într-un tub rămâne ulterior în interiorul acestui tub. Am văzut că viteza de curgere în interiorul unui tub de curent este paralelă cu tubul și are o mărime invers proporțională cu aria secțiunii transversale (ecuația 18-1). Să atribuim astfel de secțiuni transversale tuburilor astfel încât constanta de proporționalitate să fie aceeași pentru toate: dacă este posibil luăm această constantă egală cu unitatea, adică, debitul de volum este același pentru toate tuburile, anume debitul egal cu unitatea. Atunci mărimea vitezei de curgere poate fi determinată din ariile secțiunilor transversale ale tuburilor de curent. Există un alt procedeu echivalent cu acesta, care constă în așezarea unității de arie perpendicular pe direcția de curgere și trasarea prin ea a unui număr de linii de curent exact egal cu numărul de unități ale mărimii vitezei prin acel punct.

Să considerăm câteva exemple de câmpuri de viteză. Din motive de comoditate a desenului, considerăm numai exemple *bidimensionale*. În astfel de exemple viteza de curgere este aceeași în toate punctele de pe o linie perpendiculară pe planul figurii în oricare punct.

În figura 18-11 am reprezentat un câmp uniform al vitezelor de curgere. Aici toate liniile de curent sînt paralele și viteza de curgere \vec{v} este aceeași în toate punctele. Am văzut că există două moduri echivalente de a deduce intensitățile relative ale vitezelor de curgere din astfel de câmpuri de viteză: (a) din lărgimea tuburilor de curent și (b) din distanțele între liniile de potențial egal al vitezelor.

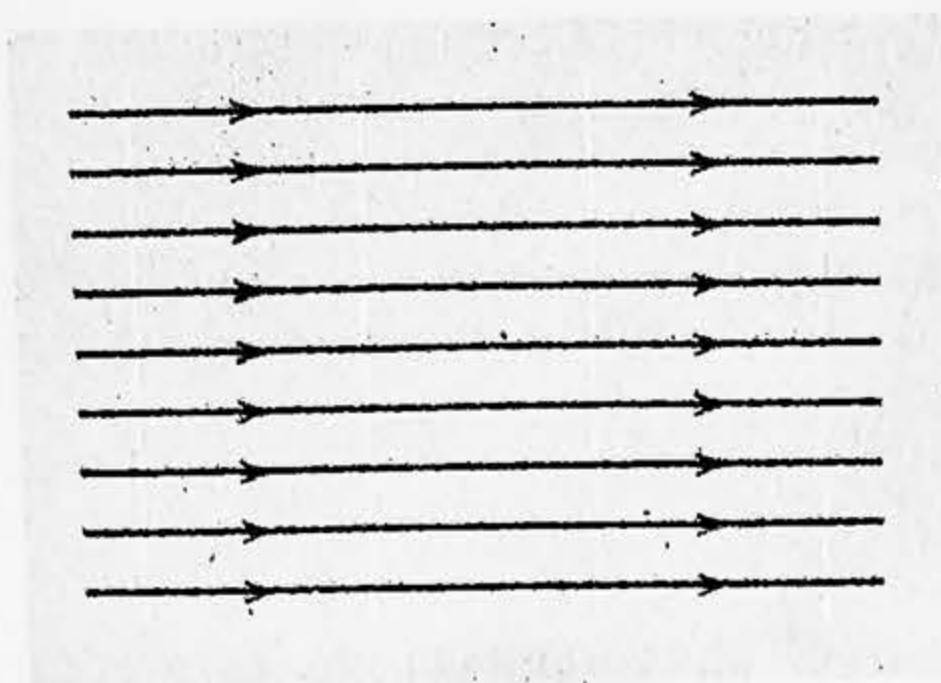


Figura 18-11. Liniile de curent (orizontale) și suprafețele de potențial egal al vitezelor (verticale) pentru un câmp uniform al vitezelor de curgere.

Ultima metodă se aplică numai curgerii irotaționale staționare. Pentru astfel de curgeri desenăm liniile de potențial egal al vitezei sub forma de linii punctate.

În figura 18-12 se arată câmpul pentru o rotație uniformă (vezi problema 22, capitolul 17). Aici v este proporțional cu r . În figura 18-13 am reprezentat câmpul de viteze al unui vârtej. În acest caz v este proporțional cu $1/r$ (vezi problema 19). Observăm că atât rotația uniformă cât și mișcarea de vârtej sînt reprezentate prin

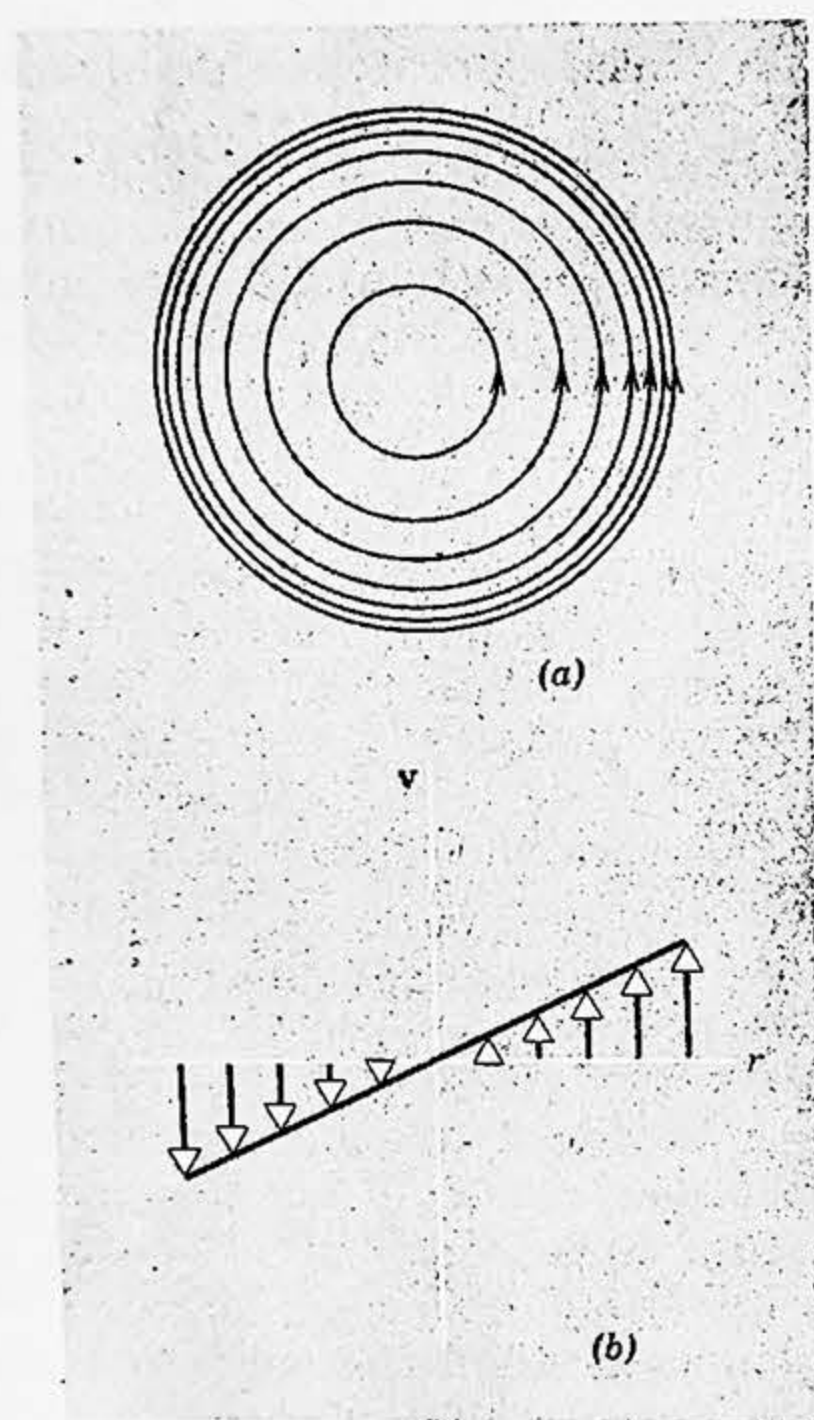


Figura 18-12. (a) Câmp rotațional uniform al vitezelor de curgere. (b) Variația vitezei fluidului față de centru.

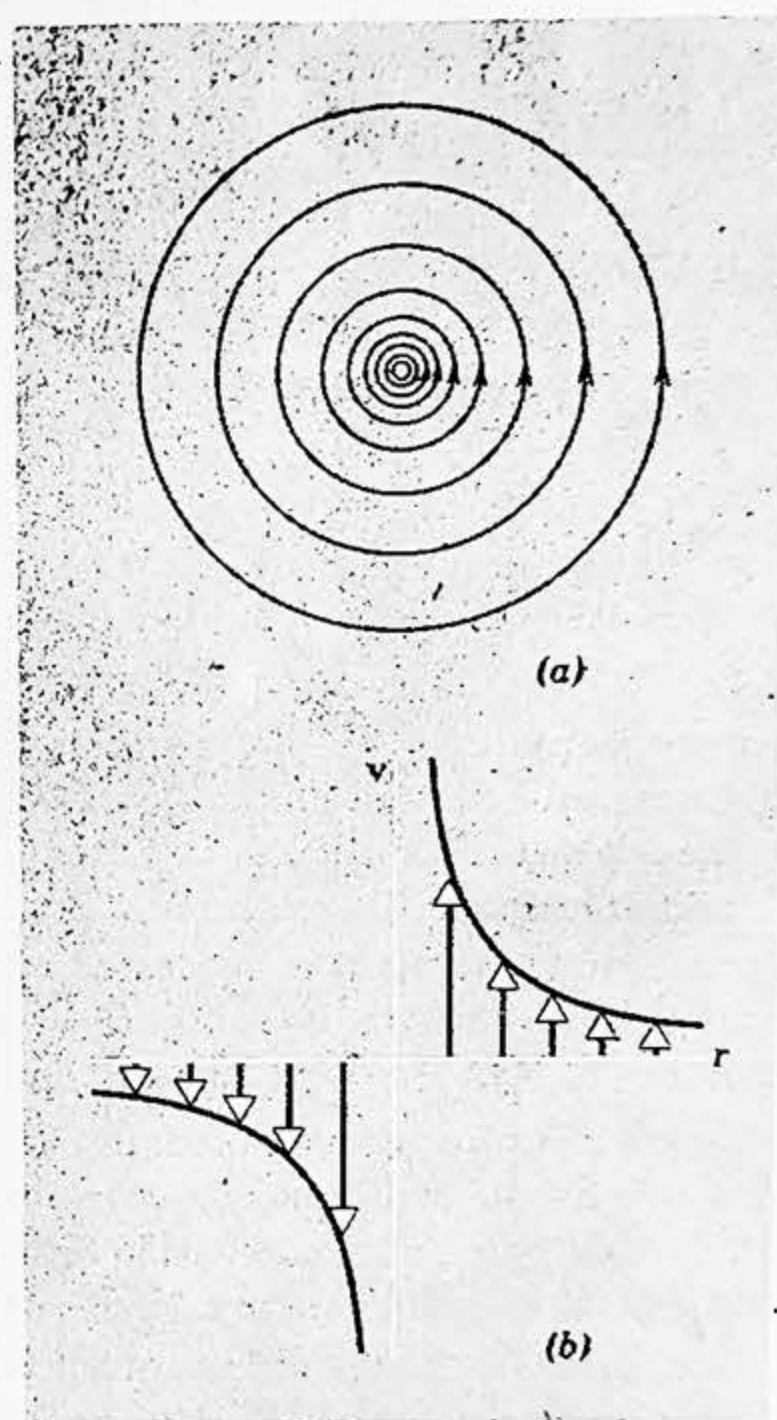


Figura 18-13. (a) Câmp irotațional al vitezelor de curgere. (b) Variația vitezei fluidului față de centru.

linii de curent circulare, dar sînt tipuri complet diferite de curgere. Evident, forma liniilor de curent ne dă numai o informație limitată; distanțele dintre linii sînt necesare de asemenea.

Figura 18-14 reprezintă cîmpul vitezelor pentru o sursă. Toate liniile de curent sînt îndreptate radial spre exterior. Sursa este de fapt o linie care trece prin centru perpendicular pe desen și emite o masă Q de fluid în unitatea de timp. Cîmpul vitezelor în jurul unei surse liniare *negative* este același ca al sursei pozitive, cu excepția semnului curgerii, care este îndreptat radial spre centru.

Pentru o sursă liniară pozitivă și o sursă liniară negativă, care au aceeași intensitate, Q respectiv $-Q$, dar sînt la o mică distanță între ele, obținem cîmpul combinat numit *dipol liniar* al curgerii arătat în figura 18-15.

După cum vom vedea mai tîrziu, cîmpul electrostatic, cîmpul magnetic și cîmpul vitezelor de curgere pentru un curent electric sînt de asemenea cîmpuri vectoriale. În legătură cu aceasta, cîmpul uniform (fig. 18-11) corespunde cîmpului electric al unui condensator plan, cîmpul unui izvor (fig. 18-14) corespunde cîmpului electric al unui condensator cilindric sau al unui conductor rectiliniu de sarcină pozitivă, respectiv negativă, iar cîmpul dipolar liniar (fig. 18-15) corespunde cîmpului electric a doi conductori încărcăți cu sarcini de semn opus. În toate aceste cazuri cîmpul vitezelor este un cîmp potențial iar cîmpul electric corespunzător este conservativ.

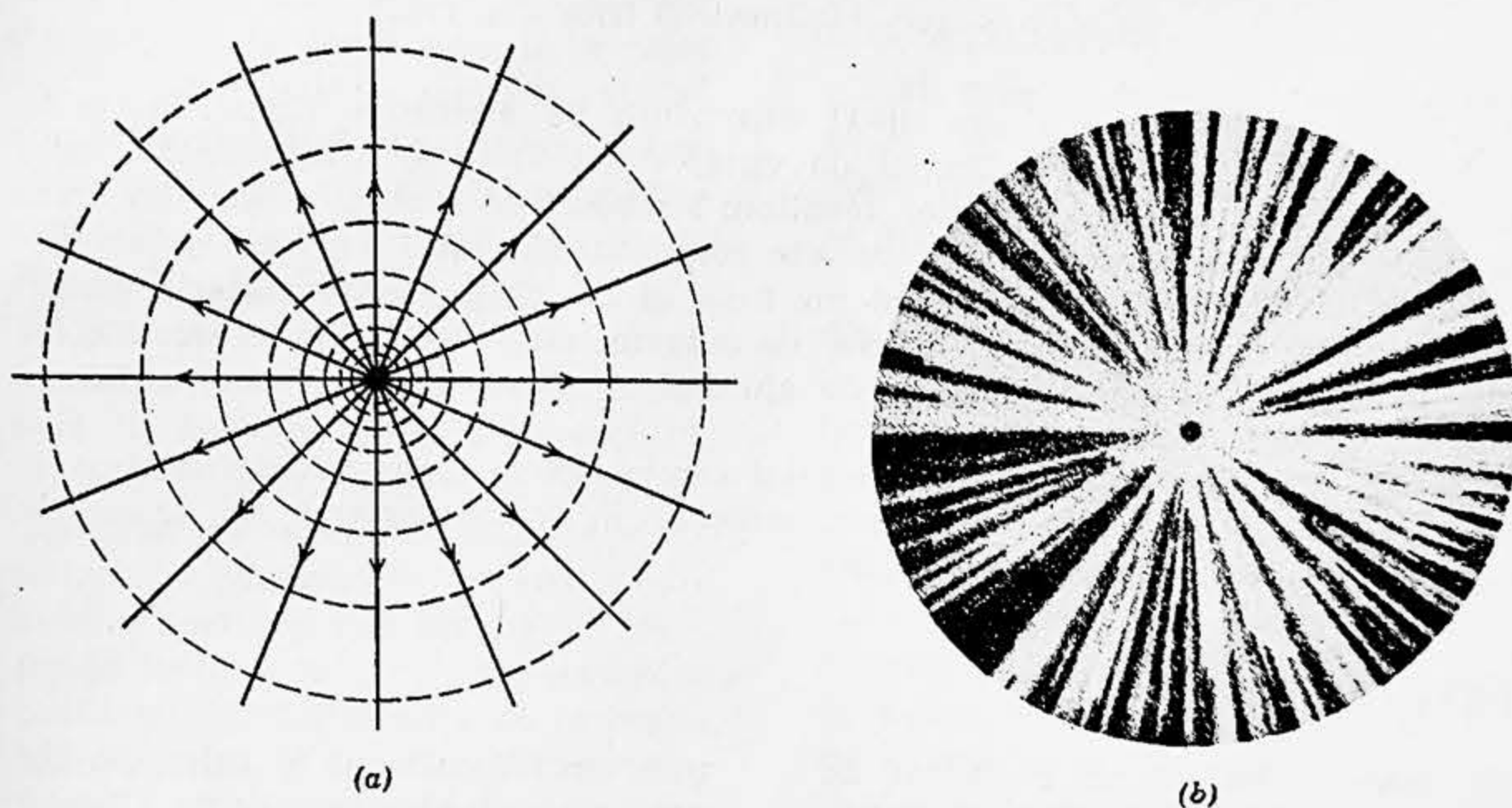


Figura 18-14. (a) Curgerea de la o sursă liniară. (b) Spectrul curgerii fluidului de la aceeași sursă. Imaginea din această figură este obținută lăsînd apa să curgă între un strat orizontal format dintr-o placă de sticlă și un strat orizontal din ghips. În (b), apa iese în sus prin orificiul din centrul plăcii de ghips și curge afară spre margini. Direcția curgerii este făcută vizibilă prin presărare pe placa de ghips a cristalelor de permanganat de potasiu, care se dizolvă și colorează apa în purpuru închis. (Spectrul curgerii fluidului a fost realizat și fotografiat de prof. A. D. Moore de la Universitatea din Michigan, și este reprodus din Introducere în cîmpul electric, de W. E. Rogers, McGraw-Hill Book Co., 1954.)

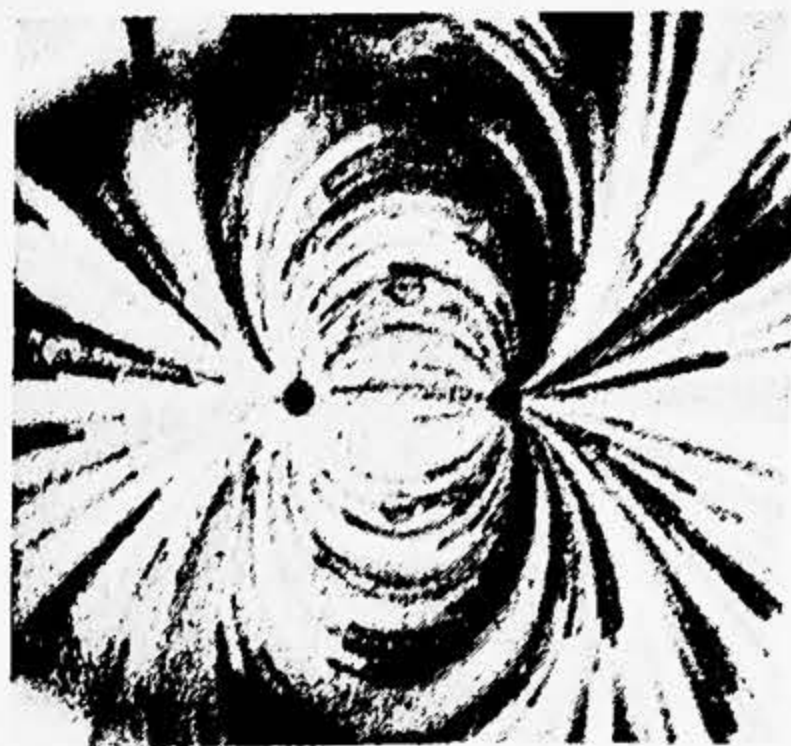
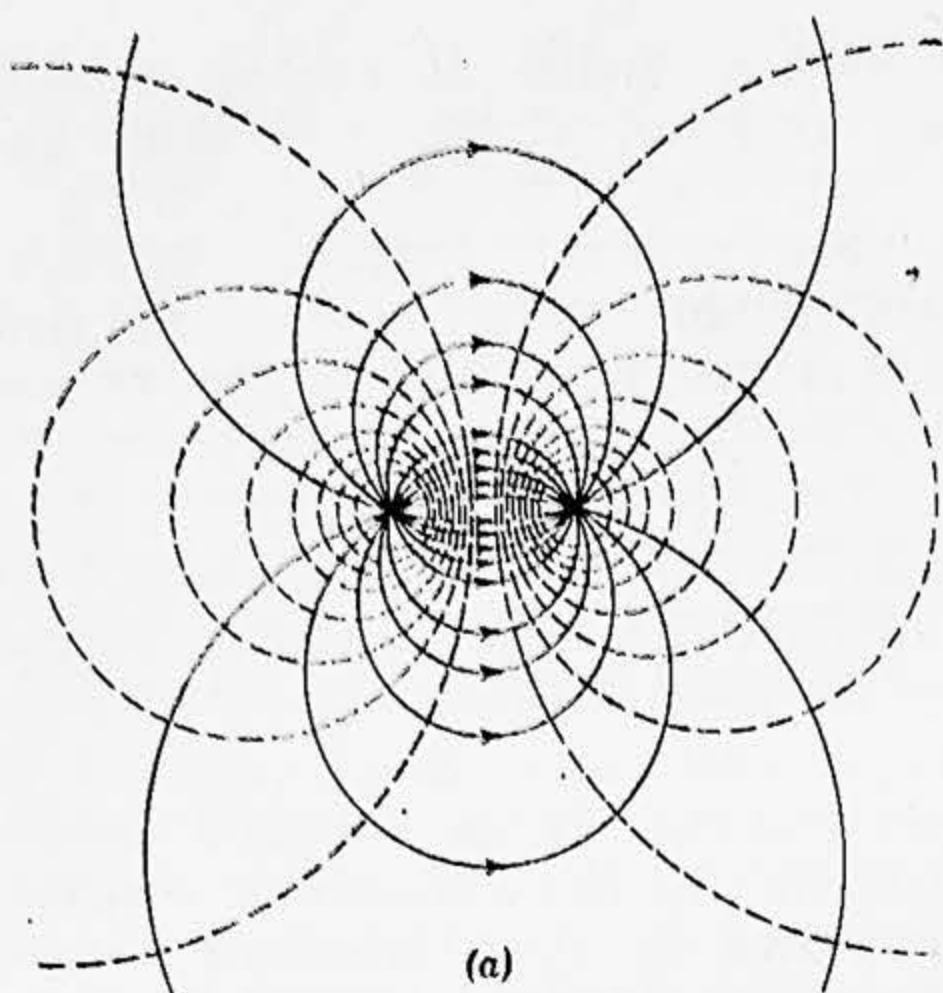


Figura 18-15. (a) Curgerea dipolară linară. Sursa pozitivă este în stînga, iar cea negativă în dreapta. (b) Un spectru al curgerii fluidului de la același dipol linar. (Spectrul curgerii fluidului a fost realizat și fotografiat de prof. A. D. Moore de la Universitatea din Michigan și este reprodus din *Introducere în cîmpul electric* de W. E. Rogers, McGraw-Hill Book Co., 1954.)

Cîmpul uniform din figura 18-11 reprezintă de asemenea cîmpul magnetic în interiorul unui solenoid. Cîmpul de vîrtej din figura 18-13 reprezintă cîmpul magnetic din jurul unui conductor rectiliniu străbătut de curent. Acesta din urmă constituie un exemplu de cîmp care este rotațional (în jurul axei vîrtejului).

Datorită acestor analogii dintre un fluid și un cîmp electromagnetic, putem adesea determina un cîmp al vitezelor de curgere, care este imposibil de calculat prin metodele matematice actuale, cu ajutorul unor măsurători experimentale a unor instalații electrice adecvate.

După cum am văzut peste tot în acest capitol, ideile fundamentale de cîmp și principiile de conservare își găsesc o aplicație în multe domenii ale fizicii. Le vom întîlni din nou de mai multe ori.

Întrebări

1. Puteți atribui un coeficient de frecare statică între două suprafețe dintre care una este suprafața unui fluid?

2. Să se descrie forțele care acționează asupra unui element de fluid în timpul curgerii sale printr-o conductă de secțiune transversală neuniformă.

3. Înălțimea lichidului în tuburi verticale (sonde de presiune) arată că presiunea scade de-a lungul conductei, chiar dacă conducta are o secțiune

transversală uniformă și lichidul care curge este incompresibil (fig. 18-16). Să se explice.

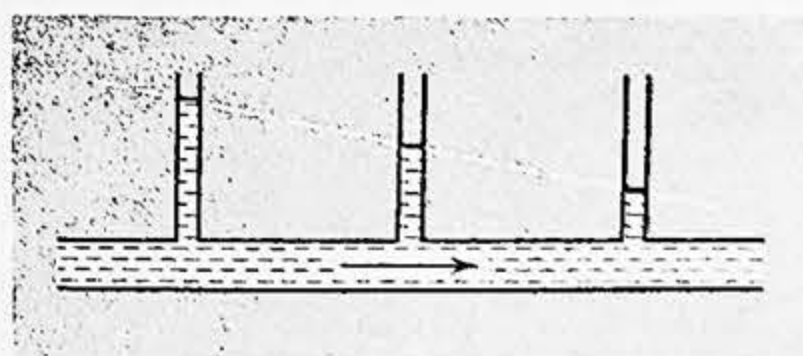


Figura 18-16.

4. S-a găsit că un lichid va curge mai repede și mai regulat dintr-o cutie închisă, dacă sînt practicate două găuri în cutie decît dacă este practică doar una. Să se explice.

5. Într-o demonstrație de curs o minge de ping-pong este menținută în aer cu ajutorul unui jet vertical de aer. Este echilibrul stabil, instabil sau indiferent? Să se explice.

6. (a) Să se explice cum un jucător de baseball poate face ca mingea să vireze spre dreapta sau spre stînga lui? Să se justifice răspunsul desenînd o diagramă a liniilor de curent și aplicînd ecuația lui Bernoulli. (b) De ce este mai ușor să realizăm o curbă cu o minge de tenis decît cu una de baseball?

7. Două bărci cu vîsle care se mișcă paralel între ele în același sens sînt supuse la forțe care le apropie una de alta. Două automobile care se mișcă paralel sînt de asemenea împinse unul spre celălalt. Să se explice astfel de fenomene în baza ecuației lui Bernoulli.

8. Poate fi explicată acțiunea de frinare a unei parașute în cădere liberă în baza ecuației lui Bernoulli?

9. Un lichid curge în interiorul unei conducte orizontale care are o gîtuitură pe lungimea sa. Tuburi manometrice verticale sînt atașate în porțiunea largă și în porțiunea îngustă a conductei. Dacă robinetul de la capătul de ieșire se închide, lichidul din tuburile manometrice va urca sau va coborî? Să se explice.

10. Puteți explica de ce apa curge sub forma unui curent continuu în jos printr-o conductă verticală, în timp ce ea se sparge în picături cînd cade liber?

11. Puteți explica de ce un obiect care cade de la o înălțime mare atinge o viteză limită constantă?

12. La decolare este mai bine ca avionul să se miște împotriva vîntului sau în sensul vîntului? Dar la aterizare...?

13. Depinde diferența de presiune dintre suprafața superioară și cea inferioară a unei aripi de avion de altitudinea la care zboară avionul? Să se explice.

14. Acumularea de gheață pe o aripă de avion poate modifica forma sa astfel încît forța de ascensiune (portanța) se poate reduce apreciabil. Să se explice.

15. Cum este în stare un avion să zboare pe spate?

16. De ce în ecuația (18-9) apare factorul 2 în loc de 1? Ne-am putea aștepta la prima vedere ca forța de tracțiune să fie pur și simplu egală cu diferența de presiune înmulțită cu aria, adică $A_0(p-p_0)$.

17. Efectul distructiv al unui tornado (vîrtej sau trompă) este mai mare lîngă centrul perturbației decît la periferie. Să se explice.

18. Cînd un dop este scos afară din orificiul unui bazin umplut cu apă, apa se scurge afară prin orificiu învîrtindu-se ca un mic vîrtej. Viteza unghiulară a unui element de fluid în jurul unei axe verticale care trece prin orificiu este mai mare în vecinătatea orificiului. Să se explice.

19. Să se folosească criteriul roții cu palete (fig. 18-1) pentru a determina care cîmp de curgere (figurile 18-11—18-15) este rotațional.

20. Într-o curgere staționară vectorul viteză \vec{v} este constant în fiecare punct. Poate avea loc atunci o mișcare accelerată a particulei de fluid? Discuție.

21. Cum se poate justifica aplicarea ecuației Bernoulli mingii în rotație din figura 18-8, c? Punctele 1 și 2 nu se află pe aceeași linie de curent.

Probleme

1. Un furtun de grădină avînd un diametru interior de 1,9 cm, este legat la o stropitoare care constă dintr-o placă cu 24 de orificii, fiecare avînd 1,27 mm în diametru. Dacă apa din furtun are o viteză de 0,90 m/s, cu ce viteză va părăsi ca orificiile stropitorii?

2. Modelele de torpile sînt uneori probate într-o conductă cu apă curgătoare, exact cum modelele de avion sînt probate într-un tunel aerodinamic. Să considerăm o conductă circulară cu diametrul intern de 25 cm și un model de torpilă așezat de-a lungul axei conductei cu un diametru de 5,0 cm. Torpila trebuie încercată la o viteză de curgere a apei de 2,4 m/s. (a) Cu ce viteză trebuie să curgă apa în porțiunea negîtuită a conductei? Care va fi diferența de presiune dintre porțiunea gîtuită și cea negîtuită?

3. Ce lucru mecanic este efectuat de presiune pentru a pompa 1,4 m³ de apă printr-o conductă de 1,27 cm dacă diferența de presiune de la capetele conductei este de 1,03·10⁵ N/m²?

4. De la o înălțime de 18 m cade apă cu un debit de 14 m³/min și pune în mișcare o turbină de apă. Ce putere maximă poate dezvolta această turbină?

5. Aplicînd ecuația lui Bernoulli și ecuația continuității între punctele 1 și 2 din figura 18-6, să se arate că viteza de curgere la intrare este

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}.$$

6. Un tub Venturi are diametrul conductei de 25 cm și diametrul gîtuiturii de 12,5 cm. Dacă presiunea apei în conductă este de 4,0·10⁵ N/m², și la gîtuitură de 3,0·10⁵ N/m², să se determine debitul de curgere a apei în m³/s (debitul de volum).

7. Să considerăm tubul lui Venturi din figura 18-6 fără manometru. Fie

$A = 5a$. Să presupunem că presiunea din A este 2,0 atm. Să se calculeze valorile lui v în A și v' în a care ar face ca presiunea p' din a să fie egală cu zero. Să se calculeze debitul de volum corespunzător, dacă diametrul în A este de 5,0 cm. Fenomenul din a atunci cînd p' scade pînă la zero se numește *cavitație*. Apa se vaporizează în mici bule.

8. Într-o conductă orizontală de petrol de secțiune transversală constantă presiunea descrește cu 3,0·10⁵ N/m² între două puncte separate cu 300 m între ele. Care este pierderea de energie pe metru cub de petrol pe unitatea de distanță?

9. Figura 18-17 arată un lichid care se scurge printr-un orificiu într-un vas mare, orificiul fiind situat la o distanță h sub nivelul apei. (a) Aplicînd ecuația lui Bernoulli unei linii de curent care unește punctele 1, 2 și 3, să se arate că viteza de curgere este

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Această formulă este cunoscută ca legea lui Torricelli. (b) Dacă orificiul ar fi vertical în sus, cît de sus ar urca vîna de lichid? (c) Cum ar afecta viscozitatea sau turbulența analiza de mai sus?

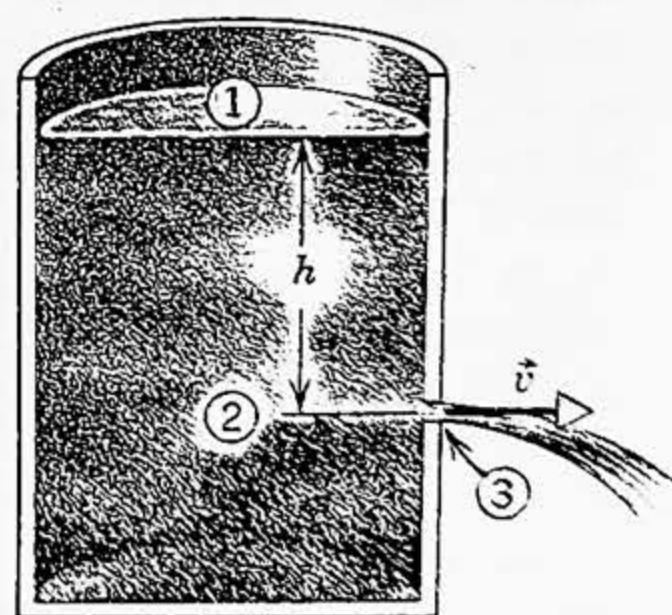


Figura 18-17.

10. Să presupunem că două vase, fiecare avînd o deschidere mare în partea superioară, conțin lichide diferite. Pe fața laterală a fiecărui vas, la aceeași adîncime h sub nivelul lichidului, este practicat cîte un mic orificiu. La unul din vase orificiul are o secțiune dublă față de orificiul celuilalt vas. (a) Care este raportul densităților fluidelor, dacă s-a observat că debitul de masă este același pentru fiecare orificiu? (b) Comparați între ele debitele de volum? (c) Pot fi făcute egale debitele de volum? Cum?

11. Un vas este umplut cu apă pînă la o înălțime H . Într-unul din pereții săi este străpuns un orificiu la o adîncime h sub nivelul apei (fig. 18-18). (a) Să se afle distanța x de la piciorul peretelui pînă în punctul unde vîna de apă lovește podeaua. (b) Poate fi străpuns un orificiu la o altă adîncime astfel încît cea de a doua vîna să aibă aceeași distanță la cădere? Dacă este așa, la ce adîncime?

12. Suprafața superioară a apei dintr-un rezervor se află la o înălțime H deasupra terenului orizontal. La ce adîncime h trebuie făcut un orificiu mic pentru ca vîna de apă care iese orizontal să lovească terenul la

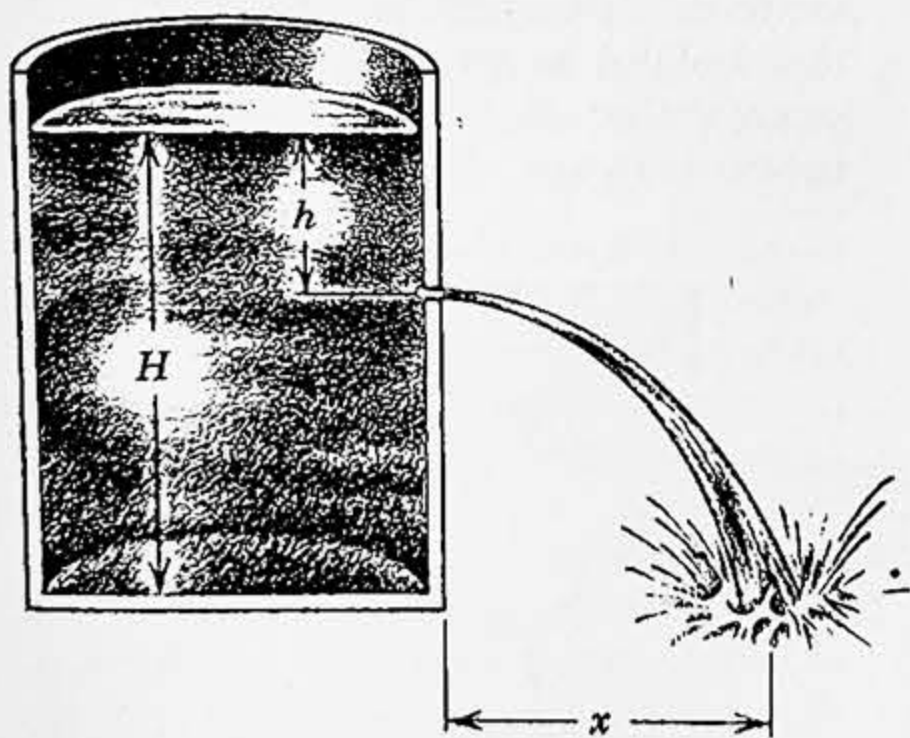


Figura 18-18.

distanța maximă de baza rezervorului? Cît este această distanță?

13. Să se calculeze viteza de curgere a unui lichid prin orificiul dintr-un vas, ținînd seamă de viteza suprafeței superioare a lichidului, după cum urmează. (a) Să se arate, plecînd de la ecuația Bernoulli că

$$v_0^2 = v^2 + 2gh,$$

unde v este viteza suprafeței superioare. (b) Considerînd apoi curgerea ca un tub mare de curent, să se afle raportul v/v_0 din ecuația continuității, astfel încît

$$v_0 = \sqrt{2gh/[1 - (A_0/A)^2]},$$

unde A este secțiunea transversală a tubului la suprafața superioară și A_0 este secțiunea transversală a tubului în dreptul orificiului. (c) Să se arate apoi că dacă orificiul este mic în comparație cu aria suprafeței,

$$v_0 \cong \sqrt{2gh} \left[1 + \frac{1}{2} (A_0/A)^2 \right].$$

14. Un tub Pitot este montat pe aripa unui avion pentru a determina viteza avionului față de aer. Tubul conține alcool și indică o diferență de nivel de 1,25 cm. Care este viteza avionului în km/h față de aer?

15. Un avion are aria totală a aripiilor de 18 m^2 . Aerul se deplasează pe suprafața superioară a aripii cu 48 m/s și pe suprafața inferioară cu 39 m/s . Care este greutatea avionului? Să se discute portanța dacă avionul, zburînd cu aceeași viteză față de aer, (a) zboară orizontal, (b) urcă sub un unghi de 15° și (c) coboară sub un unghi de 15° .

16. Dacă viteza de curgere pe suprafața inferioară a unei aripi este de 100 m/s , care viteză de curgere de pe suprafața superioară va da o portanță de 100 N/m^2 ?

17. (a) Să considerăm aerul în repaus (stagnant) din fața marginii unei aripi și aerul care alunecă rapid pe suprafața aripii cu o viteză v . Să se

afle valoarea maximă posibilă a lui v din curgerea laminară, presupunând că aerul este incompresibil și folosind ecuația lui Bernoulli. Se va lua densitatea aerului $1,2 \text{ kg/m}^3$. (b) Cum se compară aceasta cu viteza sunetului de 345 m/s ? Puteți explica diferența? De ce ar trebui să fie o legătură între aceste mărimi?

18. La capătul unui tub este atașat un disc DD . Când se suflă aer prin tub, discul atrage foaia CC . Fie A aria foii și v viteza medie a aerului între CC și DD (fig. 18-19); să se calculeze forța rezultantă îndreptată în sus care acționează asupra lui CC . Se neglijează greutatea foii.

19. Înainte ca Newton să fi propus teoria sa privind gravitația, era acceptat pe scară largă un model al mișcării planetare propus de René Descartes. În modelul lui Descartes planetele erau menținute și antrenate de un vârtej al particulelor de eter centrat în jurul Soarelui. Newton a arătat că această schemă a vârtejului contrazicea observațiile, deoarece: (a) Viteza unei particule de eter din vârtej variază invers proporțional cu distanța până la Soare. (b) Perioada de revoluție a unei astfel de particule variază direct proporțional cu pătratul distanței sale până la Soare. (c) Acest rezultat contrazice legea a treia a lui Kepler. Să se demonstreze (a), (b) și (c).

20. Să considerăm un tub uniform în formă de U cu o diafragmă în par-

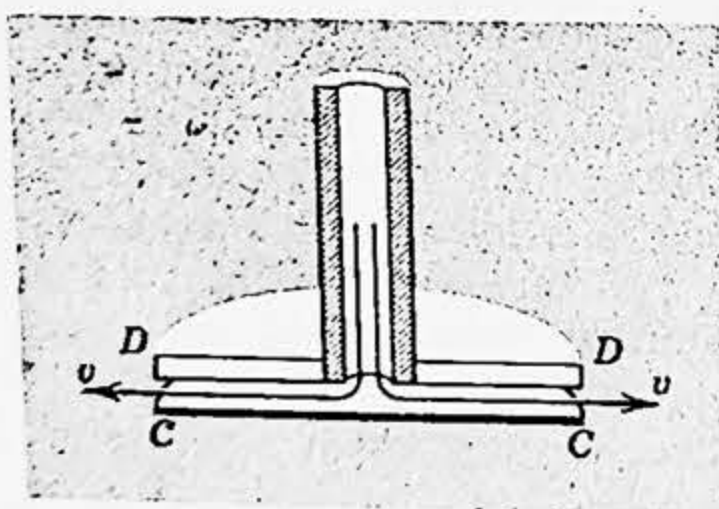


Figura 18-19.

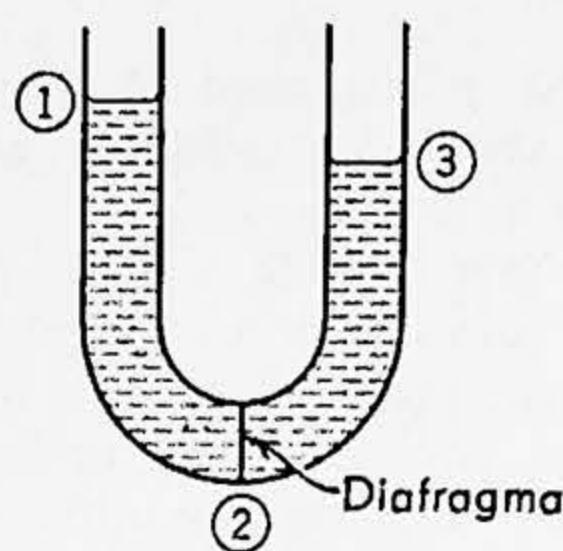


Figura 18-20.

tea inferioară și umplut cu un lichid până la înălțimi diferite în fiecare ramură (vezi fig. 18-20). Să ne imaginăm acum că diafragma este găurită astfel încât lichidul curge de la stînga spre dreapta. (a) Să se arate că aplicarea principiului lui Bernoulli între punctele 1 și 3 duce la o contradicție. (b) Să se explice de ce principiul lui Bernoulli nu se aplică aici. (Indicație: Este curgerea staționară?)

21. Să se arate că constanta din ecuația lui Bernoulli (ecuația 18-6) este aceeași pentru toate liniile de curent în cazul curgerii irotaționale, staționare din figura 18-11.

22. (a) Să considerăm o vîină de fluid de densitate ρ și viteză v_1 trecînd brusc de la o conductă cilindrică de secțiune transversală a_1 într-o conductă cilindrică mai largă de secțiune transversală a_2 (vezi fig. 18-21). Jetul se va amesteca cu fluidul înconjurător și, după amestecare, va curge aproape uniform cu o viteză

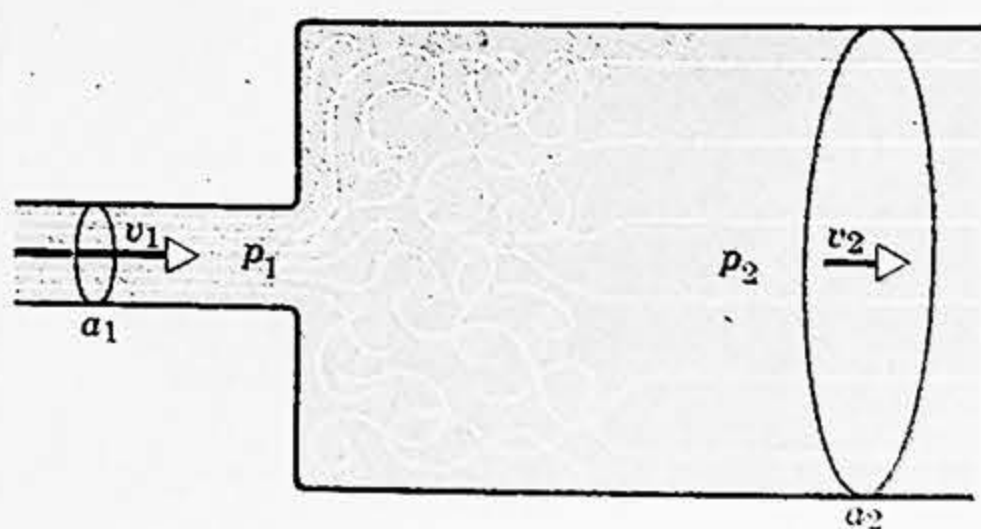


Figura 18-21.



Figura 18-22.

medie v_2 . Fără a ne referi la detaliile amestecării, să se folosească considerațiile de impuls pentru a arăta că creșterea de presiune datorită amestecării este aproximativ

$$p_2 - p_1 = \rho v_1 (v_1 - v_2).$$

(b) Să se arate, în baza principiului lui Bernoulli, că într-o conductă care se lărgeste treptat, avem

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

și să se explice pierderea de presiune (diferența este $\frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2$ datorită lărgirii bruște a conductei. Puteți face o analogie cu ciocnirile elastice și neelastice din mecanica particulelor?

23. Un câmp de forțe este conservativ dacă $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$. Cercul de pe simbolul integralei înseamnă că integrarea trebuie luată de-a lungul unei curbe închise (unui drum închis) din câmp. O curgere este curgere potențială (deci irotațională) dacă $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ pentru orice drum închis din câmp.

Folosind acest criteriu, să se arate că câmpurile din figurile 18-11 și 18-14 sînt câmpuri de curgere potențială.

24. Așa numitul câmp de curgere al lui Poiseuille este arătat în figura 18-22. Distanțele dintre liniile de curent arată că deși mișcarea este rectilinie, există un gradient de viteză în direcția transversală. Să se

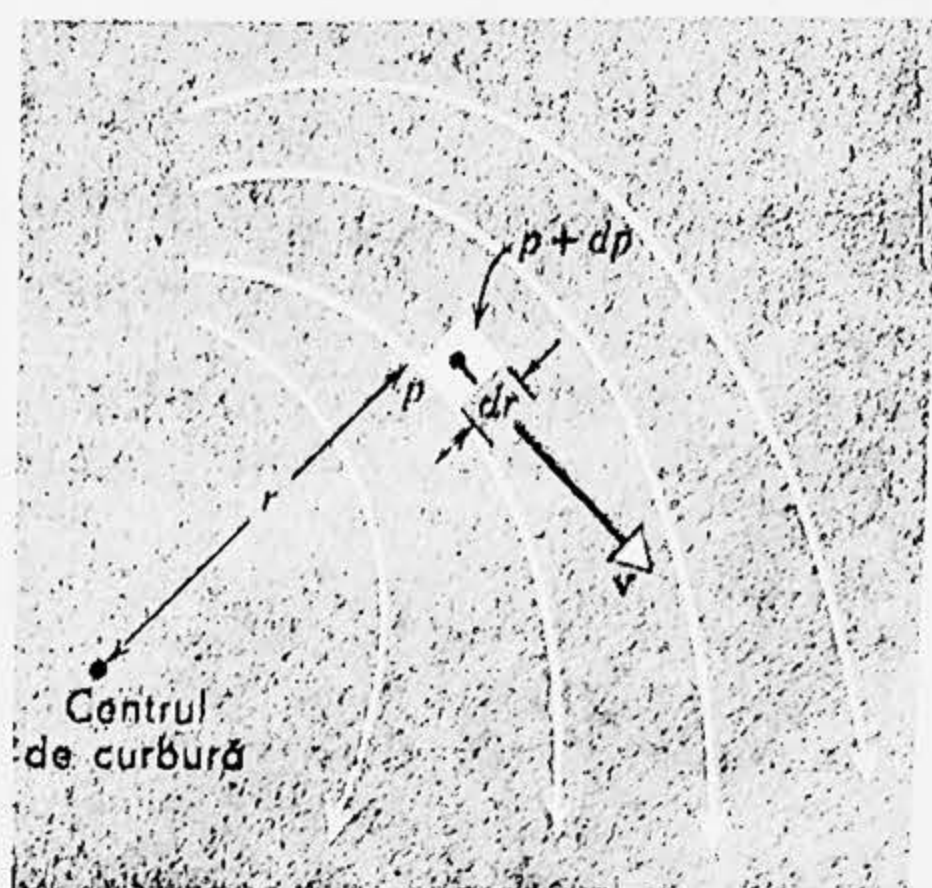


Figura 18-23.

arate că o astfel de curgere este rotațională.

25. În curgerile care sînt puternic curbate efectele centrifugale sînt apreciabile. Să considerăm un element de fluid care se mișcă cu viteza v de-a lungul unei linii de curent într-o curgere curbă într-un plan orizontal (fig. 18-23).

(a) Să se arate că $dp/dr = \rho v^2/r$, astfel încît presiunea crește cu o cantitate $\rho v^2/r$ pe unitatea de distanță perpendicular pe linia de curent cînd ne deplasăm de la partea concavă spre cea convexă a liniei de curent.

(b) Folosind apoi ecuația lui Bernoulli și acest rezultat, să se arate că vr este egal cu o constantă, astfel încît vitezele cresc spre centrul din figură. Prin urmare liniile de curent care sînt distanțate uniform între ele într-o conductă rectilinie, se vor îndesa spre peretele interior al unui pasaj curbat și se vor rări spre peretele exterior. Această problemă trebuie comparată cu problema 17-22, în care mișcarea curbă este produsă prin învîrtirea unui vas. Acolo viteza variază direct proporțional cu r , aici însă ea variază invers proporțional.

(c) Să se arate că această curgere este irotațională.

Undele în medii elastice

19-1. Unde mecanice

Propagarea undelor apare aproape în toate domeniile fizicii. Sîntem cu toții familiarizați cu undele pe apă. Există de asemenea unde sonore, precum și undele luminoase, undele radio și alte unde electromagnetice. Unul din capitolele mecanicii atomilor și a particulelor subatomice, se cheamă mecanică ondulatorie. Este clar că proprietățile și comportarea undelor sînt foarte importante în fizică.

În acest capitol și în cel următor ne restrîngem atenția la undele din mediile deformabile sau elastice. Aceste unde, printre care undele sonore obișnuite din aer constituie un exemplu, pot fi numite *unde mecanice*. Ele își au originea în deplasarea unei anumite porțiuni dintr-un mediu elastic de la poziția sa normală, ducînd la oscilații în jurul poziției de echilibru. Datorită proprietăților elastice ale mediului, perturbația se transmite de la un strat la cel vecin. Această perturbație sau undă se propagă deci prin mediu. Observăm că mediul însuși nu se mișcă ca un întreg odată cu propagarea undei; diferitele porțiuni ale mediului oscilează doar pe distanțe limitate. De exemplu, în cazul undelor pe apă, mici obiecte care plutesc, cum ar fi dopuri de plută, arată că mișcarea reală a diferitelor porțiuni de apă este ușor în sus sau în jos, înainte și înapoi. Cu toate acestea, undele de apă se mișcă progresiv de-a lungul apei. Atunci cînd ele ating obiectele care plutesc le pun în mișcare, transferînd astfel energie acestora¹. Energia poate fi transmisă pe distanțe considerabile prin intermediul mișcării ondulatorii. Energia undelor este energia cinetică și potențială a substanței însă transmiterea energiei se face prin trecerea ei de la o porțiune de substanță la cea vecină, nu printr-o mișcare la distanță mare a substanței însăși. Undele

¹ Vezi „Undele în ocean“, de Willard Bascom, *Scientific American*, august 1957.

mecanice sînt caracterizate prin transportul de energie prin substanță datorită mișcării unei perturbații în acea substanță fără vreo mișcare de ansamblu a substanței însăși.

Este necesară existența unui mediu material pentru a transmite undele mecanice. Nu avem însă nevoie de un astfel de mediu pentru a transmite undele electromagnetice, lumina trece liber, de exemplu, prin spațiul vid dintre stele. Proprietățile mediului care determină viteza unei unde prin acel mediu, după cum vom vedea în paragraful 19-5, sînt inerția și elasticitatea sa. Toate mediile materiale, inclusiv de exemplu aerul, apa și oțelul, posedă aceste proprietăți și pot transmite unde mecanice. Elasticitatea este aceea care dă naștere la forțe de restabilire asupra oricărei porțiuni de mediu deplasată din poziția sa de echilibru; inerția este aceea care ne spune cum această porțiune deplasată de mediu va răspunde la aceste forțe de restabilire. Acești doi factori determină împreună viteza undelor.

19-2. Tipuri de unde

În enumerarea undelor de apă, undelor de lumină și undelor sonore, ca exemple de mișcare ondulatorie, am clasificat undele conform proprietăților lor fizice globale. Undele pot fi clasificate și în alt mod.

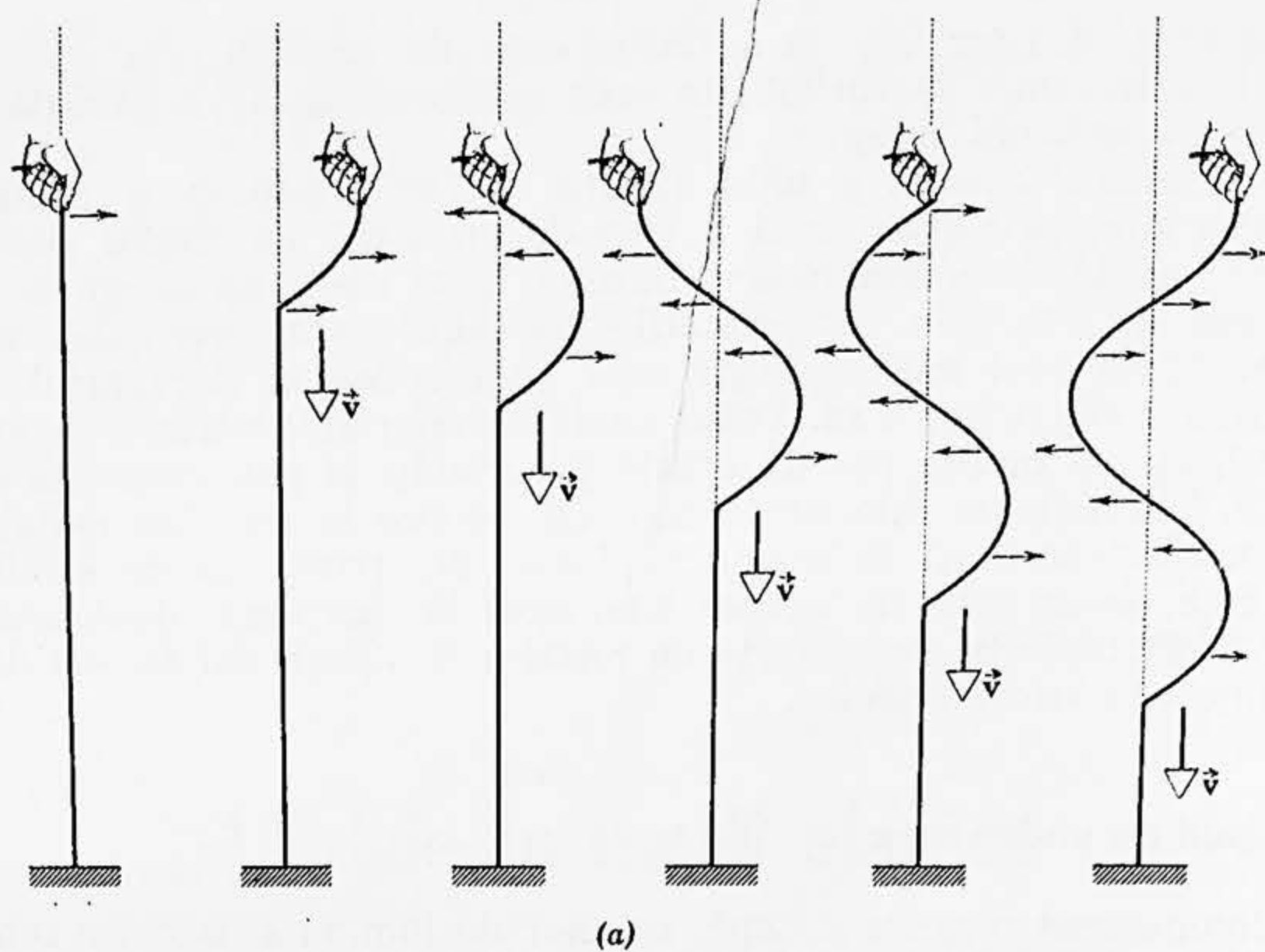
Putem distinge mai multe tipuri de unde, considerînd modul în care mișcările particulelor de substanță sînt corelate cu direcția de propagare a undelor înseși. Dacă mișcările particulelor materiale care transmit unda sînt perpendiculare pe direcția de propagare a undei avem o undă *transversală*. De exemplu, cînd o coardă verticală sub tensiune este pusă să oscileze înainte și înapoi la un capăt, se va propaga o undă transversală de-a lungul corzii. Perturbația se mișcă de-a lungul corzii însă particulele corzii vibrează perpendicular pe direcția de propagare a perturbației (fig. 19-1, a).

Undele de lumină nu sînt unde mecanice. Perturbația care se propagă nu este o mișcare de substanță ci un cîmp electromagnetic (capitolul 40). Dar deoarece cîmpurile magnetic și electric sînt perpendiculare pe direcția de propagare, undele de lumină sînt și ele unde transversale.

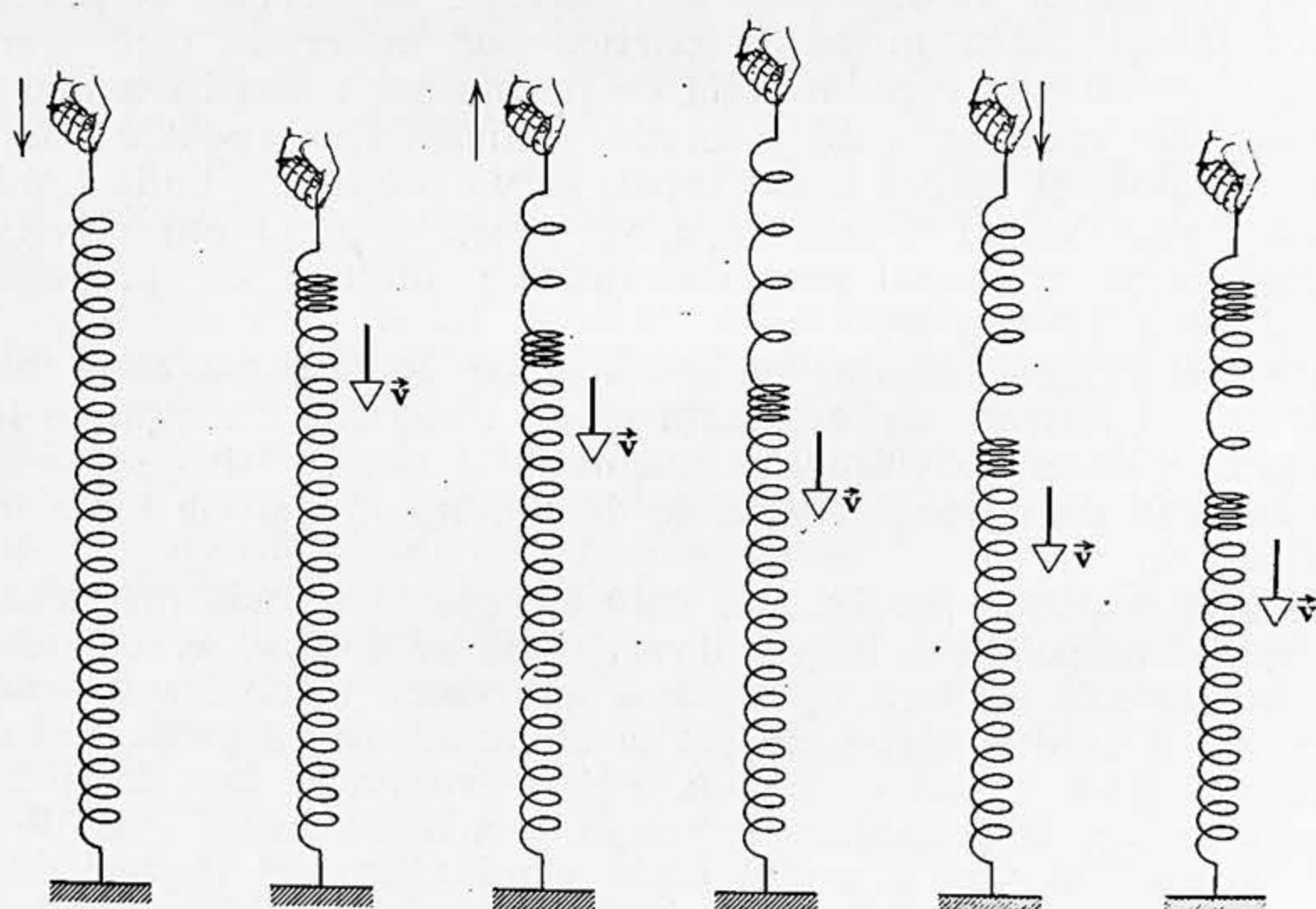
Dacă însă mișcarea particulelor care transportă o undă mecanică are loc înainte și înapoi de-a lungul direcției de propagare, avem atunci o undă *longitudinală*. De exemplu, dacă un resort vertical sub tensiune este pus să oscileze în sus și în jos la un capăt, se va propaga o undă longitudinală de-a lungul resortului. Spirele vor vibra înainte și înapoi în direcția în care se propagă perturbația de-a lungul corzii (fig. 19-1, b). Undele sonore dintr-un gaz sînt unde longitudinale și le vom discuta mai amănunțit în capitolul 20.

Unele unde nu sînt nici pur longitudinale nici pur transversale. De exemplu în cazul undelor pe suprafața apei particulele de apă se mișcă atît în sus și în jos, cît și înainte și înapoi, descriind traiectorii eliptice, atunci cînd se propagă undele pe apă.

Undele pot fi clasificate de asemenea în unde uni-, bi- și tridimensionale, după numărul de dimensiuni în care ele propagă energia.



(a)



(b)

Figura 19-1. (a) Într-o undă transversală particulele mediului (corzii) vibrează perpendicular pe direcția în care unda se propagă. (b) Într-o undă longitudinală, particulele mediului (resortului) vibrează în aceeași direcție în care se propagă unda.

Undele care se mișcă de-a lungul corzii sau resortului din figura 19-1 sînt unidimensionale. Undele de suprafață sau ondulațiile de pe apă, produse prin căderea unei pietricele într-un lac liniștit, sînt bidimensionale. Undele sonore sau undele luminoase care sînt emise radial de la o mică sursă sînt tridimensionale.

Undele pot fi clasificate mai departe după comportarea unei particule de substanță care transportă unda în timpul propagării undei. De exemplu, putem produce o *perturbație* sau o *undă singulară* care să se propage pe o sfoară întinsă, aplicînd o singură deplasare laterală la capătul ei. Fiecare particulă rămîne în repaus pînă o atinge perturbația. Apoi se mișcă un timp scurt și în sfîrșit rămîne iarăși în repaus. Dacă continuăm să mișcăm capătul sforii înainte și înapoi (fig. 19-1, a), producem un *tren de unde* care se propagă de-a lungul sforii. Dacă mișcarea noastră este periodică, vom produce un *tren periodic de unde* în care fiecare particulă a sforii are o mișcare periodică. Cel mai simplu caz particular al unei unde periodice este o *undă armonică simplă* care pune fiecare particulă într-o mișcare armonică simplă.

Să considerăm o perturbație tridimensională. Putem duce o suprafață prin toate punctele care suferă o aceeași perturbație la un moment dat. Această suprafață se mișcă, cînd timpul crește arătîndu-ne cum se propagă perturbația. Putem trasa suprafețe analoge pentru perturbațiile următoare. Pentru o undă periodică putem generaliza ideea trasînd suprafețe ale căror puncte se află în aceeași fază a mișcării. Aceste suprafețe se cheamă *fronturi de undă*. Dacă mediul este omogen și izotrop, direcția de propagare este totdeauna perpendiculară pe frontul de undă. O linie perpendiculară pe fronturile de undă, care indică direcția de propagare a undelor, se cheamă *rază*.

Fronturile de undă pot avea mai multe forme. Dacă perturbațiile se propagă într-o singură direcție, undele se cheamă *unde plane*. La un moment dat condițiile sînt aceleași peste tot în oricare plan perpendicular pe direcția de propagare. Fronturile de undă sînt plane și razele sînt linii drepte paralele. (fig. 19-2, a). Un alt caz simplu este cel al

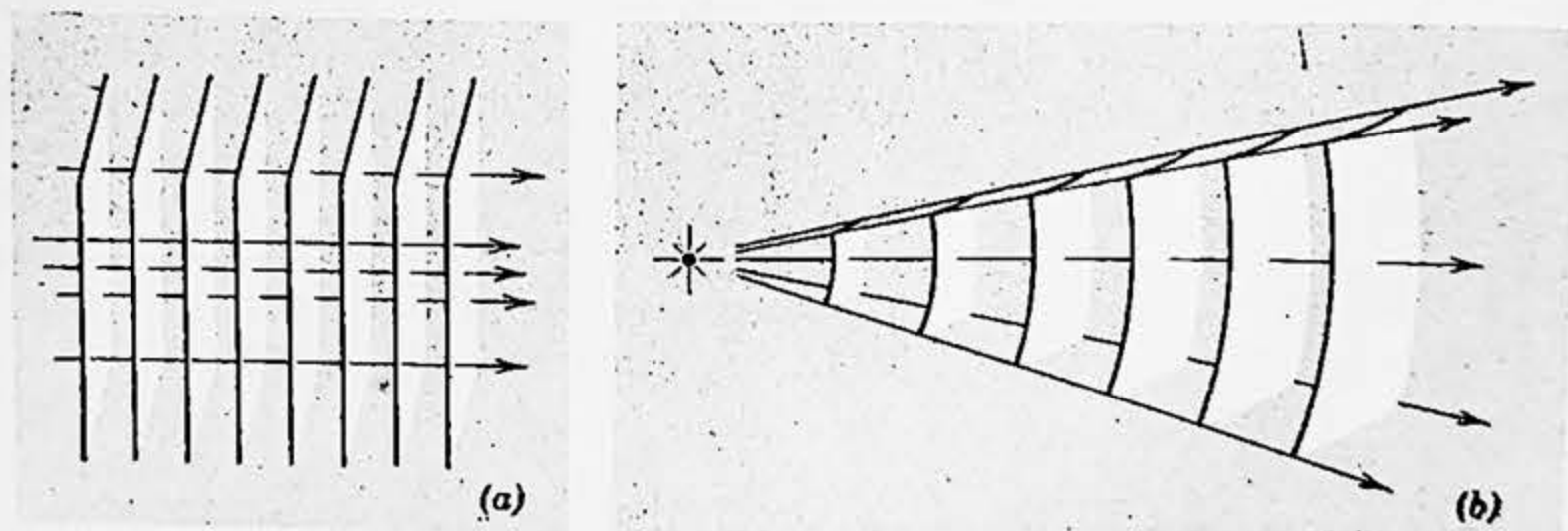


Figura 19-2. (a) O undă plană. Planele reprezintă fronturile de undă distanțate cu o lungime de undă între ele, iar săgețile reprezintă razele. (b) O undă sferică. Razele sînt radiale, iar fronturile de undă, distanțate cu o lungime de undă între ele, formează pături sferice. Departe de sursă însă, mici porțiuni ale fronturilor de undă devin aproape plane.

undelor sferice. Aici perturbația se propagă în toate direcțiile de la o sursă punctiformă de unde. Fronturile de undă sînt sfere, iar razele sînt liniile radiale care pleacă din sursa punctiformă în toate direcțiile (fig. 19-2, b). Departe de sursă, fronturile de undă sferice au o curbura foarte mică și pe o regiune limitată ele pot fi adesea privite ca plane. Desigur, există multe alte forme posibile pentru fronturile de undă.

Ne vom referi la toate aceste tipuri de unde pe măsură ce vom progresa în studiul fenomenelor ondulatorii ale fizicii. În acest capitol vom folosi adesea undele transversale dintr-o coardă pentru a ilustra proprietățile generale ale undelor. În capitolul următor vom vedea consecințele acestor proprietăți pentru sunet care este o undă mecanică longitudinală. Mai tîrziu vom discuta proprietățile undelor nemecanice, precum lumina, și ale undelor de Broglie asociate.

19-3. Unde progresive

Să considerăm o coardă lungă întinsă în direcția x de-a lungul căreia se propagă o undă transversală. La un anumit moment, de exemplu $t=0$, forma corzii poate fi reprezentată prin

$$y=f(x), \quad t=0, \quad (19-1)$$

unde y este elongația transversală a corzii în punctul x . În figura 19-3, a, se arată o formă posibilă a undei de pe coardă la $t=0$. Experiența arată că pe măsură ce timpul trece, o astfel de undă se propagă de-a lungul corzii fără să-și schimbe forma cu condiția ca pierderile interne prin frecare să fie suficient de mici. La un moment t mai tîrziu unda va parcurge o distanță vt spre dreapta, unde v este viteza undei, presupusă constantă. Ecuația curbei în momentul t este deci

$$y=f(x-vt), \quad t=t. \quad (19-2)$$

Aceasta ne dă aceeași formă a undei în jurul punctului $x=vt$ în momentul t ca și forma undei în jurul lui $x=0$ la momentul $t=0$ (fig. 19-3, b). Ecuația (19-2) este ecuația generală care reprezintă o undă

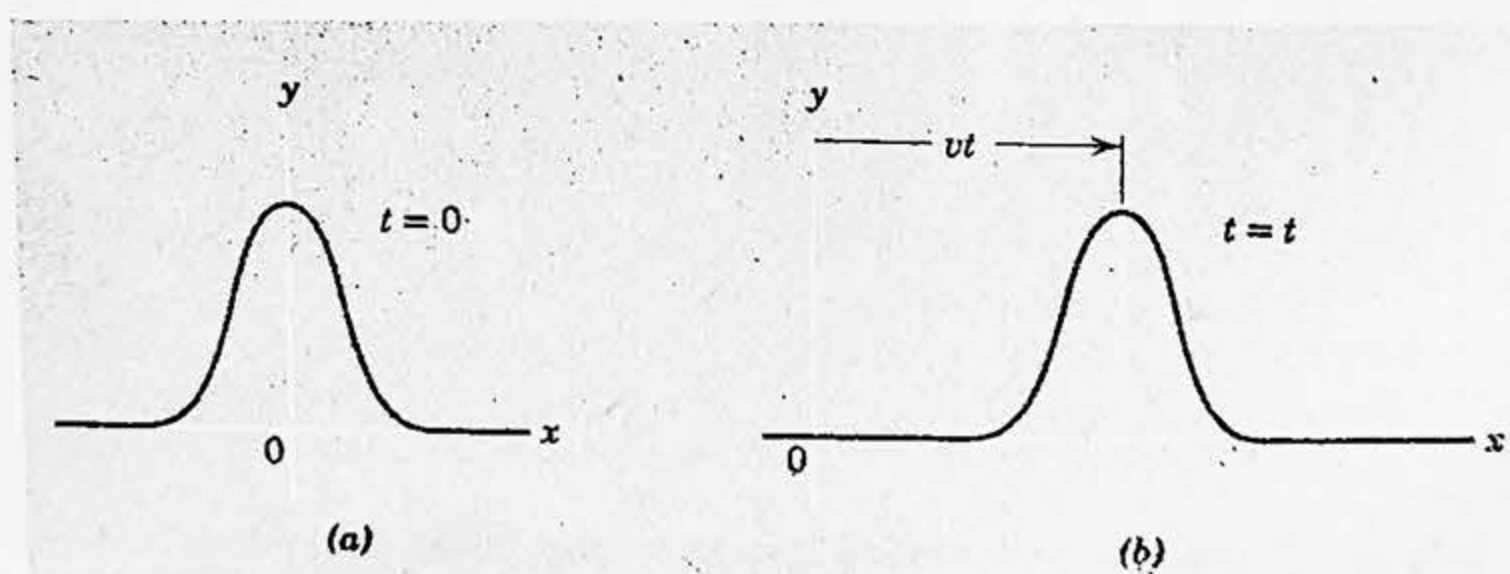


Figura 19-3. (a) Forma unei corzi (în acest caz o perturbație) la $t=0$. (b) La un timp ulterior t perturbația s-a deplasat la dreapta pe o distanță $x=vt$.

de orice formă care se propagă spre dreapta. Pentru a descrie o formă particulară trebuie să specificăm exact funcția f^1 .

Să examinăm mai atent această ecuație. Dacă vrem să urmărim o anumită porțiune (sau fază) a undei în timp, atunci urmărim în ecuație o valoare particulară a lui y (de exemplu maximul perturbației descrisă mai sus). Din punct de vedere matematic aceasta înseamnă că urmărim modul cum variază x cu t atunci când $x-vt$ are o anumită valoare particulară fixă. Vedem imediat că dacă t crește, x trebuie să crească pentru a păstra pe $(x-vt)$ fix. Prin urmare, ecuația (19-2) reprezintă în adevăr o undă care se propagă spre dreapta (x crește cu timpul). Dacă am vrea să reprezentăm o undă care se propagă spre stînga, trebuie să scriem

$$y = f(x+vt), \quad (19-3)$$

deoarece aici poziția x a unei faze fixe ($x+vt$) a undei descrește când timpul crește. Viteza unei anumite faze a undei se obține foarte ușor. Pentru o fază particulară a undei care se propagă spre dreapta, cerem ca

$$x-vt = \text{const.}$$

atunci derivînd în raport cu timpul, obținem

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \text{ sau } \frac{dx}{dt} = v, \quad (19-4)$$

astfel încît v este în realitate viteza de fază a undei. Pentru o undă care se propagă spre stînga obținem $-v$, în același mod ca și viteza sa de fază.²

Ecuația generală a unei unde poate fi interpretată mai departe. Observăm că pentru orice valoare fixă a timpului t ecuația dă pe y ca o funcție de x . Aceasta definește o curbă și această curbă reprezintă forma actuală a corzii în acest moment ales. Ea ne dă o imagine fotografică instantanee a undei în acel moment. Să presupunem, pe de altă parte, că vrem să ne concentrăm atenția asupra unui punct al corzii, adică la o valoare fixă a lui x . Atunci ecuația ne dă pe y ca o funcție de timpul t . Aceasta descrie modul în care elongația transversală a acestui punct de pe coardă variază în timp.

Argumentul prezentat mai sus este valabil atît pentru undele longitudinale cît și pentru undele transversale. Exemplul analog cu undele longitudinale este acela al unui tub rectiliniu cu gaz a cărui axă se ia ca axă x iar unda sau perturbația este o variație de presiune care se propagă de-a lungul tubului. Atunci același raționament ne conduce la o ecuație avînd forma ecuațiilor (19-2) și (19-3), care ne dă variațiile de presiune în funcție de timp în diferite puncte ale tubului. (Vezi paragraful 20-3.)

¹ Cînd spunem că „ y este o funcție de $(x-vt)$ “, înțelegem că variabilele x și t apar numai în combinația $x-vt$. De exemplu, $\sin k(x-vt)$, $\log(x-vt)$ și $(x-vt)^3$ sînt funcții de $x-vt$, dar x^2-vt^2 nu este.

² În perturbațiile care pot fi reprezentate ca un grup de unde, energia poate fi transportată cu o viteză diferită de viteza de fază a undei individuale. Această viteză de grup va fi considerată în capitolul 39 în legătură cu undele electromagnetice. Pînă atunci ori de cîte ori folosim termenul de viteză a undei înțelegem viteza de fază a undei.

Să considerăm acum o formă particulară a undei, a cărei importanță va deveni curînd clară. Să presupunem că în momentul $t=0$ avem un tren de unde de-a lungul corzii dat de

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (19-5)$$

Forma undei este o curbă sinusoidală (fig. 19-4). Elongația maximă y_m este *amplitudinea* curbei sinusoidale. Valoarea elongației transversale y este aceeași în x ca și în $x+\lambda$, $x+2\lambda$ etc. Simbolul λ se numește *lungime de undă* a trenului de unde și reprezintă distanța dintre două puncte adiacente ale undei avînd aceeași fază. După un timp t unda se propagă spre dreapta cu o viteză de fază v . Prin urmare ecuația undei în momentul t este

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \quad (19-6)$$

Observăm că această ecuație are forma cerută pentru o undă progresivă (ecuația 19-2).

Perioada T este timpul necesar undei să parcurgă o distanță egală cu o lungime de undă, astfel încît

$$\lambda = vT. \quad (19-7)$$

Introducînd această relație în ecuația undei, obținem

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \quad (19-8)$$

Din această expresie rezultă clar că y , în fiecare moment, are aceeași valoare în $x+\lambda$, $x+2\lambda$ etc., ca și în punctul x și că y în orice punct are aceeași valoare la momentele $t+T$, $t+2T$ etc. ca și la momentul t .

Pentru a aduce ecuația (19-8) la o formă mai compactă, definim două mărimi: *numărul de undă* k și *frecvența unghiulară* ω (vezi ecuația 16-12). Ele sînt date de

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{și} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (19-9)$$

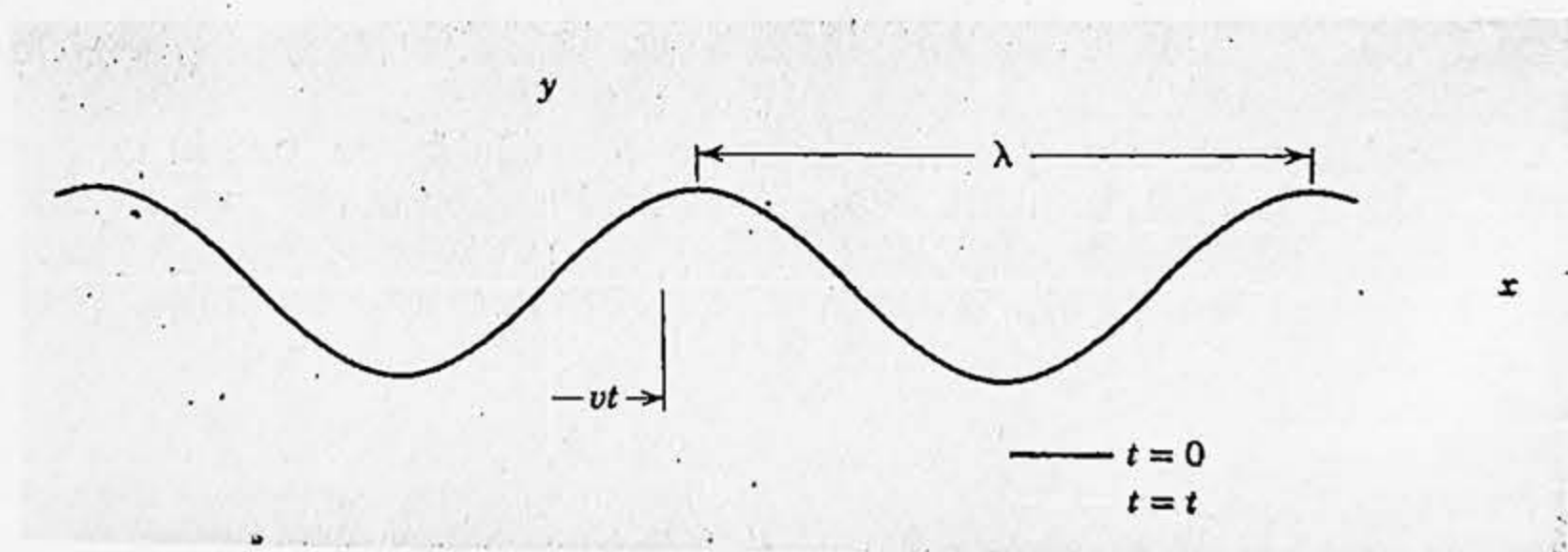


Figura 19-4. La $t=0$ coarda are forma $y = y_m \sin 2\pi x / \lambda$ (linia plină). La un moment ulterior t unda sinusoidală s-a mișcat spre dreapta cu o distanță $x=vt$ și coarda are o formă dată de $y = y_m \sin 2\pi (x-vt) / \lambda$.

Cu ajutorul acestor mărimi ecuația unei unde sinusoidale care se propagă spre dreapta este

$$y = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (19-10, a)$$

Pentru o undă sinusoidală care se propagă spre stînga, avem

$$y = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (19-10, b)$$

Comparînd ecuațiile (19-7) și (19-9) vedem că viteza de fază v a undei este dată de

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (19-11)$$

În undele progresive date de ecuațiile (19-10, a) și (19-10, b) am presupus că elongația y este nulă în punctul $x=0$ la momentul $t=0$. Aceasta desigur nu este necesar. Expresia generală a unui tren de unde sinusoidale care se propagă spre dreapta este

$$y = y_m \sin(kx - \omega t - \Phi)$$

unde Φ se cheamă fază inițială sau constantă de fază. De exemplu dacă $\Phi = -90^\circ$, elongația y în punctul $x=0$ și la momentul $t=0$ este y_m . Acest exemplu particular se poate scrie

$$y = y_m \cos(kx - \omega t),$$

deoarece funcția cosinus este defazată cu 90° față de funcția sinus.

Dacă ne fixăm atenția asupra unui punct dat de pe coardă, de exemplu $x = \pi/k$, elongația y din acel punct poate fi scrisă astfel¹

$$y = y_m \sin(\omega t + \Phi).$$

Aceasta este similară cu ecuația (15-29) pentru mișcarea armonică simplă. Prin urmare, oricare element particular al corzii execută o mișcare armonică simplă în jurul poziției sale de echilibru atunci cînd acest tren de unde se propagă de-a lungul corzii.

19-4. Principiul suprapunerii

Este un fapt experimental că pentru multe tipuri de unde, două sau mai multe unde se pot propaga prin același spațiu independent una de alta. Faptul că undele acționează independent una de alta înseamnă că elongația unei particule la un moment dat este pur și simplu rezultanta elongațiilor pe care le-ar produce fiecare undă individuală. Acest proces de compunere vectorială a elongațiilor unei particule se cheamă *suprapunere* (*superpoziție*). De exemplu, undele radio de diferite frecvențe trec prin antena de radio; curenții electrici produși în antenă prin acțiunea suprapusă a tuturor acestor unde sînt foarte complecși. Cu toate acestea noi putem totuși asculta o anumită stație, semnalul pe care îl recepționăm de la această stație fiind în principiu același ca cel pe care l-am recepționa dacă toate celelalte stații ar înceta emisiunea. Analog, într-un sunet putem asculta notele emise de instrumentele indi-

¹ Folosind faptele că $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$.

viduale dintr-o orchestră, deși unda sonoră care ajunge la urechile noastre de la întreaga orchestră este foarte complexă.

Pentru undele din medii deformabile principiul suprapunerii (superpoziției) este valabil ori de câte ori relația matematică dintre deformare și forța elastică este o simplă proporționalitate. O astfel de relație este exprimată matematic printr-o ecuație liniară. Pentru undele electromagnetice principiul suprapunerii este valabil din cauză că relațiile matematice dintre câmpul electric și cel magnetic sînt liniare.

Principiul suprapunerii pare atît de evident încît merită să subliniem faptul că el nu este totdeauna valabil. Superpoziția nu are loc atunci cînd ecuațiile care guvernează mișcarea ondulatorie nu sînt liniare. Din punct de vedere fizic aceasta se întîmplă atunci cînd perturbația ondulatorie este relativ mare și legile liniare obișnuite ale acțiunii mecanice nu mai sînt valabile. De exemplu, dincolo de limita de elasticitate legea lui Hooke nu mai este valabilă și relația liniară $F = -kx$ nu mai poate fi folosită.

În ceea ce privește sunetul, explozii violente creează unde de șoc. Deși undele de șoc sînt unde elastice longitudinale în aer, ele se comportă diferit de undele sonore obișnuite. Ecuația care guvernează propagarea lor este pătratică și superpoziția nu mai e valabilă. În cazul a două note foarte puternice urechea aude ceva mai mult decît dacă le-ar auzi individual. Aceia care sînt familiarizați cu aparatele de mare fidelitate știu că această „distorsiune de intermodulație” între două tonuri se naște atunci cînd sistemul nu mai combină tonurile liniar, și că această distorsiune este mai pronunțată atunci cînd amplitudinea tonurilor este mare. Un exemplu fizic mai evident îl constituie undele pe apă. Ondulațiile apei nu pot trece independent printr-un talaz așa cum ele pot trece printr-un val lin.

Importanța principiului suprapunerii din punct de vedere fizic este aceea că, acolo unde este valabil, el face posibil să analizăm o mișcare ondulatorie complicată ca o combinație de unde simple. În adevăr, după cum a arătat matematicianul francez J. Fourier (1768—1830), tot ceea ce este necesar pentru a construi cea mai generală formă a unei unde periodice sînt undele armonice¹. Fourier a arătat că orice mișcare periodică a unei particule poate fi reprezentată ca o combinație a mișcărilor armonice simple. De exemplu, dacă $y(t)$ reprezintă mișcarea unei surse de unde avînd o perioadă T , putem descompune pe $y(t)$ după cum urmează:

$$y(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots$$

unde $\omega = 2\pi/T$. Această expresie se cheamă serie Fourier. Coeficienții A și coeficienții B sînt constante care au valori bine definite pentru orice mișcare periodică particulară $y(t)$ (vezi de exemplu fig. 19-5). Dacă mișcarea nu este periodică, cum este o perturbație, suma se înlocuiește cu o integrală, așa numita integrală Fourier. Prin urmare, orice mișcare a unei surse de unde poate fi reprezentată cu ajutorul mișcărilor armonice simple. Deoarece mișcarea sursei generează undele, nu este o sur-

¹ Vezi de exemplu, Thomas, *Analiza matematică și geometria analitică*, Addison-Wesley, ediția a doua, 1953, p. 596—599.

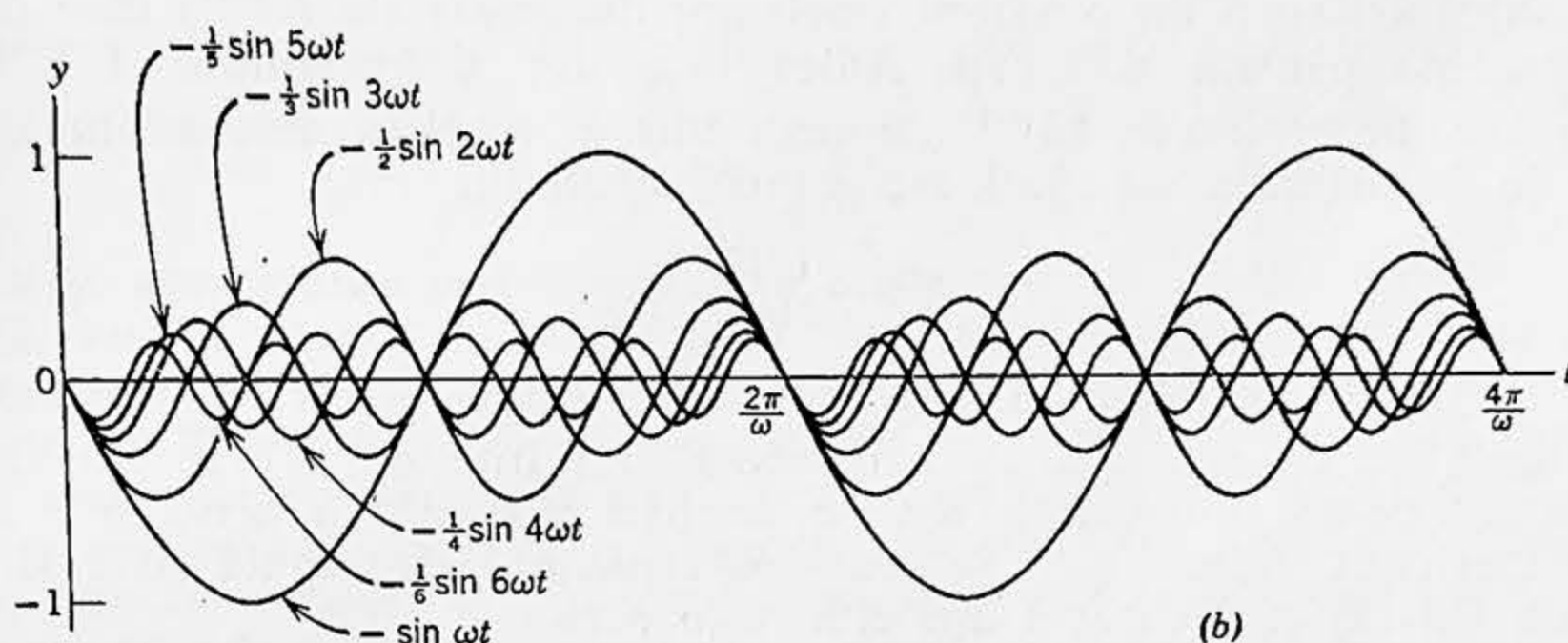
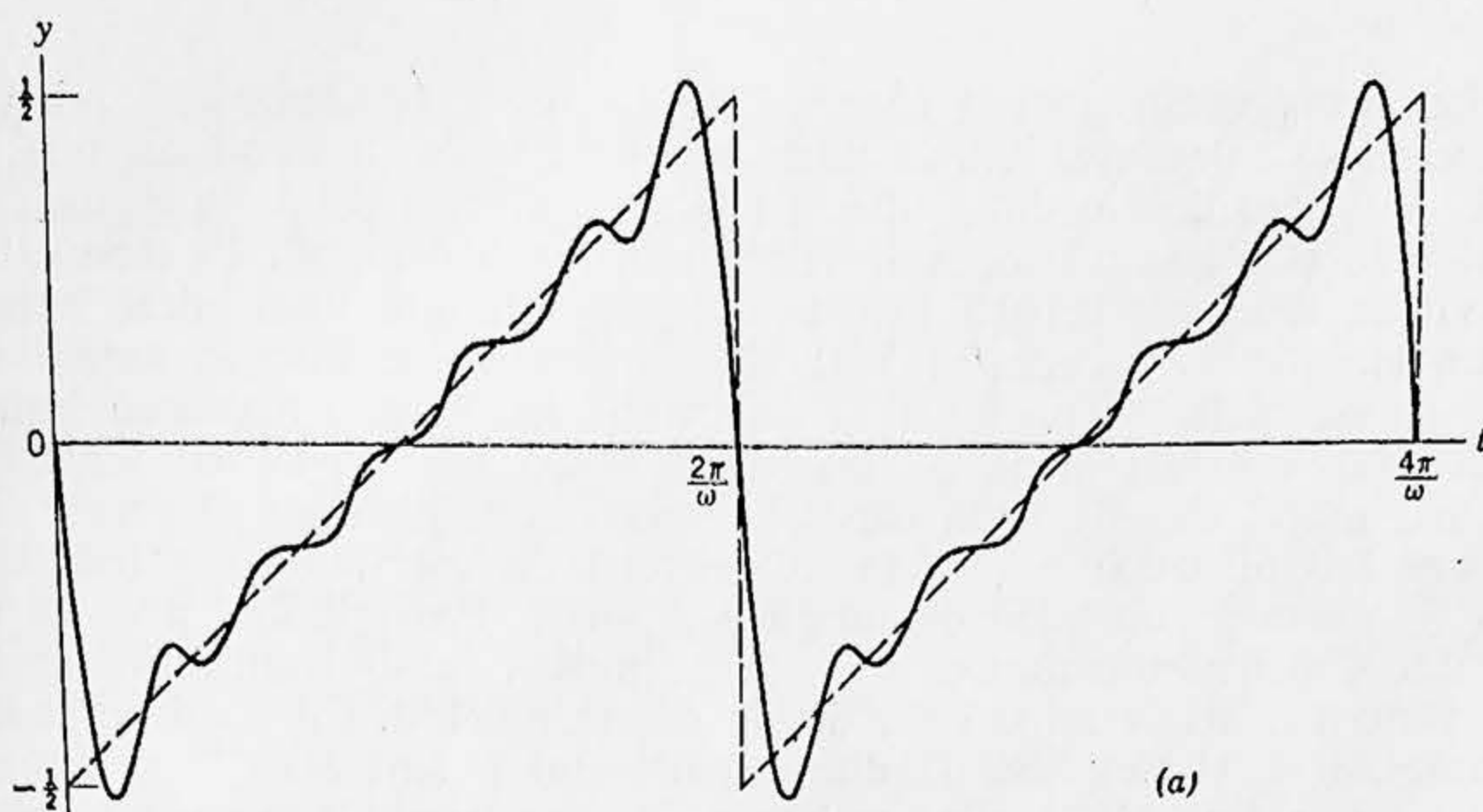


Figura 19-5. (a) Linia întreruptă reprezintă „unda” în dinți de ferăstrău bine cunoscută în electronică. Ea poate fi scrisă $y(t) = (\omega/2\pi)t - 1/2$ pentru $0 < t < 2\pi/\omega$, ca $y(t) = (\omega/2\pi)t - 3/2$ pentru $2\pi/\omega < t < 4\pi/\omega$ etc. Seria Fourier pentru această funcție este $y(t) = -\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots$. Linia plină reprezintă suma primilor șase termeni ai acestei serii și se poate considera că ea aproximează destul de bine curba în dinți de ferăstrău, cu excepția abaterilor din vecinătatea discontinuităților. Cu cât este inclus un număr mai mare de termeni ai seriei, cu atât aproximația devine mai bună. (b) Aici sînt arătați primii șase termeni ai seriei Fourier care, compuși fiind, dau curba plină de la (a).

priză faptul că undele înseși pot fi analizate ca fiind combinații de unde armonice simple. În aceasta constă importanța mișcării armonice simple și a undelor armonice simple.

19-5. Viteza undelor

Date fiind caracteristicile mediului, este posibil să calculăm viteza undelor plecînd de la principiile fundamentale ale mecanicii newtoniene. În acest paragraf vom continua să ne concentrăm atenția asupra

undelor transversale într-o coardă, iar în tema suplimentară III vom arăta cum se calculează viteza unor astfel de unde în cazul cel mai general. Aici considerăm două alte tratări: o tratare bazată pe analiza dimensională și o analiză mecanică ceva mai puțin generală în care calculăm viteza unei perturbații transversale de-a lungul unei corzi întinse.

Am stabilit în paragraful 19-1 că viteza undelor într-un mediu depinde de elasticitatea mediului și de inerția sa. Pentru o coardă întinsă elasticitatea este măsurată de tensiunea F din coardă; cu cât tensiunea este mai mare, cu atât forța elastică asupra unui element al corzii care îl trage lateral va fi mai mare. Caracteristica inerțială este măsurată de μ — masa pe unitatea de lungime a corzii. Presupunând apoi că viteza undei v depinde numai de F și μ , putem folosi analiza dimensională pentru a afla cum v depinde de aceste mărimi. Cu ajutorul masei M , lungimii L și timpului T , dimensiunile lui F sînt MLT^{-2} și dimensiunile lui μ sînt ML^{-1} . Singurul mod în care aceste dimensiuni pot fi combinate pentru a da o viteză (care are dimensiunile LT^{-1}) este de a lua rădăcina pătrată din F/μ . Adică F/μ are dimensiunile L^2T^{-2} și $\sqrt{F/\mu}$ are dimensiunile LT^{-1} ale unei viteze. Analiza dimensională nu poate da factori adimensionali, astfel încît rezultatul

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (19-12)$$

poate să nu fie complet. Tot ceea ce putem spune este că viteza undei este egală cu o constantă adimensională înmulțită cu $\sqrt{F/\mu}$. Valoarea constantei poate fi obținută dintr-o analiză mecanică a problemei sau din experiență. Aceste metode arată că constanta este egală cu 1 și că ecuația (19-12) este corectă așa cum este scrisă.

Să deducem acum viteza unei perturbații într-o coardă întinsă, printr-o analiză mecanică. În figura 19-6 se arată o undă care se propagă de la dreapta spre stînga în coardă cu o viteză v . Ne putem imagina că întreaga coardă se mișcă de la stînga spre dreapta cu aceeași viteză astfel încît perturbația produsă de undă rămîne fixă în spațiu, în timp ce particulele care compun coarda trec succesiv prin perturbație. Aceasta înseamnă pur și simplu că, în loc de a lua reperul nostru legat de pereții între care este întinsă coarda, noi alegem un reper care se mișcă uniform față de el. Deoarece legile lui Newton conțin numai accelerații, care sînt aceleași în ambele repere, le putem afla în oricare reper. Vom alege reperul care este mai convenabil.

Considerăm o mică secțiune a perturbației de lungime Δl care formează un arc de cerc de rază R , așa cum se arată în diagramă. Dacă μ este masa pe unitatea de lungime a corzii, adică așa numita densitate liniară, atunci $\mu\Delta l$ este masa acestui element. Tensiunea F din coardă este tracțiunea tangențială de la

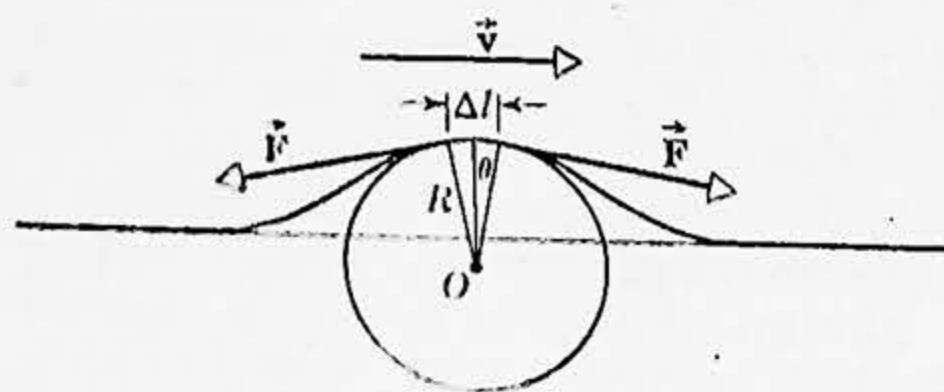


Figura 19-6. Deducerea vitezei undei prin considerarea forțelor care acționează asupra unei secțiuni a corzii de lungime Δl .

fiecare capăt al acestui mic segment de coardă. Componentele orizontale se reduc iar componentele verticale sînt egale fiecare cu $F \sin \theta$. Prin urmare, forța verticală totală este $2F \sin \theta$. Deoarece θ este mic putem lua $\sin \theta \cong \theta$ și

$$2F \sin \theta = 2F \theta = 2F \frac{(\Delta l/2)}{R} = F \frac{\Delta l}{R}.$$

Aceasta dă forța care imprimă accelerație centripetă particulelor de coardă, îndreptată către O. Dar forța centripetă care acționează asupra masei $\mu \Delta l$ ce se mișcă pe un cerc de rază R cu viteza v este $\mu \Delta l v^2 / R$; vezi paragraful 6-3. Observăm că viteza tangențială v a acestui element de masă de-a lungul creștetului arcului este orizontală și este aceeași ca și viteza de fază a perturbației. Combinînd cele două expresii echivalente date, obținem:

$$F \frac{\Delta l}{R} = \frac{\mu \Delta l v^2}{R}$$

sau

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Dacă amplitudinea perturbației ar fi foarte mare în comparație cu lungimea corzii, nu am putea folosi aproximația $\sin \theta \cong \theta$. Mai mult, tensiunea F din coardă ar fi schimbată de prezența perturbației, în timp ce noi am presupus că F este neschimbat față de tensiunea inițială din coarda întinsă. Prin urmare, rezultatul nostru, ca și suprapunerea, este valabil numai pentru deplasări transversale relativ mici ale corzii — caz care este însă larg aplicabil în practică. Observăm de asemenea că viteza undei este independentă de forma undei, deoarece nu am folosit în demonstrație nici o ipoteză particulară asupra formei reale a perturbației.

Frecvența unei unde este în mod natural determinată de frecvența sursei. Viteza cu care unda se propagă într-un mediu este determinată de proprietățile mediului, după cum am ilustrat mai înainte. Odată frecvența ν și viteza v a undei determinate, lungimea de undă λ este fixată. În adevăr, din ecuația (19-7) și din relația $\nu = 1/T$ avem

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (19-13)$$

Exemplul 1. O undă sinusoidală transversală este generată la un capăt al unei corzi orizontale lungi de către o bară care mișcă capătul în sus și în jos pe o distanță de 10 cm. Mișcarea este continuă și repetată regulat de două ori pe secundă.

(a) Dacă coarda are o densitate liniară de 20 g/m și este întinsă cu o tensiune de 10 N, să se afle viteza, amplitudinea, frecvența și lungimea de undă a mișcării ondulatorii.

Capătul se mișcă cu 5 cm lateral de la poziția de echilibru, întii în sus, iar apoi în jos, pentru a da o deplasare totală de 10 cm. Prin urmare, amplitudinea y_m este 5 cm.

Întreaga mișcare se repetă de două ori pe secundă astfel încît frecvența este 2,0 vibrații pe secundă.

Viteza undei este dată de $v = \sqrt{F/\mu}$. Dar $F=10$ N și $\mu=20$ g/m, astfel încît

$$v = \sqrt{\frac{10 \text{ N}}{20 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 10\sqrt{5} \approx 22,4 \text{ m/s.}$$

Lungimea de undă este dată de $\lambda = v/\nu$ astfel încît

$$\lambda = \frac{22,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,0 \text{ s}^{-1}} = 11,2 \text{ m.}$$

(b) Presupunînd că unda se mișcă de la stînga spre dreapta și că la momentul $t=0$ capătul corzii descris de coordonata $x=0$ se află în poziția sa de echilibru $y=0$, să se scrie ecuația undei.

Expresia generală a unei unde sinusoidale transversale care se mișcă de la stînga la dreapta este

$$y = y_m \sin(kx - \omega t - \Phi).$$

Punînd condiția ca $y=0$ pentru $x=0$ și $t=0$, obținem

$$0 = y_m \sin(-\Phi),$$

ceea ce înseamnă că faza inițială Φ trebuie să fie zero¹. Prin urmare, pentru această undă

$$y = y_m \sin(kx - \omega t)$$

și cu valorile găsite,

$$y_m = 5,0 \text{ cm,}$$

$$\lambda = 11,2 \text{ m} \quad \text{sau} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,56 \text{ m}^{-1},$$

$$v = 22,4 \text{ m} \quad \text{sau} \quad \omega = vk = 12,5 \text{ s}^{-1},$$

obținem pentru ecuația undei

$$y = 0,050 \cdot \sin(0,56 x - 12,5 t),$$

unde x și y sînt exprimați în metri, iar t în secunde.

Exemplul 2. Atunci cînd această undă se propagă de-a lungul corzii, fiecare particulă a corzii se mișcă în sus și în jos perpendicular pe direcția mișcării undei. Să se afle viteza și accelerația unei particule la distanța de 2,0 m de extremitate.

Forma generală a acestei unde este

$$y = y_m \sin(kx - \omega t) = y_m \sin k(x - vt).$$

Viteza v din această ecuație este viteza orizontală constantă a trenului de unde. Ceea ce vrem să aflăm acum este viteza unei particule din coardă prin care trece această undă. Această viteză a particulei nu este nici orizontală, nici constantă. În adevăr, fiecare particulă se mișcă vertical adică în direcția axei y . Pentru a determina viteza particulei, pe care o vom nota cu litera u , să ne fixăm atenția asupra unei particule într-o anumită poziție x , adică x este acum o con-

¹ Ea poate fi de asemenea π , 2π , 3π etc. dar aceste valori ale lui Φ nu schimbă rezultatele noastre finale, ceea ce studentul poate arăta.

stantă în această ecuație, și să ne întrebăm cum variază elongația particulei y în timp. Cu x constant obținem

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_m \omega \cos(kx - \omega t),$$

în care notația *derivatei parțiale* $\partial y / \partial t$ ne amintește că deși în general y este o funcție atât de x cât și de t , noi presupunem aici că x rămâne constant, astfel încât t devine singura variabilă. Accelerația a a particulei pentru această valoare (constantă) a lui x este

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y.$$

Aceasta arată că pentru fiecare particulă prin care trece această undă sinusoidală transversală avem exact o mișcare armonică simplă, deoarece accelerația a este proporțională cu elongația y dar opusă ca sens.

Pentru o particulă situată în punctul $x = 2,0$ m pentru unda de la exemplul 1, în care

$$y_m = 0,050 \text{ m}, \quad k = 0,56 \text{ m}^{-1}, \quad \omega = 12,5 \text{ s}^{-1},$$

obținem

$$u = -y_m \omega \cos(kx - \omega t)$$

sau

$$u = -0,050 \cdot 12,5 \cos(0,56 \cdot 2,0 - 12,5 t) = -0,62 \cos(1,12 - 12,5 t)$$

și

$$a = -\omega^2 y$$

sau

$$a = -(12,5)^2 \cdot 0,050 \sin(1,12 - 12,5 t),$$

unde t este exprimat în secunde, u în metri pe secundă și a în metri pe secundă pătrat.

Puteți descrie mișcarea acestei particule la momentul $t = 4$ s?

19-6. Puterea și intensitatea în mișcarea ondulatorie

În figura 19-7 am desenat un element al corzii întinse într-o anumită poziție x și la un anumit moment de timp t . Componenta transversală a tensiunii din coardă, exercitată de către elementul din stînga lui x asupra elementului din dreapta lui x este

$$F_{trans} = -F \frac{\partial y}{\partial x}.$$

\vec{F} este tensiunea din coardă; $\partial y / \partial x$ dă tangenta unghiului făcut de direcția lui \vec{F} cu orizontala la momentul t considerat și, deoarece presupunem deplasări mici, aceasta poate fi luată egală de asemenea, cu sinusul unghiului. Forța transversală este în direcția creșterii lui y ; în figură panta este negativă, astfel încât forța transversală este pozitivă. Viteza transversală a particulei din x este $\partial y / \partial t$, care poate fi pozitivă sau negativă. Puterea dezvoltată de forță în x sau energia care

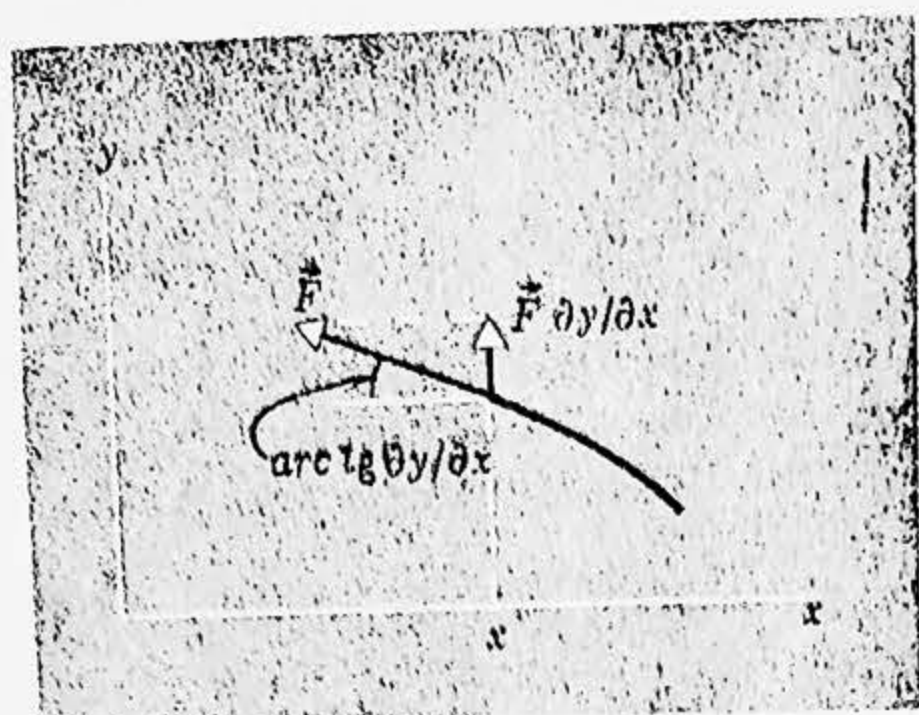


Figura 19-7. Componenta transversală a tensiunii din coardă în fiecare punct x este $F(\partial y / \partial x)$.

trece prin punctul x în unitatea de timp în sensul pozitiv al axei x (vezi paragraful 7-6) este

$$P = \left(-F \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Să presupunem că unda din coardă este o undă sinusoidală simplă

$$y = y_m \sin(kx - \omega t).$$

Atunci mărimea pantei în x este

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ky_m \cos(kx - \omega t), \quad t = \text{const}$$

și forța transversală este

$$-F \frac{\partial y}{\partial x} = -F ky_m \cos(kx - \omega t).$$

Viteza transversală a unei particule din coardă în punctul x este

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t), \quad x = \text{const.}$$

Prin urmare, puterea transmisă prin punctul x este

$$P = (-F ky_m)(-\omega y_m) \cos^2(kx - \omega t) = \\ = y_m^2 k \omega F \cos^2(kx - \omega t).$$

Observăm că puterea sau viteza de propagare a energiei nu este constantă. Puterea nu este constantă deoarece puterea de intrare oscilează. Când energia se propagă de-a lungul corzii, ea este înmagazinată în fiecare element al corzii sub formă de energie cinetică a mișcării și energie potențială de deformare. Ecuația este asemănătoare cu cea dintr-un circuit de curent alternativ; aici energia este înmagazinată atât în inductanță cât și în capacitate, și puterea la intrare oscilează. Pentru o coardă puterea este absorbită de frecările interne și de efectele de viscozitate și apare sub formă de căldură; în circuitul electric puterea este disipată în rezistor și apare sub formă de căldură. Puterea la intrare pentru o coardă sau pentru un circuit se ia de obicei ca valoare medie pe o perioadă a mișcării. Puterea medie dezvoltată este

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt,$$

unde T este perioada. Folosind faptul că valoarea medie a lui $\sin^2 x$ sau $\cos^2 x$ pe un ciclu este $1/2$, obținem pentru coardă

$$\bar{P} = \frac{1}{2} y_m^2 k \omega F = 2\pi^2 y_m^2 v^3 \frac{F}{v},$$

un rezultat care nu depinde de x sau de t . Pentru coardă însă, $v = \sqrt{F/\mu}$, astfel încît

$$\bar{P} = 2\pi^2 y_m^2 v^3 \mu v.$$

Faptul că viteza de transfer a energiei depinde de pătratul amplitudinii undei și de pătratul frecvenței undei, este valabil în general, pentru toate tipurile de undă.

Studentul trebuie să confirme faptul că dacă am fi ales o undă care se propagă în sensul negativ al axei x , am fi obținut rezultatul cu semnul minus, adică unda dezvoltă putere în direcția propagării ei.

Într-o undă tridimensională, cum este o undă de lumină sau o undă sonoră emisă de o sursă punctiformă, este mai relevant să vorbim de *intensitatea* undei. Intensitatea este definită ca puterea transmisă printr-o unitate de arie perpendiculară pe direcția în care se propagă unda. Exact ca și puterea într-o undă dintr-o coardă, intensitatea unei unde spațiale este totdeauna proporțională cu pătratul amplitudinii.

Cînd o undă progresează în spațiu, energia sa poate fi absorbită. De exemplu într-un mediu vîscos, cum este un sirop sau plumbul, undele mecanice se atenuează rapid ca amplitudine și dispar, datorită absorbției energiei prin frecările interne. În majoritatea cazurilor care prezintă interes pentru noi absorbția va fi însă neglijabilă. Peste tot în acest capitol am presupus că nu există pierderi de energie într-o undă dată, indiferent cît de departe se propagă ea.

Exemplul 3. De la o sursă de unde a cărei putere de ieșire este P se propagă unde sferice (vezi fig. 19-8). Să se afle cum depinde intensitatea undei de distanța pînă la sursă. Presupunem că mediul este izotrop și că sursa radiază uniform în toate direcțiile, adică emisia sa este sferic simetrică.

Intensitatea unei unde tridimensionale este puterea transmisă printr-o unitate de arie perpendiculară pe direcția propagării. Atunci cînd frontul de undă se propagă de la o distanță r_1 de sursa din centru pînă la o distanță r_2 , aria suprafeței sale crește de la $4\pi r_1^2$ la $4\pi r_2^2$. Dacă nu există absorbție de energie, energia totală transportată pe secundă de către undă rămîne constantă, egală ca valoare cu P , astfel încît

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2,$$

unde I_1 și I_2 sînt intensitățile undei în r_1 , respectiv r_2 . Prin urmare

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

și intensitatea undei variază invers proporțional cu pătratul distanței sale pînă la sursă. Deoarece intensitatea este proporțională cu pătratul amplitudinii, amplitudinea undei trebuie să varieze invers proporțional cu distanța pînă la sursă.

19-7. Interferența undelor

Interferența se referă la efectele fizice ale suprapunerii a două sau mai multe trenuri de unde. Să considerăm două unde de frecvențe și amplitudini egale care se propagă cu aceeași viteză pe aceeași direcție

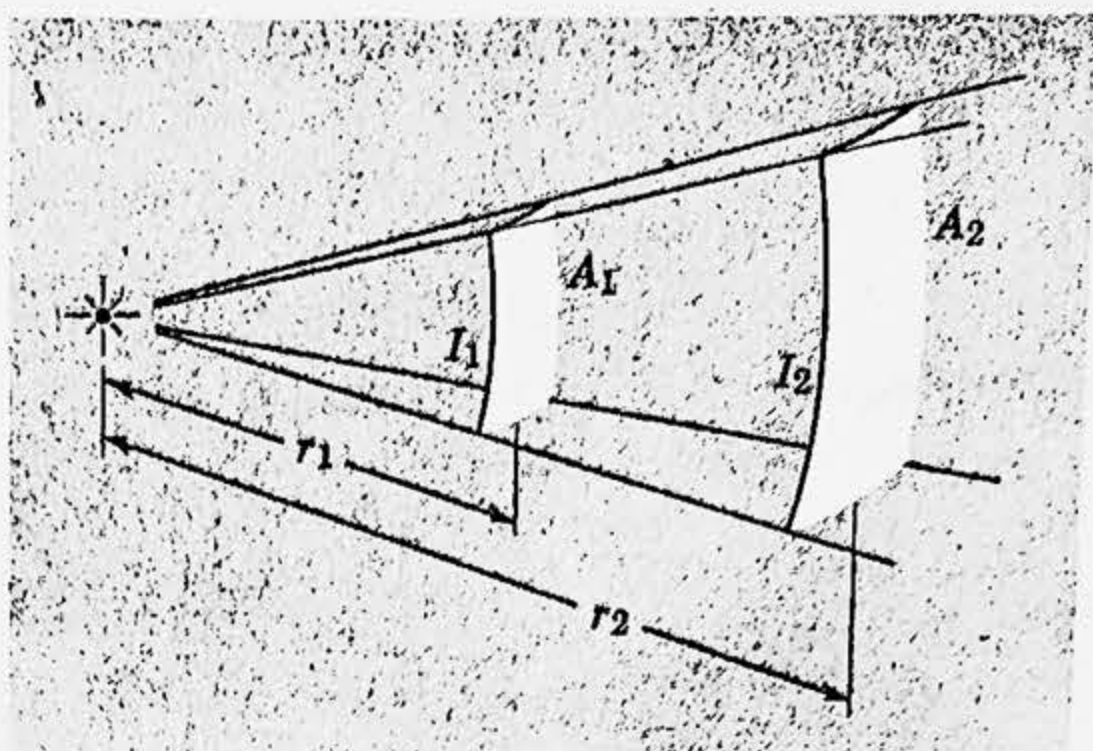


Figura 19-8. Exemplul 3.

($+x$) dar cu o diferență de fază Φ între ele. Ecuațiile celor două unde vor fi

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t - \Phi) \quad (19-14)$$

și

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (19-15)$$

Putem retranscrie prima ecuație sub două forme echivalente

$$y_1 = y_m \sin \left[k \left(x - \frac{\Phi}{k} \right) - \omega t \right] \quad (19-14, a)$$

sau

$$y_1 = y_m \sin \left[xk - \omega \left(t + \frac{\Phi}{\omega} \right) \right] \quad (19-14, b)$$

Ecuațiile (19-14, a) și (19-5) ne sugerează faptul că dacă luăm un „instantaneu” al celor două unde la un moment t , le vom găsi deplasate una față de alta de-a lungul axei x cu o distanță constantă Φ/k . Ecuațiile (19-14, b) și (19-15) ne sugerează faptul că dacă ne-am așeza în orice punct x , cele două unde vor da naștere la două mișcări armonice simple avînd o diferență de timp constantă Φ/ω . Aceasta ne dă o privire asupra semnificației diferenței de fază Φ .

Să găsim acum unda rezultantă, care, în ipoteza că se produce suprapunerea, este egală cu suma ecuațiilor (19-14), (19-15) sau

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t - \Phi) + \sin(kx - \omega t)].$$

Din formula trigonometrică pentru suma sinusurilor a două unghiuri

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} (C - B), \quad (19-16)$$

obținem

$$\begin{aligned} y &= y_m \left[2 \sin \left(kx - \omega t - \frac{\Phi}{2} \right) \cos \frac{\Phi}{2} \right], \\ y &= \left(2y_m \cos \frac{\Phi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t - \frac{\Phi}{2} \right). \end{aligned} \quad (19-17)$$

Unda rezultantă corespunde unei noi unde avînd aceeași frecvență dar cu o amplitudine $2y_m \cos(\Phi/2)$. Dacă Φ este foarte mic (în comparație cu 180°), amplitudinea rezultantă va fi apropiată de $2y_m$. Adică dacă Φ este foarte mic, $\cos(\Phi/2) \cong \cos 0^\circ = 1$. Dacă Φ este zero, cele două unde au peste tot aceeași fază. Creasta unei unde corespunde cu creasta celeilalte și analog pentru văi. Se spune atunci că undele interfere constructiv. Amplitudinea rezultantă este egală cu dublul amplitudinii unei singure unde. Dacă Φ este apropiat de 180° , pe de altă parte, amplitudinea rezultantă va fi apropiată de zero. Adică dacă $\Phi \cong 180^\circ$, $\cos(\Phi/2) \cong \cos 90^\circ = 0$. Dacă Φ este exact 180° , creasta unei unde corespunde exact văii de pe cealaltă undă. Se spune atunci că undele interfere destructiv. Amplitudinea rezultantă este nulă.

În figura 19-9, a se arată suprapunerea a două trenuri de undă apropiate ca fază (Φ mic), iar în figura 19-9, b suprapunerea a două trenuri de unde cu o diferență de fază de aproape 180° ($\Phi \cong 180^\circ$).

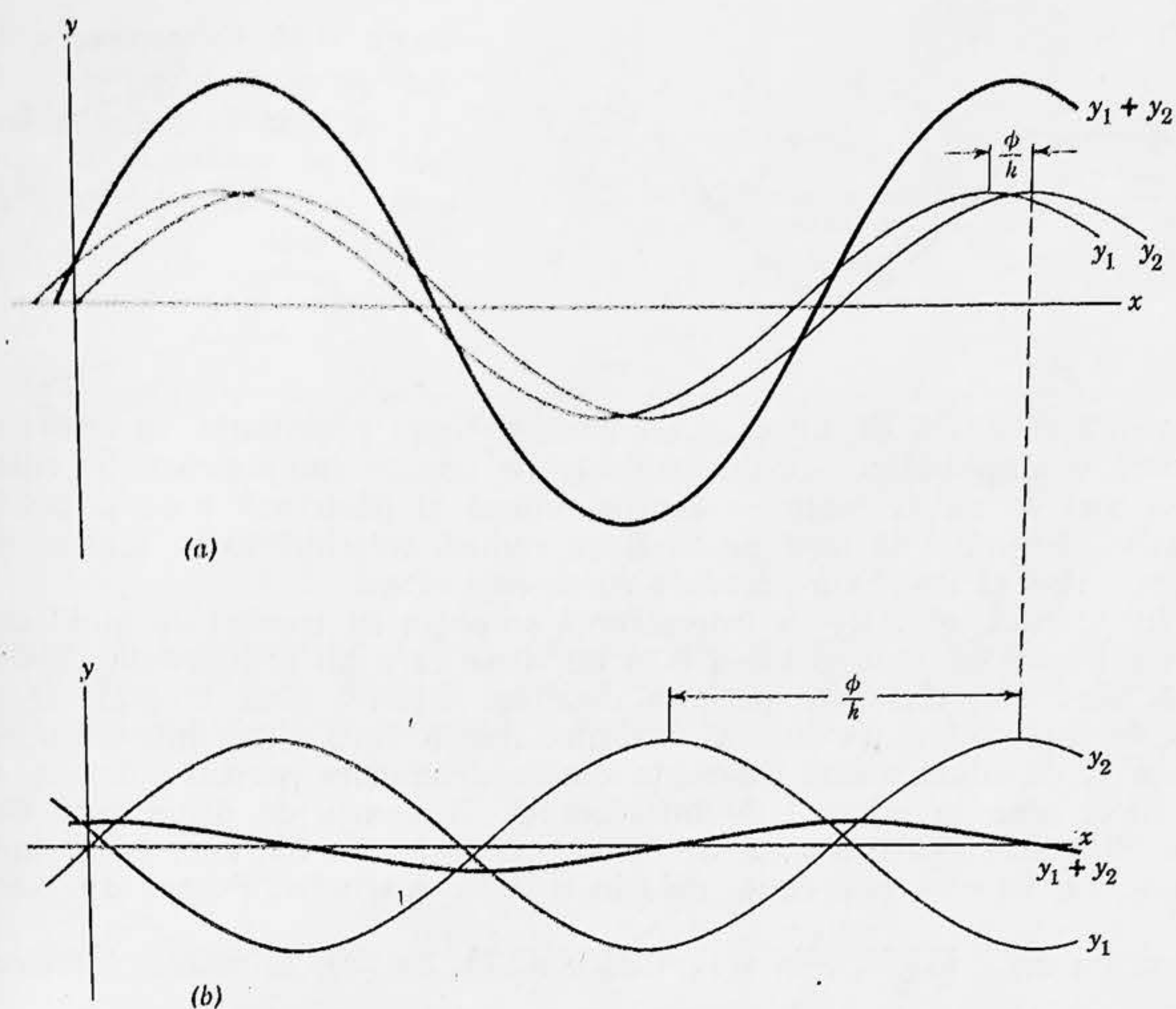


Figura 19-9. (a) Suprapunerea a două unde de frecvențe egale și de amplitudină egale care sînt aproape în fază de naștere la o undă de amplitudine aproape dublă față de fiecare componentă. (b) Suprapunerea a două unde de frecvențe egale și de amplitudini egale dar cu un defazaj de aproape 180° (în opoziție de fază) dă naștere la o undă a cărei amplitudine este aproape zero. Observăm că în ambele cazuri frecvența rezultantă este neschimbată. (Desenele corespund momentului $t=0$.)

Observăm că în aceste figuri suma algebrică a ordonatelor curbilor (componente) subțiri pentru orice valoare a lui x este egală cu ordonata curbei groase (rezultantă). Suma a două unde poate avea deci valori diferite depinzînd de diferența lor de fază.

Unda rezultantă va fi o undă sinusoidală, chiar dacă amplitudinile undelor sinusoidale componente nu sînt egale. Figura 19-10, de exemplu, ilustrează compunerea a două unde sinusoidale de aceeași frecvență și viteză, dar de amplitudini diferite. Amplitudinea rezultantă depinde de diferența de fază, care este luată egală cu zero în această figură. Rezultatul pentru alte diferențe de fază s-ar putea obține deplasînd una din undele componente într-o parte față de cealaltă și ar da o amplitudine rezultantă mai mică. Amplitudinea rezultantă minimă este egală cu diferența amplitudinilor componentelor, ceea ce se obține atunci cînd fazele diferă cu 180° . Dar rezultanta este totdeauna o undă sinusoidală. Compunerea unui număr oarecare de unde sinusoidale avînd aceeași

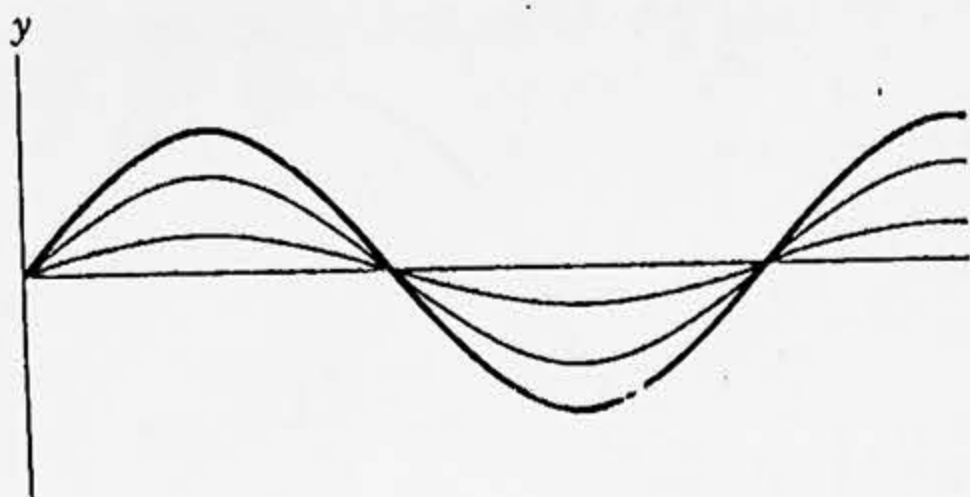


Figura 19-10. Compunerea a două unde de aceeași frecvență și fază dar de amplitudini diferite (liniile subțiri) dă naștere la o a treia undă de aceeași frecvență și fază (linia groasă).

frecvență și viteză dă un rezultat analog. Unda rezultantă va avea totdeauna o amplitudine constantă deoarece undele componente (și rezultanta lor) se mișcă toate cu aceeași viteză și păstrează aceeași poziție relativă. Situația de fapt poate fi reprodusă mișcând toate undele din figurile 19-9 și 19-10 spre dreapta cu aceeași viteză.

În practică, efectele de interferență se obțin cu trenuri de undă care sînt generate de aceeași sursă (sau de surse care au o diferență de fază fixă între ele) dar care parcurg drumuri diferite pînă la punctul de interferență. Diferența de fază Φ dintre undele care ajung într-un punct poate fi calculată aflînd diferența dintre drumurile parcurse de ele de la sursă pînă la punctul de interferență. Diferența de drum este Φ/k sau $(\Phi/2\pi)\lambda$. Dacă diferența de drum este $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ etc., astfel încît $\Phi = 0, 2\pi, 4\pi$ etc., cele două unde interferă constructiv. Pentru diferențe

de drum de $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda$ etc., Φ este $\pi, 3\pi, 5\pi$ etc. și undele interferă destructiv. Vom reveni la acest subiect mai tîrziu, mai amănunțit.

19-8. Unde complexe

Undele pe care le-am considerat pînă acum au fost de tip armonic simplu, în care elongațiile în fiecare moment sînt reprezentate de o curbă sinusoidală. Am văzut că suprapunerea unui număr de astfel de unde, avînd aceeași frecvență și viteză, dar amplitudini și faze arbitrare, dă iarăși o undă rezultantă de acest tip simplu. Dacă însă suprapunem unde care au frecvențe *diferite*, unda rezultantă va fi *complexă*. Într-o undă complexă mișcarea unei particule nu mai este o mișcare armonică simplă și forma undei nu mai este o curbă sinusoidală. În această secțiune considerăm numai aspectele calitative ale undelor complexe. Tratarea analitică a unor astfel de unde va fi dată atunci cînd vom întîlni situații fizice descrise de ele. Vom examina rezultatele adunării pe cale grafică a două sau mai multe unde care se propagă cu aceeași viteză în aceeași direcție dar au frecvențe, amplitudini și faze relative diferite.

În figurile 19-11, *a* și 19-11, *b* se compun două unde avînd aceeași amplitudine, dar avînd frecvențele în raportul 3:1; diferența de fază variază de la *a* la *b* și vedem cum variația diferenței de fază poate da o rezultantă de diferite forme. Dacă acestea sînt unde sonore, timpanul urechii noastre va vibra în modul reprezentat de rezultanta din fiecare caz, dar noi vom auzi și interpreta acestea ca cele două frecvențe inițiale, indiferent de diferența lor de fază. Dacă undele rezultante reprezintă lumină vizibilă, ochii noștri vor avea aceeași senzație a unui amestec de două culori, independent de diferența de fază a componentelor.

două
fază
liniile
treia
fază

a tot-
rezul-
poziție
e din

ă care
e fază
cul de
punct
de

simplic,
sinusoidală.
frecvență
de acest
rezultantă
te o miș-
în această
Tratarea
uații fizice
ă sau mai
frecvențe.

amplitudine,
a la b și
rite forme.
odul repre-
acestea ca
unde re-
ație a unui
celor.

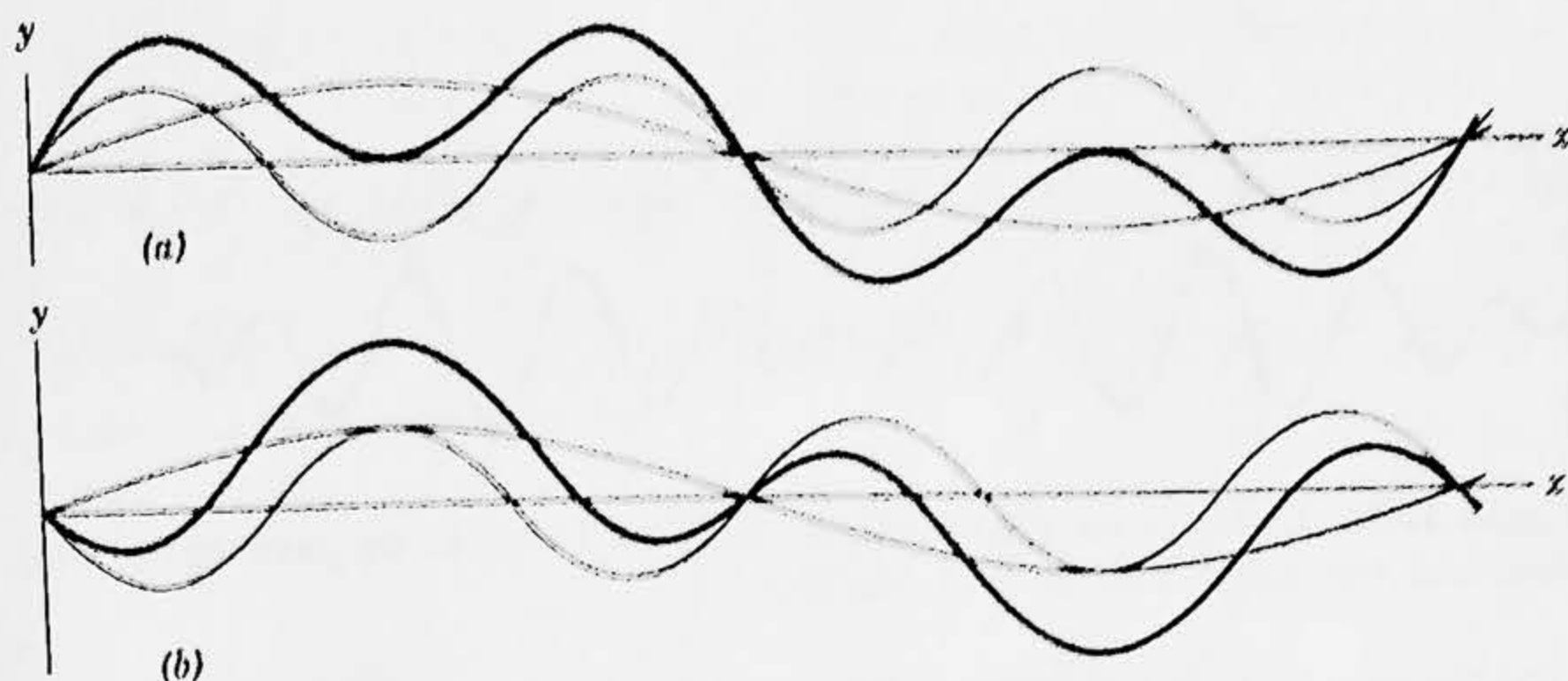


Figura 19-11. Compunerea a două unde ale căror frecvențe se află în raportul 3 : 1 (liniile subțiri) dă naștere la o undă a cărei formă (linia groasă) depinde de diferența de fază a componentelor. A se compara (a) cu (b).

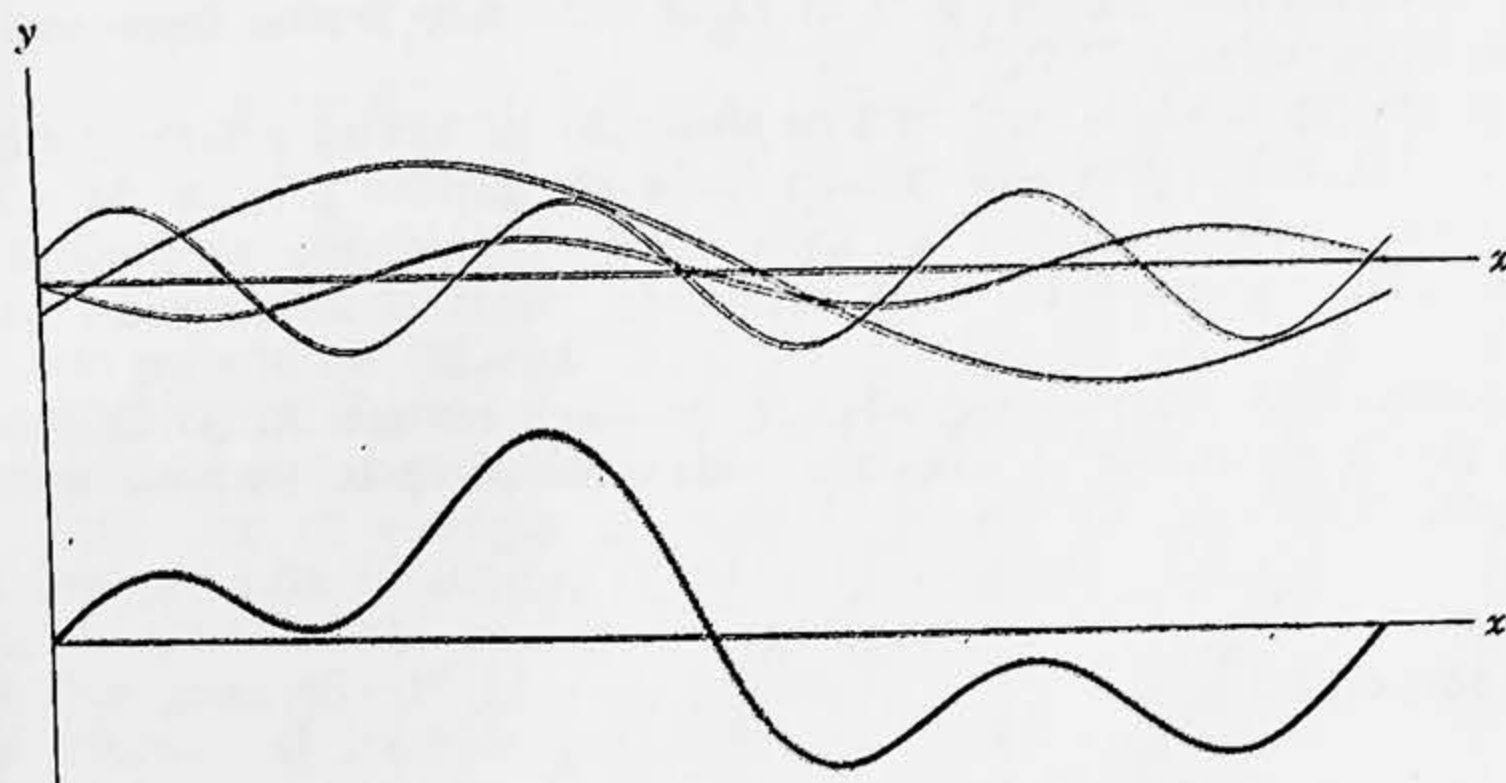


Figura 19-12. Compunerea a trei unde (sus) de frecvențe diferite dă o formă complexă undei (jos).

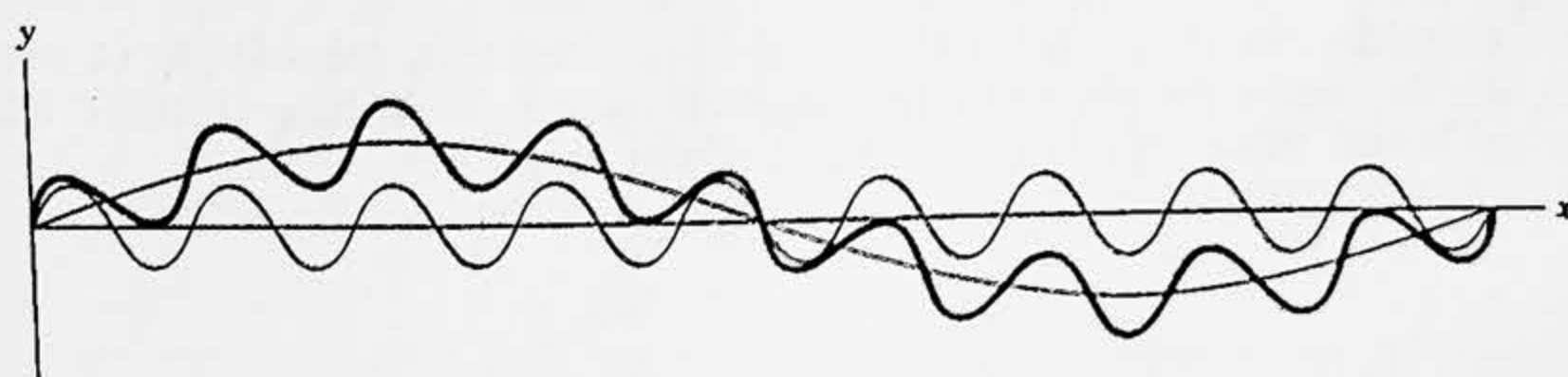


Figura 19-13. Compunerea (linia groasă) a două unde de frecvențe mult diferite (liniile subțiri).

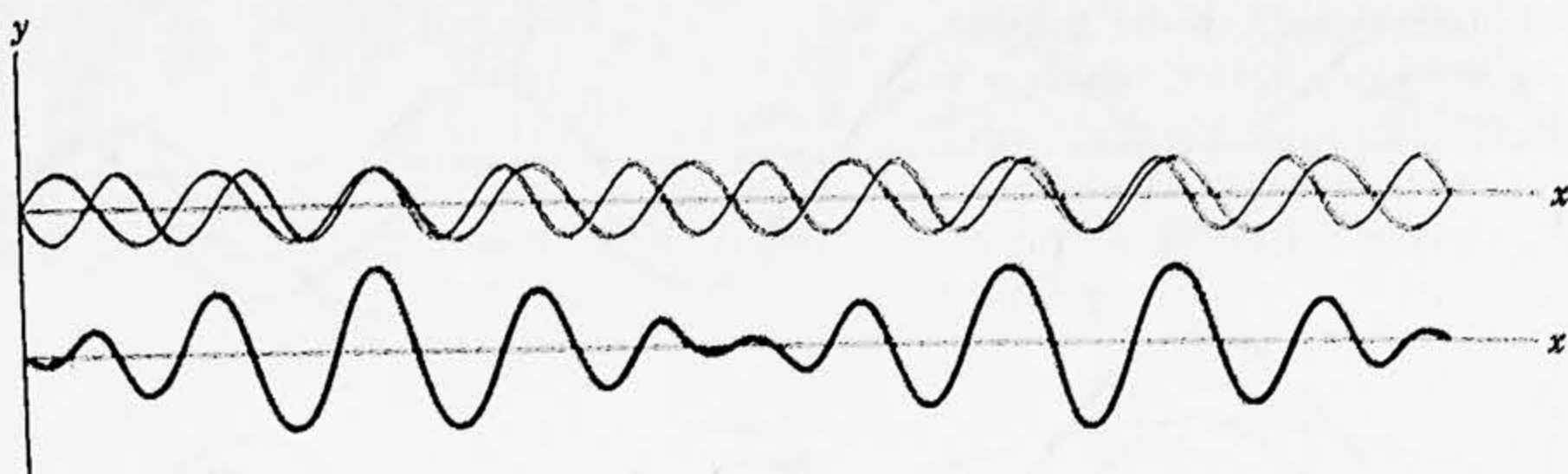


Figura 19-14. Compunerea (jos) a două unde cu frecvențe aproape egale (sus), ilustrează fenomenul bătăilor (vezi capitolul 20).

În figura 19-12 sînt compuse trei unde de frecvențe și amplitudini diferite. Unda complexă rezultantă este de o formă complet diferită de o undă periodică simplă și în această privință seamănă cu undele generate în mod normal de instrumente muzicale. În figura 19-13 o undă de frecvență foarte înaltă este compusă cu una de frecvență foarte joasă. Fiecare frecvență componentă este slab discernabilă în rezultantă. În figura 19-14 sînt compuse două unde de frecvențe foarte apropiate. Unda rezultantă constă din grupuri care în cazul sunetului, produc fenomenul familiar al bătăilor (paragraful 20-6).

În toate aceste figuri unda rezultantă se obține în ipoteza că principiul suprapunerii este valabil, adică prin simpla adunare a elongațiilor produse de undele individuale în fiecare punct. Deoarece toate undele componente se propagă cu aceeași viteză, unda rezultantă se mișcă cu aceeași viteză și forma undei nu se schimbă.

Osciloscopul cu raze catodice (capitolul 27) ne oferă cea mai simplă cale de a observa cum pot fi sintetizate și analizate undele complexe în termenii undelor armonice simple.

19-9. Unde staționare

Într-un corp unidimensional, de dimensiuni finite, cum este o coardă întinsă, prinsă cu două cleme la o distanță l între ele, undele progresive din coardă sînt reflectate de capetele corpului, adică de cleme. Fiecare astfel de reflexie dă naștere la o undă progresivă în coardă în sensul opus. Undele reflectate se compun cu undele incidente conform principiului suprapunerii.

Să considerăm două trenuri de undă de aceeași frecvență, viteză și amplitudine, care se propagă în *sensuri opuse* de-a lungul unei corzi. Două astfel de unde pot fi reprezentate prin ecuațiile

$$y_1 = y_m \sin (kx - \omega t),$$

$$y_2 = y_m \sin (kx + \omega t).$$

Prin urmare, rezultanta poate fi scrisă astfel

$$y = y_1 + y_2 = y_m \sin (kx - \omega t) + y_m \sin (kx + \omega t) \quad (19-18, a)$$

sau folosind formula trigonometrică din ecuația (19-16), astfel

$$y = 2y_m \sin kx \cos \omega t. \quad (19-18, b)$$

Ecuatia (19-18, b) este ecuatia unei unde staționare¹. Observăm că o particulă în orice punct particular x execută o mișcare armonică simplă în funcție de timp și că toate particulele vibrează cu aceeași frecvență. Într-o undă progresivă fiecare particulă a corzii vibrează cu aceeași amplitudine. Caracteristica unei unde staționare este însă faptul că amplitudinea nu este aceeași pentru diferite particule ci variază cu poziția x a particulei.² În adevăr, amplitudinea $2y_m \sin kx$ are valoarea maximă $2y_m$ în pozițiile în care

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ etc.}$$

sau

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \text{ etc.}$$

Aceste puncte se cheamă *ventre (umflături)* și sînt distanțate cu o jumătate de lungime de undă. Amplitudinea are valoarea minimă zero în pozițiile unde

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi \text{ etc.}$$

sau

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda \text{ etc.}$$

Aceste puncte se cheamă *noduri* și sînt distanțate cu o jumătate de lungime de undă. Distanța dintre un nod și un ventru adiacent este egală cu un sfert de lungime de undă.

Este clar că energia nu este transportată de-a lungul corpului nici la dreapta nici la stînga, deoarece energia nu poate trece prin punctele nodale din coardă, care sînt permanent în repaus. Prin urmare, energia rămîne „staționară” în coardă, deși ea alternează între energia cinetică de vibrație și energia potențială elastică. Numim mișcarea — mișcare ondulatorie, deoarece o concepem ca o suprapunere de unde progresive care se propagă în sensuri opuse (ecuația 19-18, a). Putem privi la fel de bine mișcarea ca o oscilație a corzii ca un întreg (ecuația 19-18, b), fiecare particulă oscilînd într-o mișcare armonică simplă cu frecvența unghiulară ω și cu o amplitudine care depinde de poziția ei. Fiecare porțiune mică a corzii are inerție și elasticitate și coarda ca un întreg poate fi privită ca o colecție de oscilatori cuplați. Prin urmare, coarda vibrantă este aceeași în principiu³ cu un sistem resort-masă, cu excepția faptului că un sistem resort-masă are numai o singură frecvență proprie, în timp ce o coardă vibrantă are un mare număr de frecvențe proprii.

¹ Undele staționare pot fi de asemenea produse în corpuri finite bi- sau tridimensionale; vezi pentru exemple paragraful 20-5 respectiv 38-5.

² Undele combinate care se propagă în sensuri opuse de-a lungul corzii vor produce de asemenea unde staționare chiar dacă amplitudinile lor nu sînt egale. Considerăm aici numai cazul amplitudinilor egale; vezi însă problema 25.

³ Pentru o discuție generală, vezi „Asupra predării undelor staționare”, de J. Rekveld, *American Journal of Physics*, martie 1958, pag. 159.

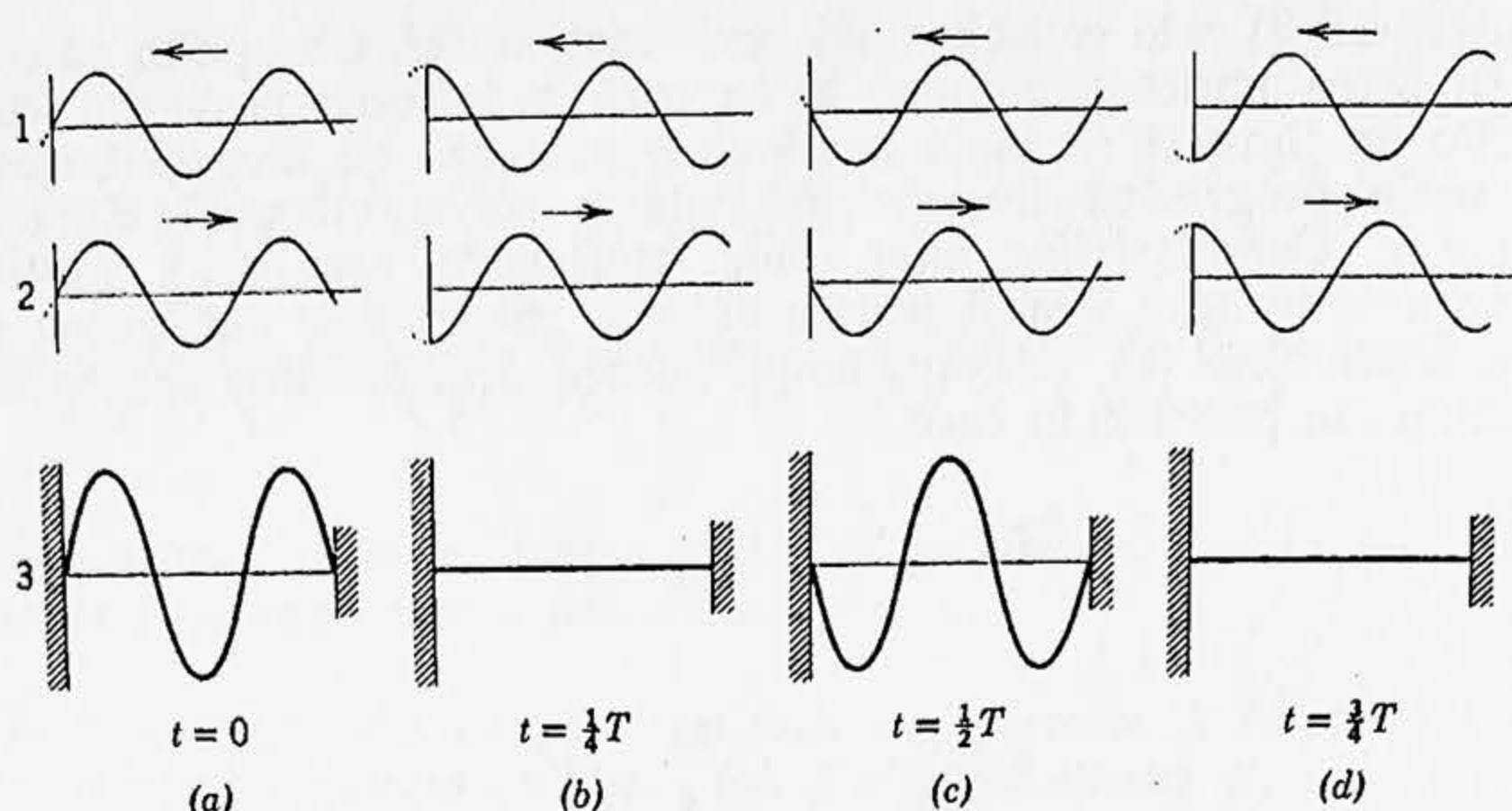


Figura 19-15. Unde staționare rezultate din suprapunerea a două unde progresive una spre stînga și cealaltă spre dreapta; 1 și 2 sînt componentele, 3 este rezultanta.

În figura 19-15, în (a), (b), (c) și (d) se arată un tablou al unei staționare, separat, la intervale de un sfert de perioadă, în rîndul al treilea. Undele progresive, cea care se mișcă în sensul pozitiv al axei x și cealaltă care se mișcă în sensul negativ al axei x , a căror suprapunere poate fi imaginată ca dînd naștere la unda staționară, sînt arătate la aceleași intervale de un sfert de perioadă în rîndurile 2 și 1 ale figurii. Undele staționare pot fi produse de asemenea cu unde electromagnetice sau cu unde sonore.

În figura 19-16 se arată cum energia asociată cu o coardă vibrantă trece consecutiv de la energia cinetică a mișcării E_c la energia potențială de deformare E_p în timpul unui ciclu. Studentul trebuie să compare aceasta cu figura 8-4, care arată același lucru pentru un oscilator masă-resort. Corzile vibrante oscilează adesea atît de repede încît ochiul percepe numai o pată a cărei formă este cea a regiunii care limitează mișcarea; vezi figura 19-17.

Suprapunerea unei unde incidente și unei unde reflectate fiind suma a două unde care se propagă în sensuri opuse, va da naștere unei unde staționare. Vom considera acum procesul reflexiei unei unde mai amănunțit. Să presupunem că o perturbație se propagă de-a lungul unei corzi întinse care este fixată la un capăt, cum se vede în figura 19-18. a. Cînd perturbația ajunge la acel capăt ea exercită o forță în sus asupra suportului. Suportul este însă rigid și nu se mișcă. În virtutea legii a treia a lui Newton, suportul exercită o forță egală în modul dar de sens opus asupra corzii. Această forță de reacție generează o perturbație în dreptul suportului, care se propagă înapoi de-a lungul corzii în sens opus celui al perturbației incidente. Spunem că perturbația incidentă a fost *reflectată* la capătul fix al corzii. Observăm că perturbația reflectată se întoarce cu elongația transversală inversată. Dacă un tren de unde este incident pe capătul fix, va fi generat un tren de unde reflectat în acel punct, în același mod. Elongația oricărui punct de-a lungul

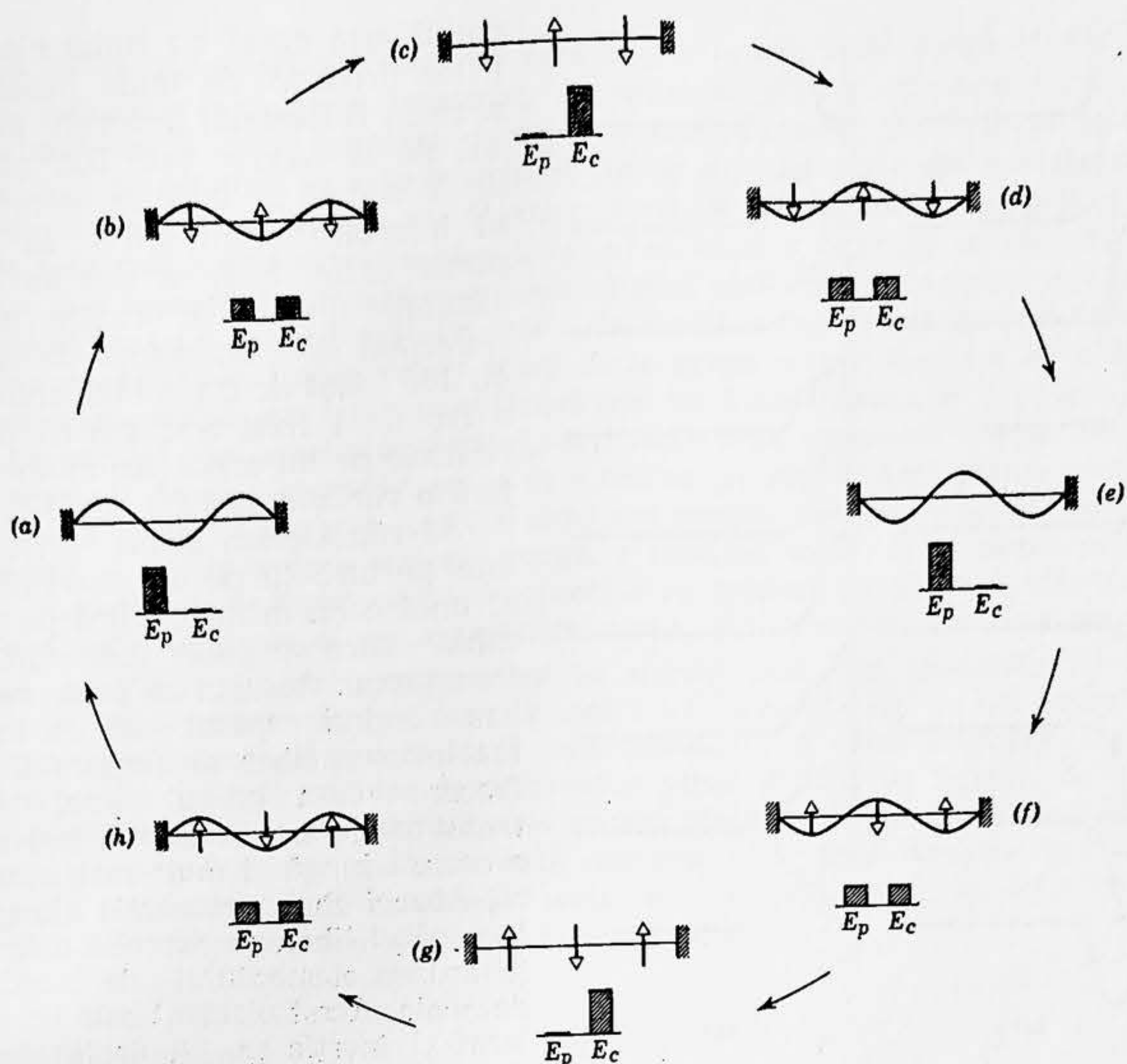
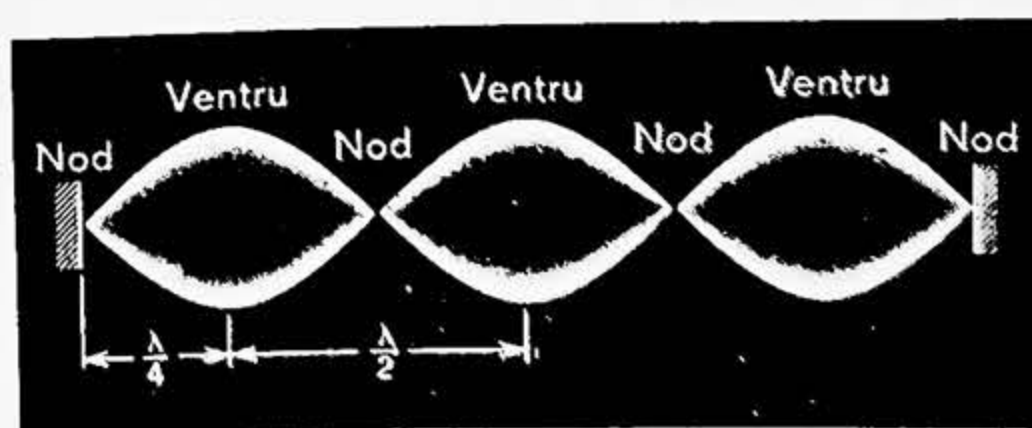


Figura 19-16. O undă staționară într-o coardă întinsă în timpul unui ciclu de oscilație. În (a) coarda este momentan în repaus și energia sistemului este în întregime energie potențială de deformare elastică asociată cu deplasarea transversală a corzii. (b) O optime de ciclu mai târziu deplasarea este redusă și coarda este în mișcare. Cele două săgeți arată vitezele particulelor corzii în pozițiile arătate. E_c și E_p au aceeași valoare. (c) Coarda nu este deplasată, dar particulele ei au viteze maxime; energia este în întregime cinetică. Mișcarea continuă pînă cînd condiția inițială (a) este atinsă, după care ciclul se repetă.

Figura 19-17. Imaginea unei unde staționare, corespunzătoare unui timp prelungit de expunere a mișcării, care arată tabloul nodurilor și ventrelor.



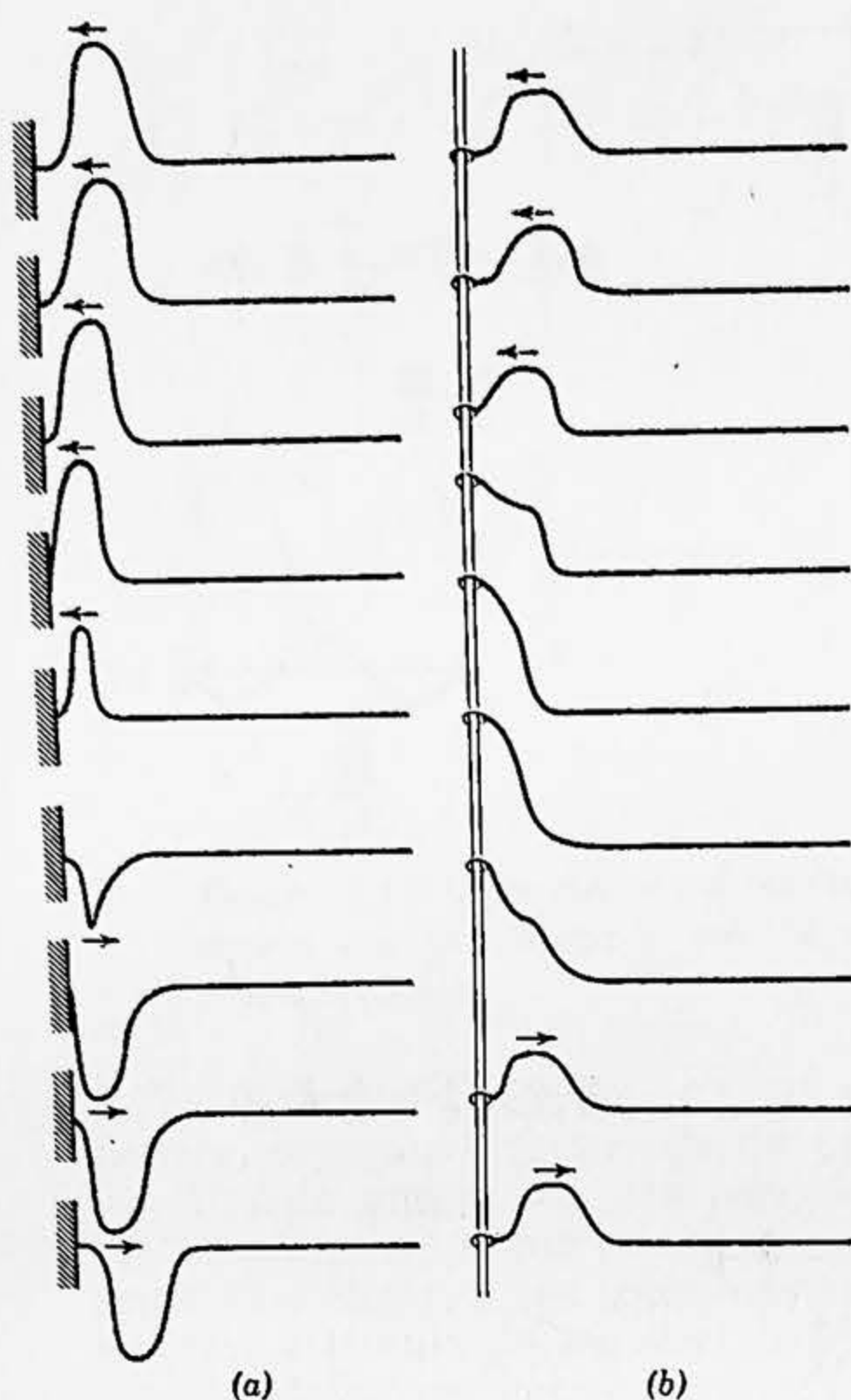


Figura 19-18. (a) Reflexia unei perturbații pe capătul fix al unei corzi. Desenele sînt distanțate uniform în timp. Faza se schimbă cu 180° prin reflexie. (b) Reflexia unei perturbații pe un capăt, liber să se miște în direcție transversală. (Coarda este prinsă de un inel care alunecă vertical fără frecări.) Faza nu se schimbă prin reflexie.

de pe coardă; trenul de unde incident și cel reflectat trebuie să interfere constructiv în acel punct, dacă trebuie să avem un maxim acolo. Prin urmare, unda reflectată este totdeauna în fază cu unda incidentă în acel punct (vezi figura 19-18, b). Spunem că *la un capăt liber unda se reflectă fără schimbare de fază*.

Prin urmare, cînd avem o undă staționară pe o coardă, se va produce un nod la un capăt fix și un ventru la un capăt liber. Aceste idei vor fi aplicate undelor sonore și undelor electromagnetice în capitolele următoare.

În tratarea dată mai sus am presupus că are loc o reflexie totală pe frontieră. În general, pe o frontieră are loc o reflexie parțială și o transmisie parțială. De exemplu, să presupunem că în loc de a fi legată de un perete rigid, coarda este

corzii este egală cu suma elongațiilor produse de unda incidentă și unda reflectată. Deoarece punctul de la capăt este fix, aceste două unde trebuie de asemenea să interfere destructiv în acel punct, astfel încît să dea acolo o elongație nulă. Prin urmare, unda reflectată este totdeauna defazată cu 180° față de unda incidentă pe o frontieră fixă. Spunem că *prin reflexie pe un capăt fix unda suferă o variație de fază de 180°* .

Să considerăm acum reflexia unei perturbații pe un capăt liber al unei corzi întinse, adică pe un capăt care se poate mișca liber transversal. Aceasta se poate realiza legînd capătul de un inel foarte ușor, liber să alunece fără frecare de-a lungul unei tijă transversale sau (vezi mai jos) de o coardă lungă și mult mai ușoară. Atunci cînd perturbația ajunge la capătul liber, ea exercită o forță asupra elementului de coardă de acolo. Acest element este accelerat și inerția sa îl deplasează dincolo de punctul de echilibru; el sare peste acest punct și exercită o forță de reacție asupra corzii. Aceasta generează o perturbație care se propagă înapoi de-a lungul corzii în sensul opus celei incidente. Iarăși obținem o reflexie, dar acum pe un capăt liber. Capătul liber va suferi evident elongația maximă a particulelor

legată de o altă coardă. La frontiera care unește corzile unda incidentă va fi în parte reflectată și în parte transmisă. Amplitudinea undei reflectate va fi mai mică decât cea a undei incidente, deoarece o undă transmisă continuă să se propage de-a lungul celei de a doua corzi și poartă cu ea o parte din energia undei incidente. Dacă cea de a doua coardă are o densitate liniară mai mare decât prima, unda reflectată înapoi în prima coardă va suferi iarăși o defazare de 180° prin reflexie. Dar deoarece amplitudinea sa este mai mică decât a undei incidente, punctul de frontieră nu va fi un nod ci se va mișca. În modul acesta se produce un transfer net de energie de-a lungul primei corzi de la prima coardă spre cea de a doua. Dacă coarda a doua are o densitate liniară mai mică decât prima, se produce o reflexie parțială fără schimbare de fază, dar, iarăși este transmisă energie către a doua coardă. În practică, modul optim de a realiza un „capăt liber” pentru o coardă este de a o lega de o coardă lungă și mult mai ușoară. Energia transmisă este neglijabilă și coarda a doua servește pentru a menține tensiunea în prima coardă.

Prezintă interes faptul că unda transmisă se propagă cu o viteză diferită de cea a undei incidente și cea a undei reflectate. Viteza undei este dată de formula $v = \sqrt{F/\mu}$; tensiunea este aceeași în ambele corzi, dar densitățile lor sînt diferite. Prin urmare, unda se propagă mai încet în coarda mai densă. Frecvența undei transmise este aceeași ca cea a unei incidente și a undei reflectate. Undele care au aceeași frecvență dar se propagă cu viteze diferite au lungimi de undă diferite. Prin urmare, din relația $\lambda = v/\nu$ tragem concluzia că în coarda mai densă, unde v este mai mic, lungimea de undă este mai mică. Acest fenomen de schimbare a lungimii de undă atunci cînd unda trece dintr-un mediu în altul, se va întîlni frecvent în studiul nostru privind undele de lumină.

19-10. Rezonanța

În general, ori de cîte ori un sistem capabil să oscileze este acționat de o serie periodică de impulsuri avînd o frecvență egală sau aproape egală cu una din frecvențele proprii de oscilație ale sistemului, sistemul este pus în oscilație cu o amplitudine relativ mare. Acest fenomen se numește *rezonanță* (vezi paragraful 15-10) și se spune că sistemul intră în rezonanță cu impulsurile aplicate.

Să considerăm o coardă fixată la ambele capete. În coardă se pot stabili oscilații sau unde staționare. Singura cerință pe care trebuie s-o satisfacem este ca punctele de la capete să fie noduri. Poate fi orice număr de noduri între capete sau nici unul, astfel încît lungimea de undă legată de undele staționare, poate lua mai multe valori diferite. Distanța dintre două noduri adiacente este $\lambda/2$, astfel încît într-o coardă de lungime l trebuie să fie exact un număr întreg n de jumătăți de lungimi de undă $\lambda/2$, adică

$$\frac{n\lambda}{2} = l$$

sau

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dar $\lambda = v/\nu$ și $v = \sqrt{F/\mu}$, astfel încât frecvențele proprii de oscilație ale sistemului sînt

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (19-19)$$

Dacă coarda este pusă în vibrație și lăsată liberă, oscilațiile se vor stinge treptat. Mișcarea este amortizată datorită disipării energiei prin suporturile elastice de la capete și datorită rezistenței aerului față de mișcare. Putem introduce energie în sistem aplicînd o forță motoare. Dacă frecvența exterioară este apropiată de oricare frecvență proprie a corzii, coarda va vibra cu aceea frecvență cu o amplitudine mare. Deoarece coarda are un mare număr de frecvențe proprii, rezonanța se poate produce la mai multe frecvențe diferite. Un sistem masă-resort are, spre deosebire de aceasta, numai o singură frecvență de rezonanță. Deosebirea se datorește faptului că în sistemul masă-resort inerția caracteristică este concentrată („îngrămădită”) într-o singură parte a sistemului — masă — iar caracteristica elastică este concentrată într-o altă parte separată a sistemului — resort. Spunem că acest sistem are elemente *concentrate* (și nu distribuite).

Se spune că o coardă întinsă, pe de altă parte, are *elemente distribuite*, deoarece fiecare element al corzii are atât caracteristica inerțială, cît și cea elastică. În sistemul masă-resort, există un singur mod de a schimba energie între forma cinetică și cea potențială în timpul oscilației sistemului; energia sub formă cinetică trebuie legată de masa mobilă, iar energia sub formă potențială trebuie legată de resortul deformat. În coarda întinsă însă, elementele de tip masă (inerția) și elementele de tip resort (elasticitate) sînt distribuite uniform de-a lungul corzii. Există mai multe moduri posibile, și nu numai un singur mod, de a schimba energie între forma cinetică și cea potențială în timpul oscilațiilor sistemului, corespunzător șirului de valori permise pentru n în ecuația (19-19).

Rezonanța într-o coardă se demonstrează de obicei legînd o coardă de un capăt fix, cu ajutorul unei greutăți atîrnate de ea trecută peste un scripete, și legînd celălalt capăt al corzii de un vibrator, așa cum se arată în figura 19-19. Oscilațiile transversale ale vibratorului produc o undă progresivă în coardă care este reflectată înapoi de capătul fix. Frecvența undelor este cea a vibratorului iar lungimea de undă este dată de $\lambda = v/\nu$. Capătul fix P este un nod, însă capătul Q vibrează și deci

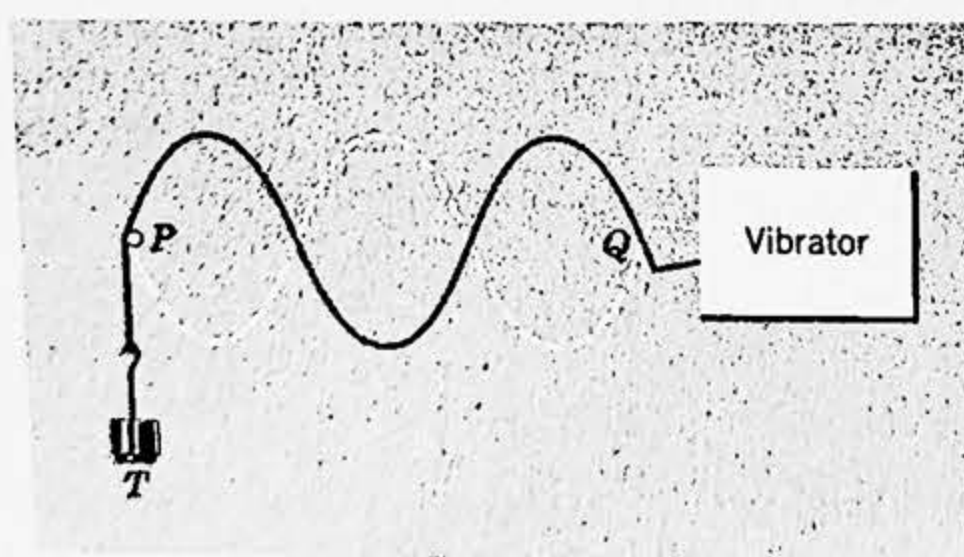


Figura 19-19. Undele staționare într-o coardă acționată de un vibrator atunci cînd frecvența proprie și frecvența exterioară sînt foarte apropiate între ele.

nu este nod. Dacă acum variem tensiunea din coardă schimbând greutatea atârnată, de exemplu, putem schimba lungimea de undă. Schimbând tensiunea, schimbăm viteza undei și lungimea de undă se schimbă proporțional cu viteza, frecvența fiind constantă. Ori de cât ori lungimea de undă devine aproape egală cu $2l/n$, unde l este lungimea corzii, obținem unde staționare de amplitudine mare. Coarda vibrează acum într-unul din modurile sale proprii și este în rezonanță cu vibratorul. Vibratorul trebuie să efectueze lucru mecanic asupra corzii pentru a menține aceste oscilații împotriva pierderilor datorite amortizării. Amplitudinea crește până în momentul când vibratorul își consumă întreaga energie de intrare împotriva pierderilor de amortizare. Punctul Q este aproape un nod deoarece amplitudinea vibratorului este mică în comparație cu cea a corzii.

Prin urmare, în cazul amortizărilor, frecvența de rezonanță este aproape, dar nu chiar, egală cu o frecvență proprie a corzii. Un capăt este nod, celălalt aproape un nod. Între ele există puncte care sînt aproape noduri, puncte în care amplitudinea este foarte mică. Aceste puncte nu pot fi noduri adevărate, deoarece energia trebuie să se propage de-a lungul corzii trecînd prin ele dinspre vibrator. Această situație este analogă cu condiția de rezonanță pentru un oscilator armonic amortizat cu forță exterioară motoare, discutat în paragraful 15-10. Acolo de asemenea frecvența de rezonanță era aproape aceeași cu frecvența proprie a sistemului și amplitudinea era mare dar nu infinită. Dacă nu erau prezente amortizările, frecvența de rezonanță ar fi exact o frecvență proprie. Atunci amplitudinea ar crește pînă la infinit pe măsură ce energia ar fi furnizată sistemului. În practică, sistemul va înceta să se supună legii Hooke sau condiției ca oscilațiile să fie mici atunci cînd amplitudinea devine mare și sistemul se va distruge. Aceasta se întîmplă chiar în cazul amortizării, dacă amortizarea este mică și forța motoare este mare (ca în cazul dezastrului podului de pe Tacoma, fig. 15-21).

Dacă frecvența vibratorului este mult diferită de o frecvență proprie a sistemului, dată de ecuația (19-19), unda reflectată în P întorcîndu-se în Q poate fi în discordanță de fază cu vibratorul și poate efectua lucru mecanic asupra vibratorului. Adică coarda poate ceda energie vibratorului, așa cum primește energie de la el. Tabloul undei „staționare” nu este fix ca formă ci fluctuează. În medie, amplitudinea este mică și nu prea diferită de cea a vibratorului. Această situație este analogă cu mișcarea neregulată a unui leagăn care este împins periodic cu o frecvență alta decît frecvența sa proprie. Deplasarea leagănului este destul de mică.

Prin urmare, coarda absoarbe maximum de energie de la vibrator la rezonanță. Acordarea pe un post la radio este un proces analog. Mișcînd butonul de acord frecvența proprie a curentului alternativ din circuitul receptor este făcută egală cu frecvența undelor emise de stațiunea dorită. Circuitul intră în rezonanță cu semnalele transmise și absoarbe maximum de energie din semnal. Vom întîlni condițiile de rezonanță din nou la sunet, electromagnetism, optică și fizica atomică și nucleară. În aceste domenii, ca și în mecanică, sistemul va absorbi maximum de energie de la sursă la rezonanță și energie relativ mică în afara rezonanței.

Exemplul 4. Într-o demonstrație cu aparatul descris mai sus, vibratorul are o frecvență $\nu = 20$ Hz iar coarda are o densitate liniară $\mu = 25$ g/m și o lungime 6,0 m. Tensiunea F variază prin tragerea capătului corzii peste scripete. Dacă vrem să arătăm rezonanța, plecând cu un „fus” și apoi cu două, trei și patru „fusuri”, ce forță trebuie exercitată asupra corzii?

La rezonanță

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Prin urmare tensiunea F este dată de

$$F = \frac{4l^2 \nu^2 \mu}{n^2}$$

Pentru un „fus” $n=1$, astfel încît

$$F_1 = 4l^2 \nu^2 \mu = 4 \cdot (6,0)^2 \text{ m}^2 \cdot (20)^2 \text{ s}^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} = 1440 \text{ N.}$$

Pentru două „fusuri” $n=2$ și

$$F_2 = \frac{4l^2 \nu^2 \mu}{4} = \frac{F_1}{4} = 360 \text{ N.}$$

Analog, pentru trei și patru fusuri:

$$F_3 = \frac{F_1}{9} = 160 \text{ N,}$$

$$F_4 = \frac{F_1}{16} = 90 \text{ N.}$$

Prin urmare, trebuie să relaxăm treptat tensiunea pentru a obține rezonanța cu un număr mai mare de fusuri. Deși frecvența de rezonanță este totdeauna aceeași în aceste circumstanțe, viteza de propagare și lungimea de undă la rezonanță descresc proporțional.

Sînt tensiunile date, riguros exacte, dacă ținem seama de amortizare?

Dacă tensiunea ar fi menținută fixă, dîndu-se o viteză definită a undei, am obține mai mult decît o singură condiție de rezonanță variînd frecvența vibratorului?

Întrebări

1. Cum s-ar putea dovedi experimental faptul că energia este asociată cu o undă?

2. Energia poate fi transmisă prin intermediul particulelor ca și prin intermediul undelor. Cum putem distinge experimental aceste două metode de transmisie a energiei?

3. Poate fi generată o mișcare ondulatorie în care particulele mediului să vibreze într-o mișcare armonică simplă unghiulară? Dacă este așa, să se explice cum și să se descrie unda.

4. Undele de torsiune sînt transversale sau longitudinale? Pot fi ele considerate ca o suprapunere a două unde care sînt fie transversale fie longitudinale?

5. Cum pot fi create unde plane? Dar unde sferice?

6. Următoarele funcții, în care A este o constantă, sînt de forma $f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt),$$

$$y = A(x + vt)^2,$$

$$y = A \sqrt{x - vt},$$

$$y = A \ln(x + vt).$$

Să se explice de ce aceste funcții nu sînt utile în mișcarea undelor.

7. Cum variază amplitudinea și intensitatea undelor pe suprafața apei cu distanța pînă la sursă?

8. Legea proporționalității inverse cu pătratul distanței nu se aplică exact pentru descreșterea intensității sunetelor cu distanța. De ce?

9. Dacă două unde interferă, perturbă una din ele propagarea celeilalte?

10. Cînd interferă unde, există o pierdere de energie? Să se explice răspunsul.

11. De ce nu observăm efecte de interferență între fasciculele de lumină emise de două lanterne sau între undele sonore emise de două viori?

12. Dacă două unde diferă numai prin amplitudine și se propagă în direcții opuse printr-un mediu, vor produce ele unde staționare? Este transportată energia? Există noduri? (Vezi problema 25.)

13. Reflexia parțială a energiei ondulatorii pe discontinuitățile din drumul transmisiei este de obicei cheluitoare și poate fi minimizată prin inserțiunea unor dispozitive de „adaptare a impedanțelor” între secțiunile de drum care încadrează discontinuitatea. De exemplu, un megafon ajută la

adaptarea coloanei de aer din gură și gîtlej cu aerul din exteriorul gurii. Să se dea alte exemple și să se exemplifice calitativ cum minimizează asemenea aparate pierderile prin reflexie (vezi problema 25).

14. Este o oscilație o undă? Să se explice.

15. Să se considere că undele staționare dintr-o coardă reprezintă o suprapunere de unde progresive și să se explice, folosind conceptul de suprapunere, de ce nu există noduri adevărate în coarda rezonantă din figura 19-19, chiar la capătul „fix”. (Indicație: Se vor considera efectele de amortizare.)

16. În discuția privitoare la undele transversale dintr-o coardă am avut de a face numai cu elongații într-un singur plan, planul $x-y$. Dacă toate elongațiile se află într-un plan, se spune că unda este *plan polarizată*. Pot exista elongații într-un plan altul decît singurul plan cu care avem de a face? Dacă este așa pot fi combinate două unde polarizate în plane diferite? Ce particularități ar avea o astfel de undă compusă?

17. O undă transmite energie. Transmite ea impuls? Poate ea transmite moment cinetic? (Vezi întrebarea 16.)

Probleme

1. Să se arate că $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ poate fi scris sub alte forme:

$$y = y_m \sin k(x - vt),$$

$$y = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} - t \right),$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right),$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

2. Viteza undelor electromagnetice în vid este $3 \cdot 10^8$ m/s. (a) Lungimile de

undă din porțiunea vizibilă a spectrului (lumină) se întind de la aproximativ $4 \cdot 10^{-7}$ m în violet pînă la aproximativ $7 \cdot 10^{-7}$ m în roșu. Care este intervalul frecvențelor undelor luminoase? (b) Intervalul de frecvență al undelor scurte de radio (de exemplu MF radio și FJF televiziune) este de la 1,5 MHz la 300 MHz. Care este intervalul corespunzător al lungimilor de undă? (c) Razele X sînt de asemenea unde electromagnetice. Lungimile lor de undă se întind de la aproximativ $5 \cdot 10^{-9}$ m la

$1,0 \cdot 10^{-11}$ m. Care este intervalul de frecvențe pentru razele X?

3. Ecuația pentru o undă transversală progresivă într-o sfoară este dată de

$$y = 10 \sin \pi (0,01 x - 2,00 t),$$

în care y și x sînt exprimați în centimetri, iar t în secunde. (a) Să se afle amplitudinea, frecvența, viteza și lungimea de undă a undei. (b) Să se afle viteza transversală maximă a unei particule din sfoară.

4. Să se scrie ecuația unei unde care se propagă în sensul negativ al axei x și are o amplitudine de 10 mm, o frecvență de 550 Hz și o viteză de 330 m/s.

5. O undă cu frecvența de 500 Hz are o viteză de fază de 350 m/s. (a) La ce distanță se găsesc între ele două puncte cu o diferență de fază de 60° ? (b) Care este diferența de fază între două elongații într-un anumit punct la un interval de timp de 10^{-3} s?

6. (a) O undă longitudinală sinusoidală continuă este emisă de-a lungul unui resort spiralat de o sursă vibrantă prinsă de el. Frecvența sursei este 25 Hz și distanța dintre două rarefieri succesive din resort este de 24 cm. Să se afle viteza undei. (b) Dacă elongația longitudinală maximă a unei particule din resort este 3,0 cm și unda se mișcă în sensul negativ al axei x , să se scrie ecuația undei. Fie sursa în punctul $x=0$ și elongația în $x=0$ la $t=0$ fie zero.

7. Care este viteza unei unde transversale într-o sfoară de lungime 2,0 m și masă 60 g sub o tensiune de 500 N?

8. Să se arate că panta unei corzi într-un punct x este numeric egală cu raportul dintre viteza particulei și viteza undei din acel punct.

9. O buclă circulară uniformă dintr-o coardă se rotește în sens orar în absența gravitației (vezi fig. 19-20). Viteza tangențială este v_0 . Să se afle viteza undelor care se propagă pe

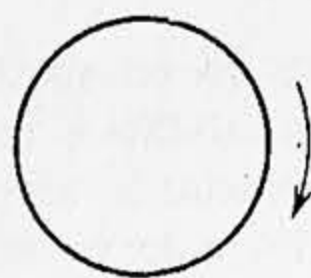


Figura 19-20.

această coardă. (Indicație: răspunsul este independent de raza cercului și de masa pe unitate de lungime a corzii!)

10. (a) În baza exemplului 2, să se arate că viteza maximă a unei particule într-o coardă prin care trece o undă sinusoidală este $u = y_m \omega$. (b) În exemplul 2 am văzut că particulele din coardă oscilează într-o mișcare armonică simplă. Energia mecanică a fiecărei particule este egală cu suma dintre energia sa cinetică și potențială și este totdeauna egală cu valoarea maximă a energiei sale cinetice. Să se considere un element al corzii de masă $\mu \Delta x$ și să se arate că energia pe unitatea de lungime a corzii este dată de

$$E_l = 2\pi^2 \mu v^2 y_m^2.$$

(c) Să se arate în sfîrșit că puterea medie sau viteza medie de transfer a energiei este egală cu produsul dintre energia pe unitatea de lungime și viteza undei. (b) Sînt valabile aceste rezultate doar pentru o undă sinusoidală?

11. O sursă de 1,0 W emite unde sferice într-un mediu izotrop neabsorbant. Care este intensitatea undei la 1,0 m de sursă?

12. (a) Să se arate că intensitatea I (energia care traversează unitatea de arie în unitatea de timp) este egală cu produsul dintre energia pe unitatea de volum e și viteza de propagare v a perturbației ondulatorii. (b) Undele radio se propagă cu o viteză de $3,0 \cdot 10^8$ m/s. Să se afle densitatea de energie într-o undă radio la 500 km de o sursă de 50 kW, presupunînd că undele sînt sferice și propagarea este izotropă.

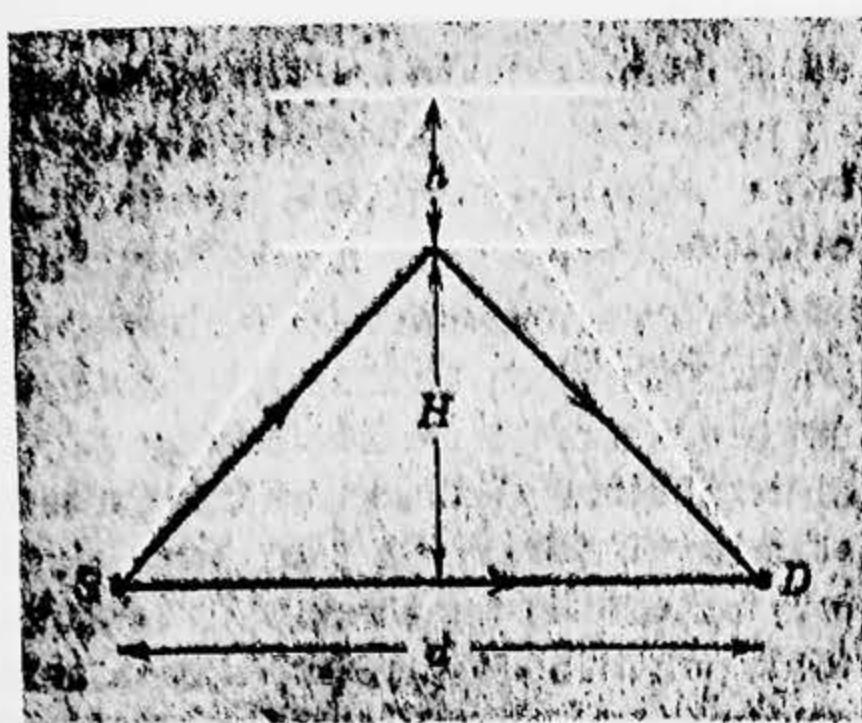


Figura 19-21.

13. O sursă liniară produce o undă progresivă cilindrică. Presupunând că mediul nu absoarbe energie, să se afle cum depinde amplitudinea și intensitatea unei unde de distanța până la sursă.

14. Să se determine amplitudinea mișcării rezultante atunci când două mișcări sinusoidale având aceeași frecvență și propagându-se în aceeași direcție se compun, dacă amplitudinile lor sunt 3,0 cm, respectiv 4,0 cm și ele diferă ca fază cu $\pi/2$ rad.

15. O sursă S și un detector D de unde de înaltă frecvență sunt la o distanță d între ele, pe suprafața Pământului. Unda directă de la S este în fază în D cu unda de la S care este reflectată de o pătură orizontală la o altitudine H (fig. 19-21). Raza incidentă și raza reflectată fac același unghi cu suprafața reflectoare. Când pătura urcă cu o distanță h , nu se recepționează nici un semnal în D . Să se neglijeze absorbția în atmosferă și să se găsească relația dintre d , h , H și lungimea de undă λ a undelor.

16. Trei unde sinusoidale componente au aceeași perioadă, dar amplitudinile lor se află în raporturile $1:1/2:1/3$ și unghiurile lor de fază sunt 0 , $\pi/2$ și respectiv π . Să se reprezinte forma unei rezultante și să se discute natura ei.

17. Patru unde sinusoidale componente au frecvențele în raportul $1:2:3:4$ și amplitudinile în raportul $1:1/2:1/3:1/4$. Componenta întâia și componenta a treia sunt defazate cu 180° față de componenta a doua și componenta a patra. Să se reprezinte forma unei rezultante și să se discute natura ei.

18. O coardă vibrează conform ecuației

$$y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t,$$

unde x și y sunt în centimetri și t în secunde. (a) Care sunt amplitudinea și viteza undelor componente a căror suprapunere poate da naștere la această vibrație? (b) Care este distanța dintre noduri? (c) Care este viteza unei particule a corzii din punctul $x = 1,5$ cm când $t = 9/8$ s?

19. Două perturbații se propagă de-a lungul unei corzi în sensuri opuse, așa cum se arată în figura 19-22. (a) Dacă viteza unei unde este 2,0 cm/s și pulsările sunt la o distanță de 6,0 cm între ele, să se reprezinte situația după 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 s. (b) Ce s-a întâmplat cu energia la $t = 1,5$ s?

20. Două unde sinusoidale transversale se propagă în sensuri opuse de-a lungul unei corzi. Fiecare are o amplitudine de 3,0 cm și o lungime de undă de 6,0 cm. Viteza unei trans-

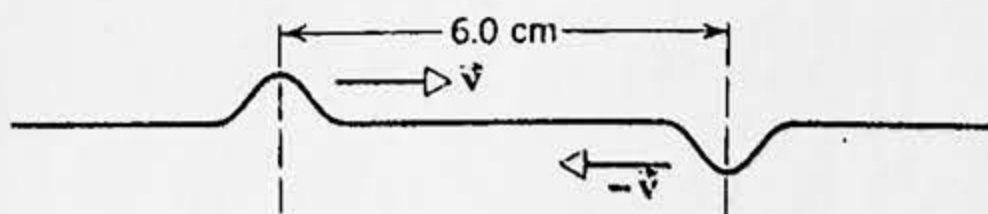


Figura 19-22.

versale în coardă este 0,50 cm/s. Să se reprezinte forma corzii în fiecare din următoarele momente: $t=0$ (arbitrar), $t=1,5$, $t=3,0$, $t=6,0$, $t=7,5$ și $t=9,0$ s.

21. Ecuația unei unde transversale care se propagă într-o sfoară este dată de

$$y = 60 \cos \frac{\pi}{2} (0,0050 x - 8,0 t - 0,57),$$

în care x și y sînt exprimați în centimetri, iar t în secunde. Să se scrie ecuația unei unde care, compusă fiind cu cea dată, ar produce unde staționare pe sfoară.

22. Într-o experiență de laborator asupra undelor staționare o coardă de 1,0 m lungime este prinsă de brațul unui diapazon acționat electric, care vibrează perpendicular pe lungimea corzii cu o frecvență de 60 Hz. Greutatea corzii este de 50 g. (a) La ce tensiune trebuie supusă coarda (de celălalt capăt sînt agățate greutate) dacă ea trebuie să vibreze cu patru fusuri? (b) Ce s-ar întîmpla dacă diapazonul ar fi rotit astfel încît să vibreze paralel cu lungimea corzii?

23. O undă se propagă uniform în toate direcțiile de la o sursă punctiformă. Să se justifice următoarea expresie pentru elongația y a mediului la distanța r de sursă:

$$y = \frac{Y}{r} \sin k(r - vt).$$

Să se ia în considerare viteza, direcția de propagare, periodicitatea și intensitatea undei. Care sînt dimensiunile constantelor Y ?

24. Să considerăm două surse punctiforme S_1 și S_2 (fig. 19-23) care emit unde de aceeași frecvență și amplitudine. Undele pornesc cu aceeași fază și această relație de fază între surse este menținută tot timpul. Să considerăm punctele P pentru care r_1 este aproape egal cu r_2 . (a) Să se arate că suprapunerea acestor două unde dă naștere la o undă a cărei amplitudine variază cu poziția lui P aproximativ conform expresiei

$$\frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2} (r_1 - r_2),$$

în care $r = (r_1 + r_2)/2$. (b) Să se arate apoi că anularea totală se produce atunci cînd $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, n fiind un întreg, și că o întărire totală se produce atunci cînd $r_1 - r_2 = n\lambda$.

Locul geometric al punctelor a căror diferență de drum de la cele două puncte fixe este o constantă, este o hiperbolă, cele două puncte fixe fiind focarele. Prin urmare, fiecare valoare a lui n dă o linie hiperbolică de interferență constructivă și o linie hiperbolică de interferență distructivă. În punctele pentru care r_1 și r_2 nu sînt aproximativ egale (sau punctele sînt apropiate de surse), amplitudinile un-

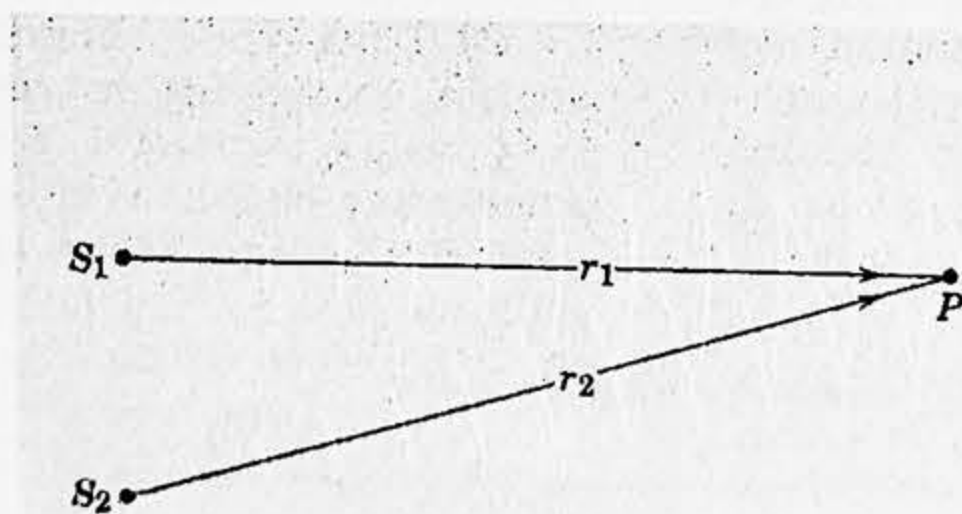


Figura 19-23.

delor emise de S_1 și S_2 diferă și anulațiile sînt doar parțiale.

25. Dacă o undă progresivă incidentă este numai parțial reflectată de o frontieră, rezultanta suprapunerii celor două unde avînd amplitudini diferite și propagîndu-se în sensuri opuse dă un tablou de unde staționare a căror anvelopă este arătată în figura 19-24. Raportul amplitudinilor din unda staționară este definit prin $R = (A_i + A_r) / (A_i - A_r) = A_{\max} / A_{\min}$. (a) Să se arate că pentru o reflexie de 100% raportul R este infinit și că pentru reflexie nulă raportul R este 1. (b) Să se arate că o măsurătoare a raportului R imediat înaintea frontierei arată că reflexia procentuală are loc la frontieră conform formulei

$$\text{reflexia } \% = [(R-1)/(R+1)] \times 100.$$

26. Două corzi cu densitatea liniară μ_1 și respectiv μ_2 sînt legate între ele în punctul $x=0$ și întinse cu o tensiune F . O undă $y=A \sin k_1(x-v_1t)$ în coarda de densitate μ_1 atinge jonc-

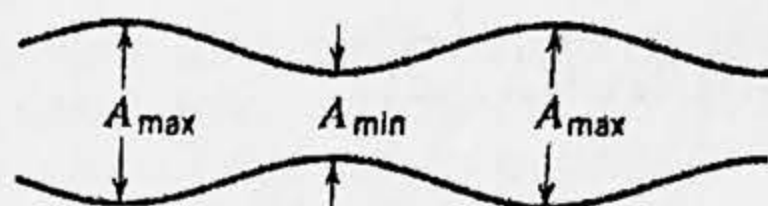


Figura 19-24.

țiunea dintre cele două corzi, în care ea este parțial transmisă în coarda de densitate μ_2 și parțial reflectată. Fie aceste unde $B \sin k_2(x-v_2t)$ și respectiv $C \sin k_1(x+v_1t)$. (a) Presupunînd că $k_2v_2 = k_1v_1 = \omega$ și că elongația nodului datorită unei incidente și unei reflectate este aceeași ca elongația datorită unei transmise, să se arate că $A=B+C$. (b) Dacă presupunem că ambele corzi în vecinătatea nodului au aceeași pantă (de ce?), adică dy/dx din coarda 1 este egal cu dy/dx din coarda 2, să se arate că

$$C = A \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$$

În ce condiții C este negativ?

Undele sonore

20-1. Sunete, ultrasunete și infrasunete

Undele sonore sînt unde mecanice longitudinale. Ele se pot propaga în solide, lichide și gaze. Particulele materiale care transmit o astfel de undă oscilează în direcția de propagare a undei însăși. Există un interval larg de frecvențe în care pot fi generate undele mecanice longitudinale, sunetele fiind restrînse la intervalul de frecvențe care pot produce o senzație auditivă. Acest interval se întinde de la aproximativ 20 Hz pînă la aproximativ 20 kHz și se numește interval *audibil*. O undă mecanică longitudinală a cărei frecvență este sub intervalul audibil, se cheamă *infrasunet*, iar o undă a cărei frecvență este deasupra intervalului audibil se cheamă *ultrasunet*.

Infrasunetele care prezintă interes sînt de obicei generate de surse mari, de exemplu undele generate de un cutremur¹. Frecvențele înalte corespunzătoare ultrasunetelor pot fi produse prin vibrațiile elastice ale unui cristal de cuarț, induse la rezonanță de un cîmp electric alternativ aplicat (efectul piezoelectric). În acest mod se pot produce ultrasunete cu frecvențe pînă la 600 MHz; lungimea de undă corespunzătoare în aer este aproximativ $5 \cdot 10^{-5}$ cm, aceeași ca lungimea de undă a undelor luminoase vizibile.

Sunetele se produc în corzi vibrante (vioară, corzile vocale umane), coloane de aer vibrante (orga, clarinetul), plăci și membrane vibrante (xilofon, difuzor, tobă). Toate aceste elemente vibrante comprimă alternativ aerul înconjurător atunci cînd se mișcă înainte și îl rarefiază atunci cînd se mișcă înapoi. Aerul transmite aceste perturbații de la sursă spre exterior sub forma unei unde. După atingerea urechii aceste

¹ Vezi „Unde lungi generate de cutremur”, de Jack Oliver, *Scientific American*, martie 1959.

unde produc senzația de sunet. Undele care sînt aproximativ periodice sau constau dintr-un număr mic de componente aproximativ periodice dau naștere la o senzație plăcută (dacă intensitatea nu este prea înaltă), ca de exemplu sunetele muzicale. Sunetul a cărui undă nu este periodică este auzit ca zgomot. Zgomotul poate fi prezentat ca o suprapunere de unde periodice, dar numărul componentelor este foarte mare.

În acest capitol ne ocupăm de proprietățile undelor mecanice longitudinale, folosind ca prototip undele sonore.

20-2. Propagarea și viteza undelor longitudinale

Undele sonore, dacă nu sînt împiedicate, se vor răspîndi în toate direcțiile de la sursă. Este mai simplu însă să studiem propagarea unidimensională, decît propagarea tridimensională, de aceea vom considera mai întîi transmisia undelor longitudinale într-un tub.

Figura 20-1 arată un piston la capătul unui tub lung umplut cu un fluid compresibil. Liniile verticale împart fluidul compresibil în „straturi” subțiri, fiecare din aceste straturi conținînd o aceeași masă de fluid. Acolo unde liniile sînt relativ strînse între ele, presiunea fluidului și densitatea sînt mai mari decît în fluidul neperturbat normal, și reciproc. Vom trata fluidul ca un mediu continuu și vom ignora pentru moment faptul că el este constituit din molecule care se află într-o continuă mișcare dezordonată.

Dacă împingem pistonul din figura 20-1 înainte, fluidul din fața pistonului este comprimat, presiunea fluidului și densitatea cresc peste valorile lor normale neperturbate. Fluidul comprimat se mișcă înainte, comprimînd straturile de fluid vecine cu el și o compresiune se va propaga prin tub. Dacă acum retragem pistonul, fluidul din fața sa se va destinde, presiunea și densitatea vor coborî sub valorile lor normale neperturbate; o rarefiere se va propaga prin tub. Aceste perturbații sînt analoge cu perturbațiile transversale care se propagă de-a lungul unei corzi, cu excepția faptului că elementele de fluid oscilante sînt deplasate de-a lungul direcției de propagare (longitudinal) în loc de a fi perpendiculare pe această direcție (transversale). Dacă pistonul oscilează înainte și înapoi, de-a lungul tubului se va propaga un tren continuu de comprimări și rarefierii (figura 20-1). Ca și pentru undele transversale dintr-o coardă (vezi paragraful 19-5) putem exprima, folosind legile lui Newton ale mișcării, viteza de propagare a

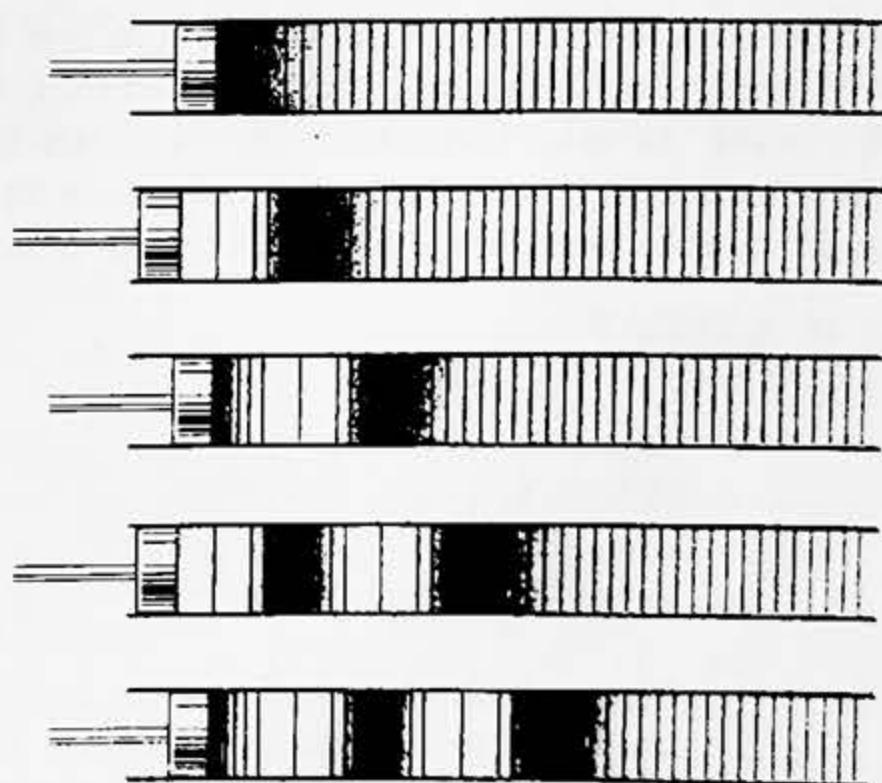


Figura 20-1. Undele sonore generate într-un tub de către un piston oscilant. Liniile verticale împart mediul compresibil din tub în straturi de masă egală.

acestei unde longitudinale prin proprietatea elastică și proprietatea inerțială a mediului. Să facem așa.

Pentru moment să presupunem că tubul este foarte lung astfel încît putem ignora reflexiile de la celălalt capăt. Ca și pentru coarda din figura 19-6, nu vom considera o undă extinsă, ci o singură perturbație (de compresie) pe care o putem genera dînd pistonului din figura 20-1 o lovitură scurtă, rapidă, spre interior.

Figura 20-2 arată o astfel de perturbație (numită „zonă de compresie”) care se propagă cu viteza v de-a lungul tubului de la stînga la dreapta. Pentru simplitate am presupus că această perturbație are marginile anterioară și posterioară net definite și că presiunea și densitatea fluidului din interiorul său sînt uniforme. Cînd am analizat mișcarea unei perturbații transversale într-o coardă, am găsit convenabil să alegem un sistem de referință în care perturbația rămînea staționară; vom face aici la fel. În figura 20-2 zona de compresie va rămîne atunci staționară în reperul nostru, în timp ce fluidul se va mișca prin ea, de la dreapta spre stînga cu viteza v , așa cum se vede.

Să urmărim mișcarea elementului de fluid conținut între liniile verticale din P și R din figura 20-2. Acest element se mișcă înainte cu viteza v pînă cînd lovește zona de compresie. Cînd intră în această zonă el întâlnește o diferență de presiune Δp între marginea sa anterioară și cea posterioară. Elementul este comprimat și decelerat, mișcîndu-se cu o viteză mai mică $v + \Delta v$ în interiorul zonei, creșterea Δv fiind negativă. Elementul iese pînă la urmă prin fața stîngă a zonei unde se destinde pînă la volumul său inițial și diferența de presiune Δp acționează pentru a-l accelera pînă la viteza inițială v . Figura arată elementul în punctul R , după ce a trecut prin zona de compresie și se mișcă iarăși cu viteza v ca în P .

Să aplicăm legile lui Newton elementului de fluid în timp ce el intră în zona de compresie. Forța rezultantă care acționează în timpul trecerii este îndreptată spre dreapta în figura 20-2 și are valoarea

$$F = (p + \Delta p)A - pA = \Delta p A$$

în care A este aria secțiunii transversale a tubului.

Lungimea elementului în afara zonei de compresie (de exemplu în P) este $v\Delta t$, unde Δt este timpul necesar elementului să treacă printr-un punct dat. Volumul elementului este deci $vA\Delta t$ și masa sa $\rho_0 vA\Delta t$, unde ρ_0 este densitatea fluidului în afara zonei de compresie. Decelerația a suferită de element atunci cînd

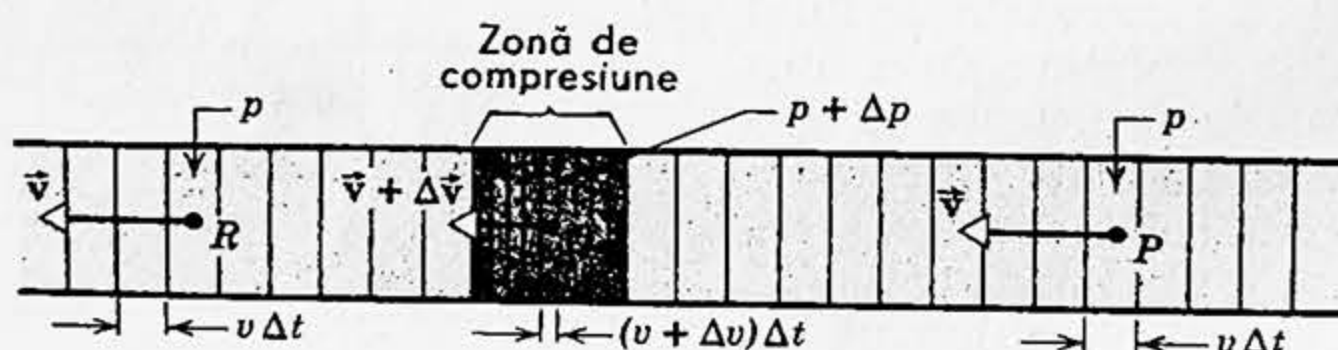


Figura 20-2. O perturbație de compresie se propagă de-a lungul unui tub umplut cu gaz. Într-un sistem de referință în care gazul neperturbat se află în repaus, perturbația se mișcă de la stînga la dreapta cu viteza v . Vedem însă perturbația dintr-un sistem de referință în care perturbația este staționară; într-un astfel de reper gazul din afara perturbației curge prin tub de la dreapta spre stînga cu viteza v , așa cum este arătat. Observăm că Δv este negativ.

el intră în zonă este $-\Delta v/\Delta t$; deoarece Δv este în mod inerent negativ, a este pozitiv, ceea ce înseamnă că, la fel ca forța $\Delta p A$ din figura 20-2, accelerația este îndreptată spre dreapta. În modul acesta legea a doua a lui Newton

$$F = ma$$

dă

$$\Delta p A = (\rho_0 v A \Delta t) \frac{-\Delta v}{\Delta t},$$

pe care o putem scrie astfel

$$\rho_0 v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v/v}.$$

Dar fluidul care ar ocupa un volum $V = Av\Delta t$ în P , este comprimat cu o cantitate $A(\Delta v)\Delta t = \Delta V$ atunci când intră în zona de compresie. Prin urmare

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta v \Delta t}{Av \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

și obținem

$$\rho_0 v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}.$$

Raportul dintre variația presiunii exercitată asupra unui corp, Δp , și variația relativă rezultantă a volumului, $-\Delta V/V$, se numește *modul de compresie* sau *modul de compresibilitate* B al corpului. Adică, $B = -V \Delta p / \Delta V$. Modulul B este pozitiv deoarece o creștere de presiune produce o descreștere de volum. Cu ajutorul lui B viteza perturbației longitudinale în mediul din figura 20-2 este

$$v = \sqrt{B/\rho_0}. \quad (20-1)$$

O analiză mai extinsă decât cea dată mai sus arată că ecuația (20-1) se aplică nu numai perturbațiilor rectangulare de tipul arătat în figura 20-2, ci și perturbațiilor de orice formă, precum și trenurilor de unde extinse. Observăm că viteza undei este determinată de proprietățile mediului prin care ea se propagă și că intervin proprietatea elastică B și proprietatea inerțială ρ_0 . Tabela 20-1 dă viteza undelor (sonore) longitudinale în diferite medii.

VITEZA SUNETULUI

TABELA 20-1

Mediul	Temperatura °C	Viteza, m/s
Aer	0	331,3
Hidrogen	0	1 286
Oxigen	0	317,2
Apă	15	1 450
Plumb	20	1 230
Aluminiu	20	5 100
Cupru	20	3 560
Fier	20	5 130
Valori extreme:		
Granit		6 000
Cuciuc vulcanizat	0	54

Dacă mediul este un gaz, cum ar fi aerul, este posibil să exprimăm modulul B prin presiunea p_0 a gazului neperturbat. Pentru o undă sonoră într-un gaz obținem

$$v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0},$$

unde γ este o constantă numită raportul căldurilor specifice ale gazului (capitolul 23).

Dacă mediul este un solid, modulul de compresibilitate din cazul unei tije subțiri trebuie înlocuit cu modulul de elasticitate al lui Young. Dacă solidul este extins, trebuie să ținem seama de faptul că, spre deosebire de un fluid, solidul oferă rezistență elastică la forțe tangențiale de forfecare sau alunecare și viteza undelor longitudinale va depinde atât de modulul de alunecare cât și de modulul de compresibilitate.

20-3. Unde longitudinale progresive

Să considerăm din nou trenul continuu de comprimări și rarefierii care se propagă prin tubul din figura 20-1. Pe măsură ce unda avansează de-a lungul tubului, fiecare mic element de volum al fluidului oscilează în jurul poziției sale de echilibru. Deplasarea are loc spre dreapta sau spre stînga de-a lungul direcției x de propagare a undei. Pentru conveniență, să reprezentăm deplasarea oricărui astfel de element de volum (sau strat de elemente care se mișcă în același mod) de la poziția sa de echilibru din x cu litera y . Trebuie înțeles că deplasarea y are loc *de-a lungul direcției de propagare* pentru o undă longitudinală, în timp ce pentru o undă transversală deplasarea y are loc *perpendicular pe direcția de propagare*. Atunci ecuația unei unde longitudinale care se propagă spre dreapta poate fi scrisă astfel

$$y = f(x - vt).$$

Pentru cazul particular al unei oscilații armonice simple avem

$$y = y_m \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt).$$

În această ecuație v este viteza undei longitudinale, y_m este amplitudinea sa și λ este lungimea sa de undă; y dă depărtarea particulei față de poziția sa de echilibru din x la momentul t . Ca și mai înainte, putem scrie aceasta mai compact astfel

$$y = y_m \cos (kx - \omega t). \quad (20-2)$$

Este de obicei mai convenabil să lucrăm cu variațiile de presiune dintr-o undă sonoră decît cu elongațiile particulelor care transmit unda. Să scriem ecuația undei cu ajutorul variației de presiune și nu cu ajutorul elongației.

Din relația

$$B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

avem

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}.$$

Așa cum y a reprezentat elongația de la poziția de echilibru x , tot astfel fie acum p variația presiunii față de presiunea inițială p_0 . Atunci p apare în locul lui Δp și

$$p = -B \frac{\Delta V}{V}.$$

Dacă un strat de fluid are la presiunea p_0 grosime Δx și aria secțiunii transversale A , volumul său va fi $V = A\Delta x$. Când presiunea variază, volumul său va varia cu $A\Delta y$, unde Δy este cantitatea cu care grosimea stratului variază în timpul comprimării sau rarefierii. Prin urmare

$$p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{A\Delta y}{A\Delta x}.$$

Când $\Delta x \rightarrow 0$, astfel încât stratul de fluid să se restrângă la o grosime infinitesimală, obținem

$$p = -B \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (20-3)$$

Am folosit notația derivatei parțiale deoarece (vezi ecuația 20-2) y este o funcție atât de x cât și de t , și considerăm ultima mărime ca o constantă în această discuție. Dacă elongația particulei este armonică simplă, atunci din ecuația (20-2) obținem

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ky_m \sin(kx - \omega t)$$

și din ecuația (20-3)

$$p = Bky_m \sin(kx - \omega t). \quad (20-4)$$

Prin urmare variația de presiune în fiecare punct x este de asemenea armonică simplă.

Deoarece $v = \sqrt{B/\rho_0}$, putem scrie ecuația (20-4) mai convenabil astfel

$$p = [k\rho_0 v^2 y_m] \sin(kx - \omega t).$$

Reamintim că p reprezintă variația față de presiunea standard p_0 . Termenul dintre paranteze reprezintă variația maximă a presiunii și se numește *amplitudinea presiunii*. Dacă îl notăm cu P , avem

$$p = P \sin(kx - \omega t), \quad (20-5)$$

unde

$$P = k\rho_0 v^2 y_m. \quad (20-6)$$

Prin urmare, o undă sonoră poate fi considerată fie ca o undă de deplasare (elongații), fie ca o undă de presiune. Dacă prima ecuație este scrisă ca o funcție cosinus, ultima va fi o funcție sinus și invers. Unda de deplasare este deci defazată cu 90° față de unda de presiune, adică, când deplasarea de la poziția de echilibru într-un punct este maximă sau minimă, excesul de presiune este acolo nul; când deplasarea într-un punct este zero excesul sau deficitul de presiune este acolo maxim.

Ecuația (20-6) dă relația dintre amplitudinea presiunii (variația maximă a presiunii față de presiunea la echilibru) și amplitudinea elongației (variația maximă a poziției față de poziția de echilibru). Studentul trebuie să verifice dimensiunile fiecărui membru ale ecuației (20-6) pentru consistență. Ce unități poate avea amplitudinea presiunii?

Intensitatea unei unde este proporțională cu pătratul amplitudinii elongațiilor din undă; vezi paragraful 19-6. Am arătat mai sus că pentru undele sonore amplitudinea presiunii este proporțională cu amplitudinea elongației. Prin urmare, intensitatea unei unde sonore este proporțională cu pătratul amplitudinii presiunii. În adevăr, dacă intensitatea este exprimată cu ajutorul amplitudinii presiunii, frecvența nu apare explicit în expresie (vezi problema 9). Prin urmare, prin măsurarea variațiilor de presiune putem compara direct intensitățile sunetelor care au frecvențe diferite. Din acest motiv, instrumentele care măsoară variațiile de presiune sînt preferabile față de cele care măsoară amplitudinea deplasărilor. După cum vom vedea în exemplul 1 amplitudinile elongației sînt dificil de măsurat în orice caz.

Exemplul 1. (a) Variația maximă de presiune P pe care o poate tolera urechea în sunetele tari este de aproximativ 28 N/m^2 . Presiunea atmosferică normală este de aproximativ 10^5 N/m^2 . Să se afle elongația corespunzătoare maximă pentru o undă sonoră în aer avînd o frecvență de 1000 Hz .

Din ecuația (20-6) avem

$$y_m = \frac{P}{k\rho_0 v^2}.$$

Din tabela 20-1, $v = 331 \text{ m/s}$ astfel încît

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \times 10^3}{331} \text{ m}^{-1} = 19 \text{ m}^{-1}.$$

Densitatea aerului ρ_0 este $1,22 \text{ kg/m}^3$. Prin urmare, pentru $P = 28 \text{ N/m}^2$, obținem

$$y_m = \frac{28}{(19)(1,22)(331)^2} \text{ m} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Amplitudinile elongațiilor pentru sunetele cele mai tari sînt de aproximativ 10^{-5} m , o valoare într-adevăr foarte mică.

(b) În sunetul cel mai slab care poate fi auzit la 1000 Hz amplitudinea presiunii este de aproximativ $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$. Să se afle amplitudinea corespunzătoare a elongației.

Din $y_m = P/k\rho_0 v^2$, folosind aceste valori pentru k , v și ρ_0 , obținem, cu $P = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$,

$$y_m \cong 8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cong 10^{-11} \text{ m}.$$

Aceasta este mai mică decît raza unui atom, care este de aproximativ 10^{-10} m ! Cum este posibil ca urechea să răspundă la o deplasare atît de mică?

În analiza noastră am ignorat structura moleculară a substanței și am tratat fluidul ca un mediu continuu. În gaze însă spațiile dintre molecule sînt mari în comparație cu diametrele moleculelor. Moleculele se mișcă dezordonat. Oscilațiile produse de o undă sonoră care trece prin gaz se suprapun peste această mișcare termică dezordonată. Un impuls transmis unei molecule se transmite unei alte

molecule numai după ce prima s-a deplasat prin spațiul vid dintre ele și s-a ciocnit cu molecula a doua. Din această scurtă discuție, vă așteptați ca viteza sunetului să depășească vreodată viteza moleculară medie într-un fluid?

20-4. Unde longitudinale staționare

Undele longitudinale care se propagă de-a lungul unui tub sînt reflectate la capetele tubului, exact cum sînt reflectate undele transversale într-o coardă la capetele ei. Interferența dintre undele care se propagă în sensuri opuse dă naștere la unde longitudinale staționare.

Dacă capătul tubului este închis, unda reflectată este defazată cu 180° față de unda incidentă. Acest rezultat este o consecință necesară a faptului că deplasarea unor elemente de volum mici la un capăt închis trebuie să fie totdeauna nulă. Prin urmare un capăt închis este totdeauna un nod al elongațiilor. Dacă capătul tubului este deschis, elementele de fluid de acolo sînt libere să se miște. Totuși, natura reflexiei depinde de faptul că tubul este larg sau îngust în comparație cu lungimea de undă. Dacă tubul este îngust în comparație cu lungimea de undă, ca la majoritatea instrumentelor muzicale, unda reflectată are aproximativ aceeași fază ca și unda incidentă. Atunci capătul deschis este aproape un *ventru* al elongațiilor. Ventrul exact se află de obicei undeva în apropierea deschiderii, însă lungimea efectivă a coloanelor de aer ale unui instrument de suflat, de exemplu, nu este atît de precis definită ca lungimea unei corzi fixate la ambele capete.

Undele longitudinale staționare într-o coloană de gaz pot fi demonstrate spectaculos cu ajutorul aparatului arătat în figura 20-3. O sursă de unde longitudinale, cum ar fi difuzorul unui oscilator audio situat în S, produce vibrații într-o diafragmă flexibilă de la un capăt al tubului. Gazul umple tubul printr-un ajutoraj și iese încet prin niște mici orificii distanțate regulat de-a lungul tubului pe fața sa superioară. Gazul care iese este aprins formînd un șir de flăcări. Atunci cînd se găsește o frecvență la care coloana de gaz intră în rezonanță, amplitudinea undelor longitudinale staționare devine destul de mare și putem vedea o variație de tipul unei unde în înălțimea și lărgimea flăcărilor de gaz de-a lungul tubului. Intervalul dintre noduri sau ventre este vizibil clar. Variînd frecvența putem trece de la o condiție de rezonanță la alta. Modurile proprii de oscilație ale coloanei de gaz sînt determinate de lungimea efectivă a coloanei și de viteza undei. Lungimea de undă λ la rezonanță poate fi luată egală cu de două ori distanța dintre două

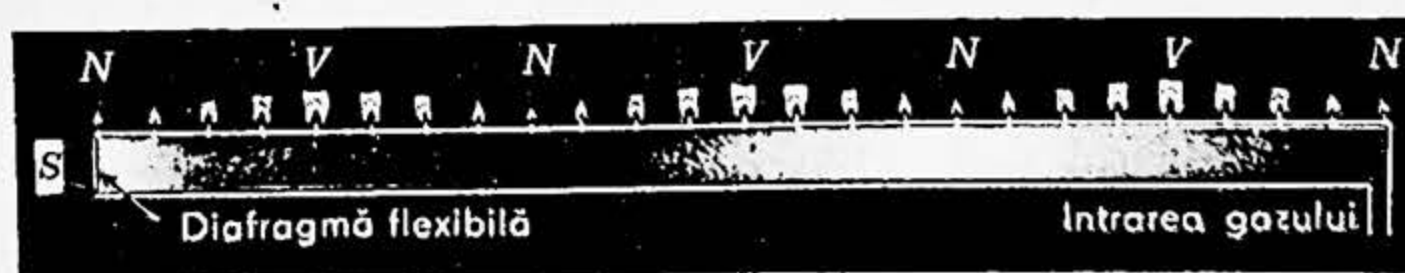


Figura 20-3. Flăcările arată prezența undelor staționare într-un tub umplut cu gaz de iluminat. V și N se referă la ventre și respectiv noduri ale elongațiilor.

noduri adiacente (sau ventre) și cunoscând frecvența ν a sursei la rezonanță, putem determina viteza undei în gaz în aceste condiții din relația $v = \nu \lambda$. În practică există procedee mai flexibile și mai precise pentru măsurarea vitezei sunetului în gaze (vezi problema 17 și exemplul 2).

În figura 20-3 nodurile și ventrele, N și V , se referă la *elongațiile* particulelor în unda staționară. Într-un nod al elongațiilor, variațiile de presiune (deasupra și sub media) sînt maxime. Prin urmare, un nod al elongațiilor corespunde unui ventru al presiunii. Într-un ventru al elongației presiunea rămîne constantă în timp. Prin urmare, un ventru al elongației corespunde unui nod al presiunii.

Aceasta poate fi înțeles din punct de vedere fizic dacă ne imaginăm că două elemente mici de volum de gaz de o parte și de alta a unui nod al elongației, vibrează în *opозиție de fază*. Prin urmare, cînd ele se apropie unul de celălalt, presiunea în acest nod va crește, iar cînd ele se depărtează unul de altul, presiunea din acest nod va scădea. Două mici elemente de gaz care se află de o parte și de alta a unui ventru al elongației vibrează în *fază* și de aceea nu dau naștere la nici un fel de variații de presiune în ventru.

20-5. Sistemele vibrante și surse sonore

Dacă o coardă fixată la ambele capete este ciupită, se vor propaga vibrații transversale de-a lungul corzii; aceste perturbații se reflectă pe capetele fixe și se formează astfel o undă staționară. Modurile proprii de vibrație ale corzii sînt astfel excitate și aceste vibrații dau naștere la unde longitudinale în aerul înconjurător care le transmite pînă la urechile noastre ca un sunet muzical.

Am văzut (paragraful 19-10) că o coardă de lungime l fixată la ambele capete poate rezona la frecvențele date de

$$\nu_n = \frac{n}{2l} v = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (20-7)$$

Aici v este viteza undelor transversale în coardă a căror suprapunere poate fi considerată ca dînd naștere vibrațiilor; viteza $v (= \sqrt{F/\mu})$ este aceeași pentru toate frecvențele. Pentru oricare dintre aceste frecvențe, coarda va conține un număr întreg n de fusuri între capetele sale și condiția ca să existe noduri la capete este îndeplinită (figura 20-4).

Frecvența cea mai joasă, $\sqrt{F/\mu}/2l$, se numește frecvența *fundamentală* ν_1 iar celelalte se cheamă *tonuri superioare* (armonici superioare): Tonurile superioare ale căror frecvențe sînt multipli întregi ai frecvenței fundamentale, formează o serie armonică. Fundamentală este prima armonică. Frecvența $2\nu_1$ este primul ton superior sau a doua armonică, frecvența $3\nu_1$ este al doilea ton superior sau a treia armonică și așa mai departe.

Dacă coarda este inițial deformată astfel încît forma sa este aceeași cu a *uneia* oarecare dintre armonicile posibile, ea va vibra cu frecvența acelei armonici particulare, dacă este lăsată liberă. Condițiile inițiale provin de obicei de la lovirea corzii sau frecarea cu arcușul și în asemenea cazuri sînt prezente în vibrația rezultantă nu numai frecvența

fundamentală, ci și multe tonuri superioare. Avem o suprapunere a mai multor moduri proprii de oscilație. Deplasarea rezultantă este egală cu suma mai multor armonice cu diferite amplitudini; vezi figura 19-12. Perturbațiile care ajung prin aer pînă la ureche și creier dau naștere la un efect net care este caracteristic instrumentului particular cu coarde. Calitatea sunetului unei note particulare (frecvență fundamentală) emisă de un instrument este determinată de numărul armonurilor prezente și de intensitățile lor relative. Figura 20-5 arată spectrele sunetelor și forma undelor corespunzătoare pentru vioară și pian¹.

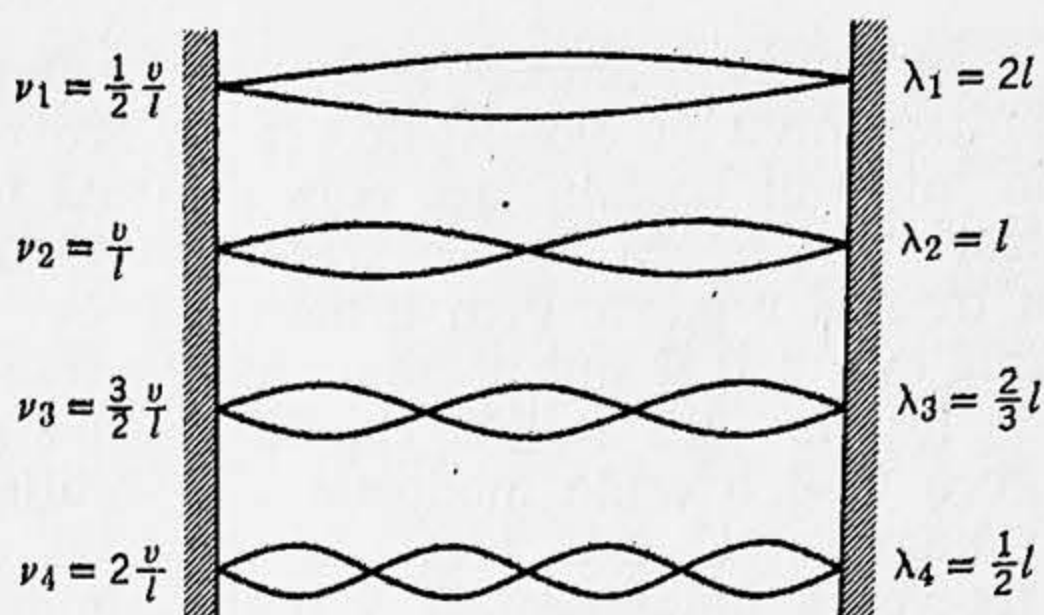


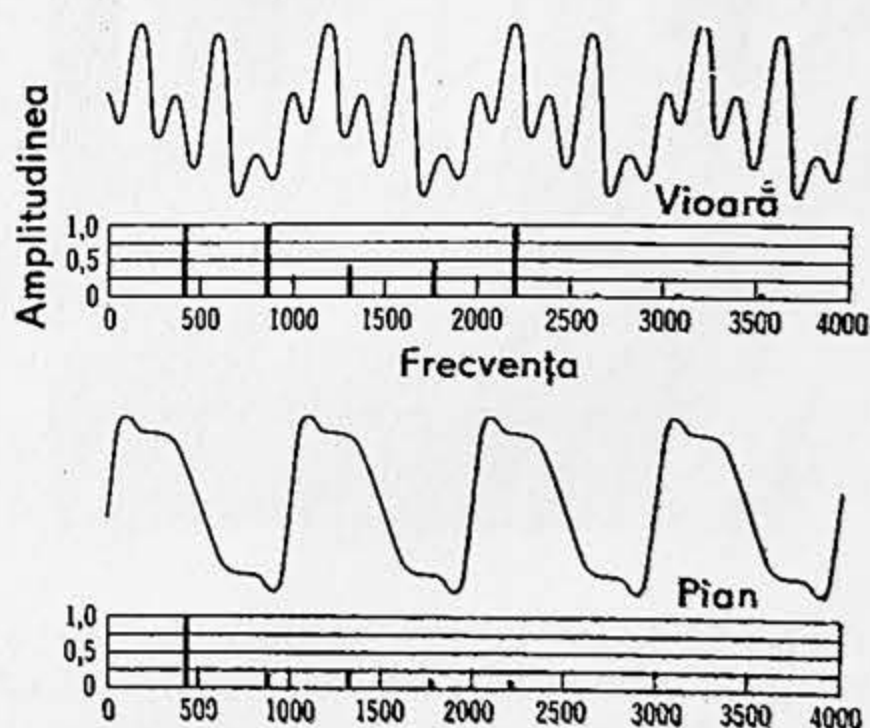
Figura 20-4. Primele patru moduri de vibrație ale unei corzi fixate la ambele capete. Observăm că $\nu_n \lambda_n = v = \sqrt{F/\mu}$.

Un tub de orgă este un exemplu simplu de sursă sonoră, sunetul avînd originea în vibrația unei coloane de aer. Dacă ambele capete ale tubului sînt deschise și un curent de aer este îndreptat spre o margine, se pot instala unde longitudinale staționare în tub. Coloana de aer va fi atunci în rezonanță pe frecvențele sale proprii de vibrație date de

$$\nu_n = \frac{n}{2l} v, \quad n=1,2,3,\dots$$

Aici v este viteza undelor longitudinale din coloană, a căror suprapunere poate fi considerată ca dînd naștere vibrațiilor, iar n este numărul jumătăților de lungimi de undă cuprinse în lungimea l a coloanei. Ca și în cazul coardei ciupite, sînt excitate în același timp fundamentală și tonurile superioare.

Figura 20-5. Forma și spectrul sunetului pentru două instrumente cu coarde, vioara și pianul. Frecvența fundamentală în ambele cazuri este 440 Hz (nota la de concert). În fiecare diagramă se arată numai patru ciluri ale undei. Spectrul sunetului arată amplitudinea relativă a diferitelor componente armonice ale undei. Observăm prezența armonicilor înalte puternice (în special, a cincea) în spectrul vioarei.



¹ Vezi „Fizica pianului” de E. Donnell Blackham în *Scientific American*, decembrie 1965.

Într-un tub deschis frecvența fundamentală corespunde (aproximativ) unui ventru al elongațiilor la fiecare capăt și unui nod al elongațiilor în mijlocul tubului, așa cum se arată în figura 20-6, a. Desenele următoare din figura 20-6, a arată trei tonuri superioare: armonica a doua, a treia și a patra. Prin urmare într-un tub deschis frecvența fundamentală este $v/2l$ și sînt prezente toate armonicile.

Într-un tub închis, capătul închis este un nod al elongațiilor. Figura 20-6, b arată modurile de vibrație ale unui tub închis. Frecvența fundamentală este $v/4l$ (aproximativ) ceea ce constituie jumătate din frecvența fundamentală a unui tub deschis de aceeași lungime.

Singurele tonuri superioare prezente sînt cele care dau un nod al elongațiilor la capătul închis și un ventru (aproximativ) la capătul deschis. Prin urmare, după cum se arată în figura 20-6, b, armonicile a doua, a patra etc., lipsesc. Într-un tub închis frecvența fundamentală este $v/4l$ și sînt prezente numai armonicile *impare*. Înălțimea sunetelor date de un tub deschis este deci diferită de cea a unui tub închis.

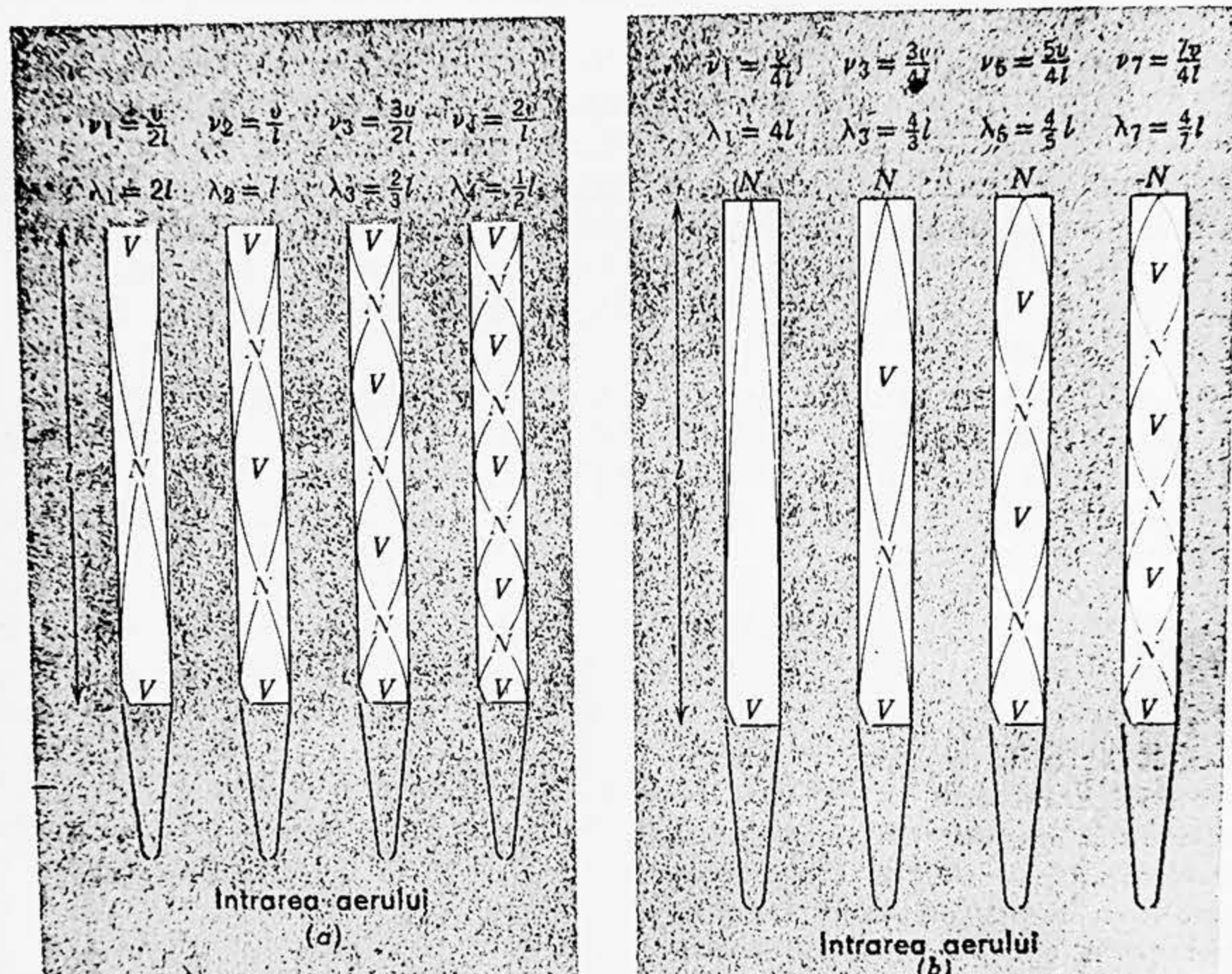


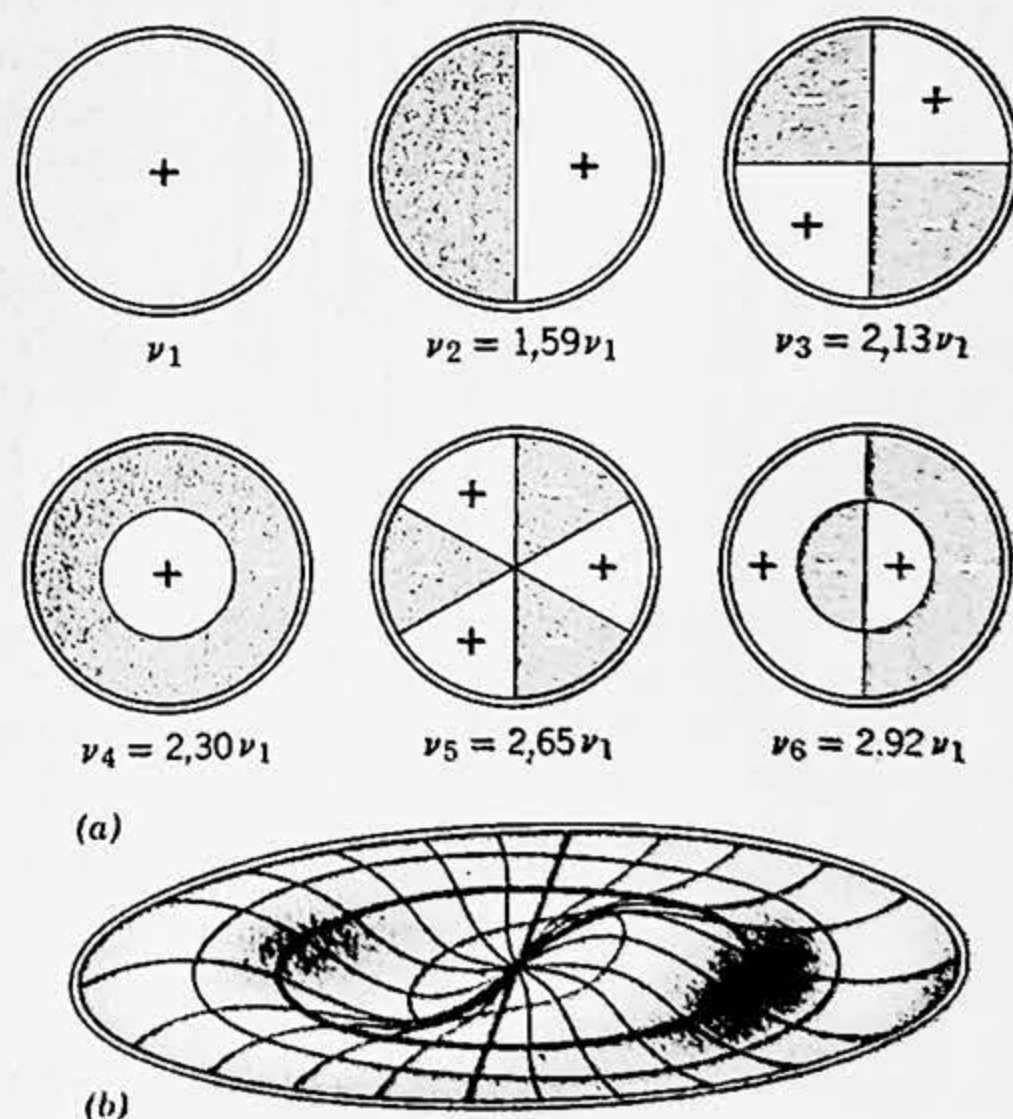
Figura 20-6. (a) Primele patru moduri de vibrație ale unui tub de orgă deschis. Distanța de la linia centrală a tubului pînă la liniile subțiri desenate în interiorul tubului arată amplitudinea elongațiilor în fiecare punct. N și V marchează pozițiile nodurilor și ventrelor elongațiilor. Observăm că ambele capete ale tubului sînt deschise. (b) Primele patru moduri de vibrație ale unui tub de orgă închis. Observăm că armonicile cu număr par sînt absente, iar capătul superior al tubului este închis.

Tije, plăcile și membranele întinse, vibrante, dau naștere de asemenea la unde sonore. Să considerăm o membrană flexibilă întinsă cum este timpanul unei tobe. Dacă ea este lovită, se va propaga o perturbare bidimensională spre exterior de la punctul de lovitură și va fi reflectată iarăși și iarăși de frontiera membranei. Dacă un anumit punct al membranei este forțat să vibreze periodic, trenuri continue de unde se vor propaga de-a lungul membranei. Ca în cazul unidimensional al corzii, tot așa și aici undele staționare pot fi produse în membrana bidimensională. Fiecare din aceste unde staționare are o anumită frecvență proprie (sau caracteristică) a membranei. Iarăși frecvența cea mai joasă se numește fundamentală, iar celelalte se numesc tonuri superioare. În general, alături de fundamentală sînt prezente un anumit număr de tonuri superioare atunci cînd membrana vibrează. Aceste vibrații pot excita unde sonore de aceeași frecvență.

Nodurile unei membrane vibrante sînt linii și nu puncte ca la o coardă vibrantă sau plane ca într-un tub. Deoarece frontiera membranei este fixă, ea trebuie să fie o linie nodală. Pentru o membrană circulară fixată la margine, modurile posibile de vibrație, împreună cu liniile lor nodale, sînt arătate în figura 20-7. Frecvența caracteristică a fiecărui mod de vibrație este exprimată prin frecvența fundamentală ν_1 . Observăm că frecvențele tonurilor superioare *nu* sînt armonice adică nu sînt multipli întregi ai lui ν_1 . Tije vibrante au de asemenea un șir nearmonic de frecvențe proprii. Tije și plăcile au din acest motiv o utilizare limitată ca instrumente muzicale.

În general, se găsește că toate corpurile elastice pot vibra liber cu un șir bine definit de frecvențe pentru un sistem dat de condiții la limită sau pe frontieră. Aceste frecvențe se numesc *frecvențe proprii* sau *frecvențe caracteristice* ale

Figura 20-7. Primele șase moduri de vibrație ale unui timpan circular de toabă fixat la periferia sa. Liniile reprezintă noduri, circumferința fiind în fiecare caz un nod. Semnele + și - reprezintă elongații de sens opus; în momentul în care regiunile + sînt ridicate, - vor fi coborîte. Observăm că frecvența fiecărui mod de vibrație nu este un multiplu întreg al frecvenței fundamentale ν_1 ca în cazul corzilor și tuburilor. (b) O schemă a timpanului vibrînd în modul de vibrație ν_6 . Elongările arătate sînt aici exagerate pentru claritate.



stare. În general, frecvențele proprii nu formează o serie armonică, deși unele din ele se pot afla într-un raport de numere întregi. În toate aceste cazuri avem unde staționare și anumite regiuni ale corpului rămân în repaus tot timpul. Aceste noduri sînt curbe în corpurile bidimensionale și sînt suprafețe în corpurile tridimensionale.

Reamintim că pentru o coardă vibrantă ecuația care descrie o undă staționară (vezi ecuația 10-10, b) este de tipul

$$y = 2y_m \cos 2\pi \nu t \sin \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Aceasta este valabilă pentru o coardă fixată la ambele capete ($y=0$ la $x=0$ și $x=n\lambda/2$).

Forma corzii în fiecare moment este dată de ecuația

$$y = C \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = C \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (t = \text{const})$$

unde C este un „factor de scară” constant, a cărui valoare variază cu timpul; l este lungimea corzii și n este un întreg care specifică modul de vibrație (armonica). Această funcție $\sin 2\pi x/\lambda$ fixează poziția nodurilor și se numește *funcție proprie* sau *funcție caracteristică* a corzii.

Analogs, nodurile oricărui corp elastic vibrant sînt fixate de anumite funcții de poziție care se numesc funcții proprii ale problemei. În general, aceste funcții nu

sînt funcții sinusoidale, ci funcții care devin zero pentru anumite valori ale coordonatelor. Determinarea acestor funcții și a valorilor corespunzătoare ale frecvențelor proprii este o problemă importantă în fizica atomică nucleară și a corpului solid. Ele caracterizează comportarea unor astfel de sisteme. Mecanica cuantică este aceea în care acest procedeu a fost elaborat cu succes pentru sisteme microscopice. Dar rezultatele păstrează o analogie izbitoră cu rezultatele vibrației clasice și teoriei ondulatorii, aplicate fiind sistemelor macroscopice.

Exemplul 2. Figura 20-8 arată un aparat simplu care poate fi folosit pentru a măsura viteza sunetului în aer prin metodele de rezonanță. Un diapazon vibrant de frecvență ν este ținut în apropierea capătului deschis al unui tub. Tubul este parțial umplut cu apă. Lungimea coloanei de aer poate fi variată prin schimbarea nivelului apei. Se găsește că intensitatea sunetului este maximă atunci cînd nivelul apei este treptat coborît de la vârful tubului pînă la o distanță a .

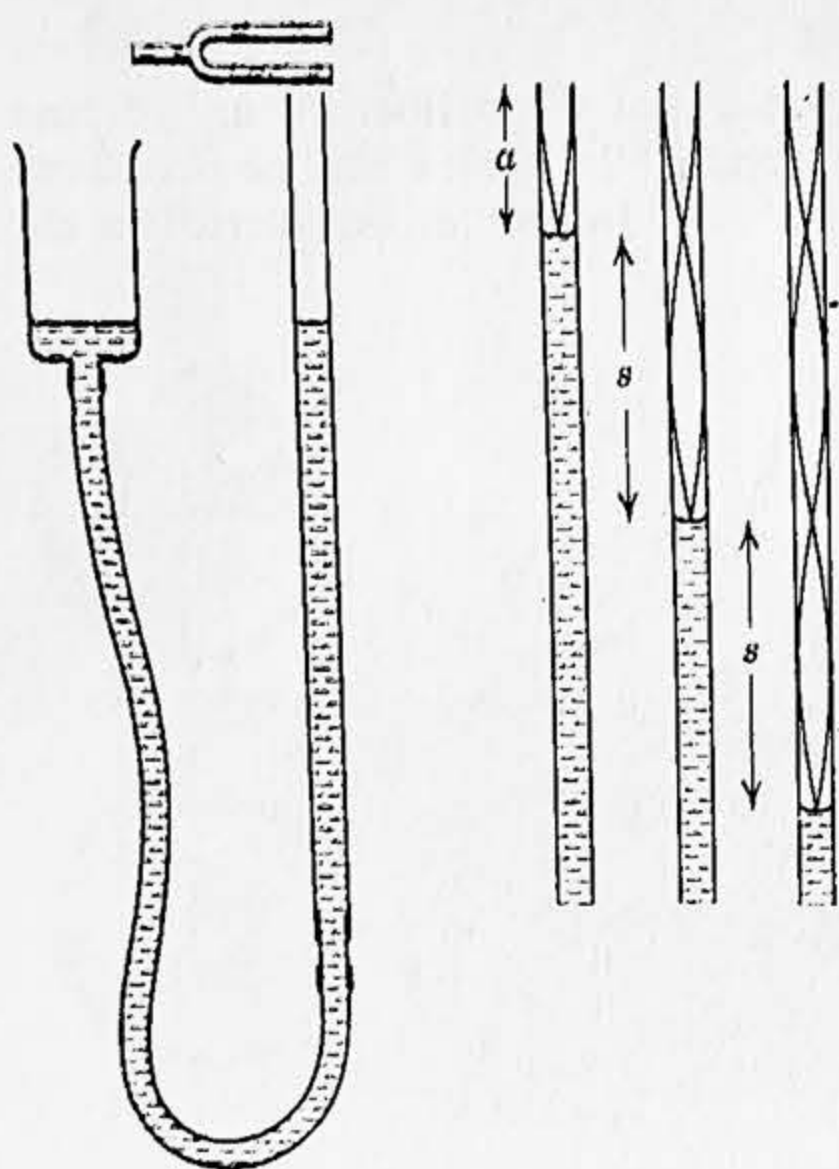


Figura 20-8. Exemplul 2. Măsurarea vitezei sunetului în aer. Nivelul apei din tub poate fi modificat ridicînd sau coborînd rezervorul din stînga care este legat de tub printr-un furtun de cauciuc.

După aceea, intensitatea atinge din nou un maxim la distanțele s , $2s$, $3s$ etc. sub nivelul lui a . Să se afle viteza sunetului în aer.

Intensitatea sunetului atinge un maxim atunci când coloana de aer intră în rezonanță cu diapazonul. Coloana de aer funcționează ca un tub închis la un capăt. Tabloul undelor staționare constă dintr-un nod la suprafața apei și un ventru lângă capătul deschis. Deoarece frecvența sursei este fixă și viteza sunetului în coloana de aer are o valoare bine definită, rezonanța se produce la o anumită lungime de undă:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

Distanța s dintre pozițiile succesive de rezonanță este deci distanța dintre două noduri adiacente (vezi fig. 20-8). Prin urmare

$$s = \frac{\lambda}{2} \quad \text{sau} \quad \lambda = 2s.$$

Combinând ecuațiile, găsim

$$2s = \frac{v}{\nu} \quad \text{sau} \quad v = 2s\nu.$$

Într-o experiență cu un diapazon de frecvență $\nu = 1080$ Hz, s-a găsit că s este 15,3 cm. Prin urmare

$$\lambda = 2s = 30,6 \text{ cm}$$

și

$$v = \nu\lambda = 1080 \cdot 0,306 \text{ m/s} = 330 \text{ m/s}.$$

Ce semnificație are distanța a ? Pot fi folosite convenabil alte gaze decât aerul în acest aparat?

20-6. Bătăi

Atunci când două trenuri de undă de aceeași frecvență se propagă de-a lungul aceleiași linii în sensuri opuse, se formează unde staționare în acord cu principiul suprapunerii. Putem caracteriza aceste unde prin trasarea unei diagrame a amplitudinii oscilațiilor în funcție de distanță, ca în figura 20-4. Aceasta ilustrează un tip de interferență pe care-l putem numi *interferență în spațiu*.

Același principiu al suprapunerii ne conduce la un alt tip de interferență pe care-l putem numi *interferență în timp*. El se produce atunci când două trenuri de unde de frecvențe ușor diferite se propagă în aceeași regiune. În cazul sunetului o astfel de condiție există atunci când, de exemplu, două clape alăturate ale unui pian sînt lovite simultan.

Să considerăm un punct în spațiu prin care trec undele. În figura 20-9, a am reprezentat elongațiile produse într-un astfel de punct de cele două unde, separat, în funcție de timp. Pentru simplitate am presupus că cele două unde au amplitudini egale, deși aceasta nu este necesar. Vibrația rezultantă din acel punct ca o funcție de timp este

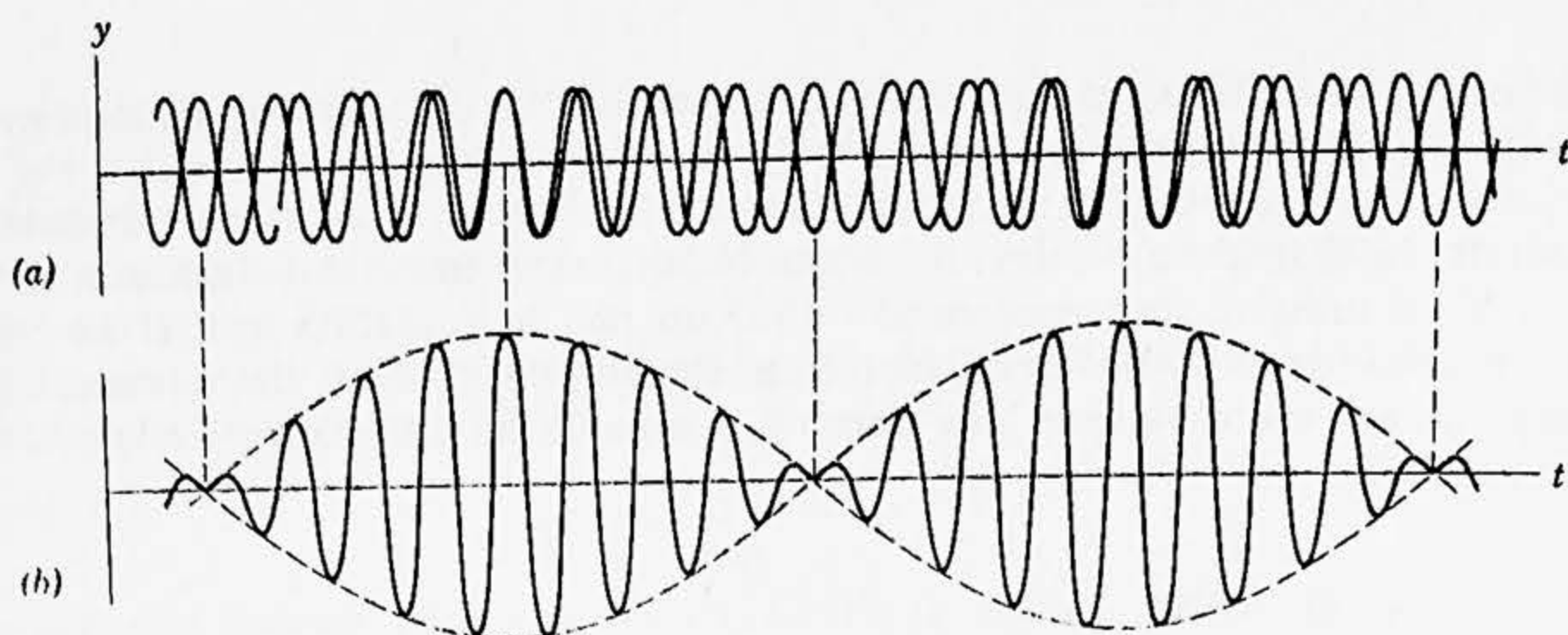


Figura 20-9. Fenomenul de bătăi. Două unde de frecvențe ușor diferite, arătate în (a), se compun în (b) pentru a da o undă a cărei amplitudine (linia punctată) variază periodic în timp. A se compara cu figura 19-14 care arată același fenomen reprezentat în funcție de distanță.

egală cu suma vibrațiilor individuale și este reprezentată în figura 20-9, b. Vedem că *amplitudinea* undei rezultante în punctul dat nu este constantă ci *variază în timp*. În cazul sunetului amplitudinea variabilă dă naștere la variații de tărie a sunetului care se numesc *bătăi*. Două corzi pot fi acordate pe aceeași frecvență întinzînd una din ele, în timp ce ele vibrează, pînă cînd dispar bătăile.

Să reprezentăm elongația din punctul considerat, produsă de o undă, astfel

$$y_1 = y_m \cos 2\pi \nu_1 t$$

și elongația produsă în acel punct de cealaltă undă, de amplitudine egală, astfel

$$y_2 = y_m \cos 2\pi \nu_2 t.$$

În baza principiului suprapunerii, elongația rezultantă este

$$y = y_1 + y_2 = y_m (\cos 2\pi \nu_1 t + \cos 2\pi \nu_2 t)$$

și deoarece

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

aceasta poate fi scrisă astfel:

$$y = \left(2y_m \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \right) \cos 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t. \quad (20-8)$$

Vibrația rezultantă poate fi atunci considerată ca avînd o frecvență

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

care este frecvența medie a celor două unde, și o amplitudine dată de expresia dintre paranteze. Prin urmare, amplitudinea însăși variază în timp cu o frecvență

$$\nu_{amp} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}.$$

Dacă ν_1 și ν_2 sînt aproape egale, acest termen este mic și amplitudinea fluctuează încet. Acest fenomen este o formă a modulației de amplitudine care are un corespondent (benzile laterale) în receptoarele de radio cu modulație de amplitudine.

Maximul amplitudinii, adică o bătaie, se va produce ori de cîte ori

$$\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$$

este egal cu 1 sau -1 . Deoarece fiecare din aceste valori apare o dată în fiecare ciclu (vezi fig. 19-14), numărul bătailor pe secundă este *dublul* frecvenței ν_{amp} sau $\nu_1 - \nu_2$. Prin urmare numărul bătailor pe secundă este egal cu diferența frecvențelor undelor componente. Bătăile dintre două tonuri pot fi detectate de ureche pînă la o frecvență de aproximativ șapte pe secundă. La frecvențe mai înalte bătaile individuale nu pot fi distinse în sunetul produs.

20-7. Efectul Doppler

Cînd o persoană se mișcă spre o sursă sonoră aflată în repaus, sunetul auzit este mai înalt (are frecvență mai mare) decît în cazul în care ea ar fi în repaus. Dacă ascultătorul se depărtează de o sursă aflată în repaus, el aude un sunet mai puțin înalt decît dacă s-ar afla în repaus. Obținem rezultate analoge dacă sursa se apropie sau se depărtează de un ascultător în repaus. Sunetul emis de o locomotivă este mai înalt atunci cînd sursa se apropie de ascultător decît după ce ea a trecut de el și se depărtează.

Christian Johann Doppler (1803—1853), un austriac, într-un articol din 1842, a atras atenția asupra faptului că culoarea unui corp luminos, exact la fel ca și înălțimea sunetului emis de un corp, trebuie să varieze datorită mișcării relative a corpului și observatorului. Acest efect, numit *efect Doppler*, se aplică undelor în general. Să-l aplicăm acum undelor sonore. Vom considera numai cazul particular în care sursa și observatorul se mișcă de-a lungul dreptei care îi unește.

Să considerăm un sistem de referință în repaus în mediul prin care se propagă sunetele. Figura 20-10 arată o sursă sonoră S în repaus în acest reper și un observator O (observați urechea) care se mișcă spre sursă cu o viteză v_0 . Cercurile reprezintă fronturile de undă distanțate între ele cu o lungime de undă, care se propagă prin mediu. Dacă observatorul ar fi în repaus în mediu, el ar recepționa $v t / \lambda$ unde în timpul t unde v este viteza sunetului în mediu și λ este lungimea de undă. Datorită mișcării sale spre sursă, însă, el recepționează un număr de $v_0 t / \lambda$ unde *suplimentare* în același timp t . Frecvența ν' pe care o aude este egală cu numărul undelor recepționate în unitatea de timp adică

$$\nu' = \frac{v t / \lambda + v_0 t / \lambda}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v + v_0}{v / \nu}.$$

Adică

$$\nu' = \nu \frac{v + v_0}{v} = \nu \left(1 + \frac{v_0}{v} \right). \quad (20-9, a)$$

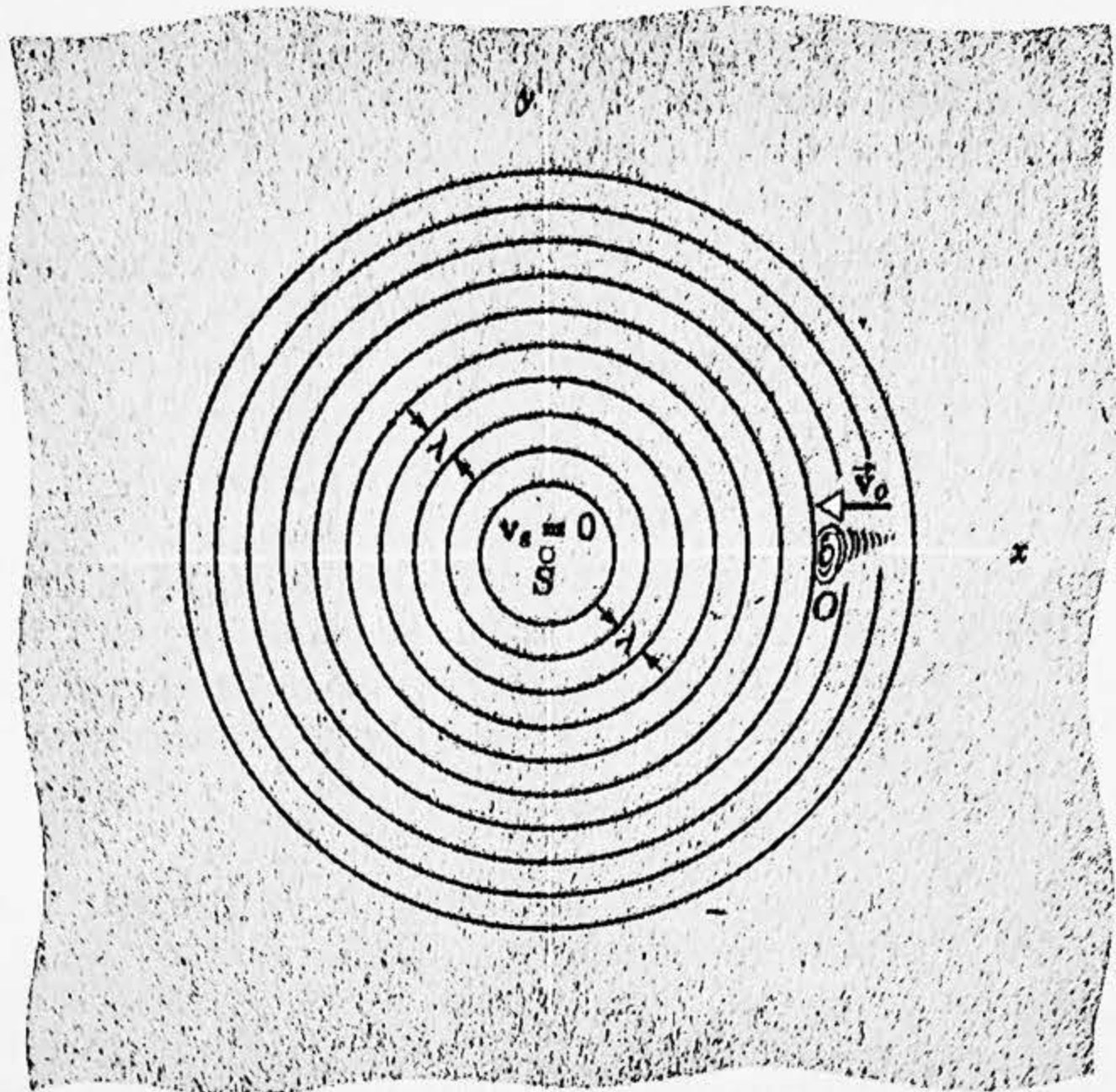


Figura 20-10. Efectul Doppler datorat mișcării observatorului (urechii). Sursa se află în repaus.

Frecvența ν' auzită de observator este egală cu frecvența ordinară ν auzită în repaus plus creșterea ν (v_0/ν) care provine din mișcarea observatorului. Dacă observatorul se depărtează de sursa în repaus, are loc o descreștere a frecvenței ν (v_0/ν) corespunzătoare undelor care nu ajung la observator în fiecare unitate de timp datorită depărtării sale. Atunci

$$\nu' = \nu \frac{\nu - v_0}{\nu} = \nu \left(1 - \frac{v_0}{\nu}\right). \quad (20-9, b)$$

Prin urmare, relația generală valabilă atunci când sursa este în repaus față de mediu, iar observatorul se mișcă față de mediu este

$$\nu' = \nu \frac{\nu \pm v_0}{\nu} \quad (20-9)$$

unde semnul plus se referă la apropierea receptorului de sursă, iar semnul minus se referă la depărtarea receptorului de sursă. Observăm că aici cauza variației este faptul că observatorul interceptează mai multe sau mai puține unde în fiecare secundă datorită mișcării sale prin mediu.

Atunci când sursa se apropie de un observator în repaus efectul este o scurtare a lungimii de undă (vezi fig. 20-11), deoarece sursa urmează după undele ce se apropie de receptor și creștele vin mai aproape între ele. Dacă frecvența sursei este ν și viteza sa v_s , atunci în timpul fiecărei vibrații sursa parcurge o distanță v_s/ν și fiecare lungime de undă este scurtată cu această cantitate, prin urmare, lungimea de undă a sunetului

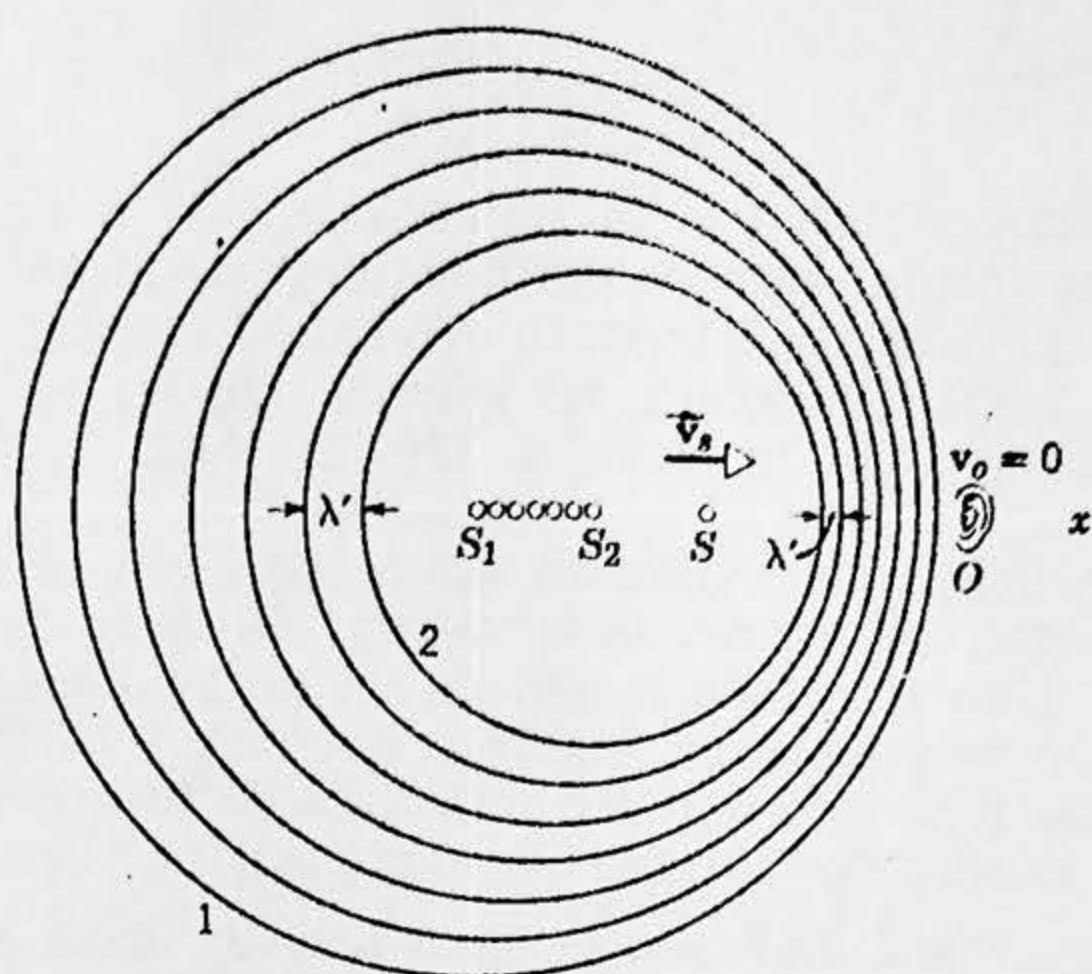


Figura 20-11. Efectul Doppler datorat mișcării sursei. Observatorul este în repaus. Frontul de undă 1 a fost emis de sursă când ea se afla în S_1 , frontul de undă 2 a fost emis când ea se găsea în S_2 etc. În momentul în care a fost luat „instantaneul”, sursa se afla în S .

care ajunge la observator nu mai este $\lambda = v/\nu$ ci $\lambda' = v/\nu - v_s/\nu$. Prin urmare, frecvența sunetului auzit de observator este *mărită*, fiind

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s)/\nu} = \nu \frac{v}{v - v_s}. \quad (20-10, a)$$

Dacă sursa se *îndepărtează* de observator, lungimea de undă emisă este cu v_s/ν mai mare decât λ , astfel încît observatorul aude o frecvență *micșorată*, anume

$$\nu' = \frac{v}{(v + v_s)/\nu} = \nu \frac{v}{v + v_s}. \quad (20-10, b)$$

Prin urmare relația generală valabilă atunci cînd *observatorul este în repaus* față de mediu, iar *sursa se mișcă* față de mediu este

$$\nu' = \nu \frac{v}{v \mp v_s}, \quad (20-10)$$

unde semnul *minus* are loc pentru *apropierea* sursei de observator, iar semnul *plus* are loc pentru *depărtarea* sursei de observator. Observăm că aici variația este determinată de faptul că mișcarea sursei prin mediu micșorează sau mărește lungimea de undă transmisă prin mediu.

Dacă atât sursa cât și observatorul se mișcă prin mediul care transmite sunetul, se poate arăta că observatorul aude o frecvență

$$v' = v \frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}, \quad (20-11)$$

unde semnele superioare (+ la numărător, — la numitor) corespund sursei și observatorului care se *apropie* unul de altul de-a lungul liniei care-i unește, iar semnele inferioare corespund cazului când ei se *depărtează* unul de altul. Observăm că ecuația (20-11) se reduce la ecuația (20-9) dacă $v_s = 0$ și la ecuația (20-10) dacă $v_0 = 0$, după cum și trebuia.

Dacă un diapazon care vibrează așezat pe cutia sa de rezonanță este mișcat rapid spre un perete, observatorul va auzi două note de frecvențe diferite. Una este nota auzită direct de la diapazonul care se depărtează și este mai joasă ca înălțime datorită depărtării diapazonului. Cealaltă notă se datorește undelor reflectate de perete și este mai înaltă. Suprapunerea acestor două trenuri de unde produce bătăi.

Efectul Doppler este important în cazul luminii. Viteza luminii este atât de mare încât numai sursele astronomice sau atomice, care au viteze mari în comparație cu sursele macroscopice terestre, manifestă efecte Doppler pronunțate. Efectul astronomic constă într-o deplasare a lungimii de undă, observată la lumina emisă de elementele aflate pe corpuri astronomice în mișcare în comparație cu lungimea de undă observată de la aceleași elemente aflate pe Pământ. (Vezi capitolul 40.) O consecință ușor de observat a efectului Doppler este lărgirea (sau împrăștierea în frecvență) a radiației emise de gazele fierbinți. Această lărgire provine din faptul că atomii sau moleculele emițătoare se mișcă în toate direcțiile cu diferite viteze față de instrumentele de observație, astfel încât este detectată o împrăștiere a frecvențelor.

Există însă o deosebire în formula efectului Doppler pentru lumină și cea pentru sunet. În cazul sunetului, nu mișcarea relativă a sursei și observatorului este cea care determină variația de frecvență. În adevăr, după cum am văzut, chiar dacă mișcarea relativă este aceeași (v_0 din ecuația 20-9, a este egal cu v_s din ecuația 20-10, a), obținem rezultate cantitativ diferite care depind de faptul dacă sursa sau observatorul este cel care se mișcă. Această diferență apare din cauză că v_0 și v_s sînt măsurate față de mediul în care se propagă unda sonoră și din cauză că acest mediu determină viteza undei. Lumina nu necesită însă un mediu material pentru transmiterea ei și viteza luminii față de sursă sau față de observator are totdeauna aceeași valoare c , indiferent de mișcarea acestor corpuri unul față de altul. Acesta este postulatul fundamental al teoriei restrînse a relativității. Prin urmare, pentru lumină numai mișcarea relativă a sursei și observatorului poate duce la variații fizice, neexistînd nici un mediu material care să poată fi folosit ca un sistem de referință. Deși formula lui Doppler pentru lumină (capitolul 40) diferă de cea pentru sunet, efectele sînt calitativ aceleași. Putem aplica ecuația (20-10) luminii cu o bună aproximație dacă v_s reprezintă viteza relativă a sursei și observatorului și dacă v_s este foarte mic în comparație cu viteza luminii.

Exemplul 3. Să se arate că ecuațiile (20-9) și (20-10) devin practic identice atunci când viteza sursei și viteza observatorului sînt mici în comparație cu viteza sunetului în mediu.

Fie $v_0 = v_s = u$. Adică fie u viteza observatorului sau a sursei. Atunci ecuația (20-9) devine

$$v' = v \left(1 + \frac{u}{v} \right).$$

Trebuie să arătăm acum că ecuația (20-10),

$$v' = v \frac{v}{v \mp u}$$

se reduce la forma precedentă dacă $u/v \ll 1$.

Putem transcrie ecuația (20-10) astfel

$$v' = v \frac{1}{1 \mp u/v}.$$

Dar în baza dezvoltării binomului

$$\frac{1}{1 \mp u/v} = \left(1 \mp \frac{u}{v} \right)^{-1} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v} \right)^2 \pm \dots$$

Dar dacă u/v este suficient de mic în comparație cu unitatea, astfel încît să putem neglija $(u/v)^2$ și puterile superioare, atunci

$$\frac{1}{1 \mp u/v} \cong 1 \pm \frac{u}{v}$$

și ecuația (20-10) devine

$$v' \cong v \left(1 \pm \frac{u}{v} \right)$$

aceeași cu ecuația (20-9).

Ca exemplu numeric să luăm $u = 34$ m/s. Viteza sunetului în aer este de aproximativ 340 m/s. Atunci dacă sursa are o viteză $v_s = u = 34$ m/s spre observatorul în repaus, frecvența auzită de observator este dată de ecuația (20-10):

$$v' = v \frac{v}{v - v_s} = v \frac{340}{340 - 34}$$

sau

$$\frac{v'}{v} = 1,11.$$

Dacă observatorul are o viteză $v_0 = u = 34$ m/s spre sursa în repaus, frecvența auzită de observator este dată de ecuația (20-9):

$$v' = v \frac{v + v_0}{v} = v \frac{340 + 34}{340}$$

sau

$$\frac{v'}{v} = 1,10.$$

Prin urmare, dacă $u/v = 34,0/340 = 1/10$, diferența procentuală în frecvența auzită, dintre cea pentru observatorul mobil și cea pentru sursa mobilă, mișcarea relativă fiind aceeași, este de numai 1%.

Atunci cînd v_0 sau v_s devin comparabile ca modul cu v , formulele date mai sus pentru efectul Doppler trebuie modificate. Modificarea este necesară datorită

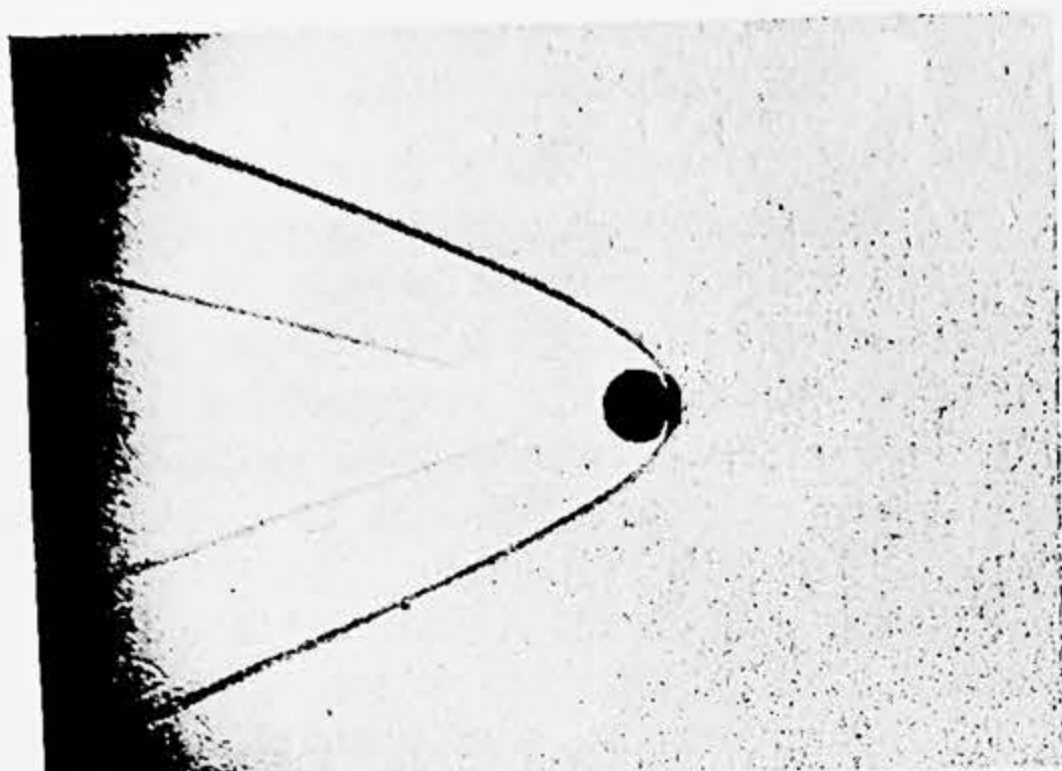
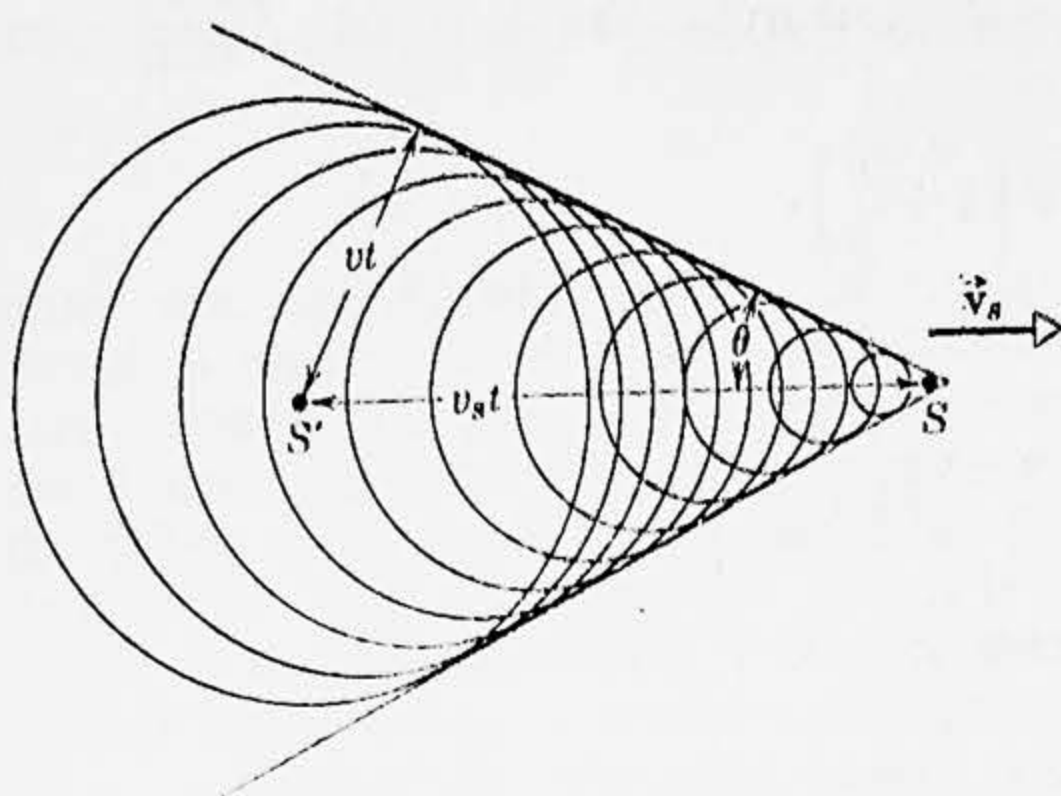


Figura 20-12. În dreapta sus un grup de fronturi de undă asociate cu un proiectil care se mișcă cu viteză supersonică. Fronturile de undă sînt sferice și înfășurătoarea lor este un con. Studentul trebuie să înțeleagă legătura dintre această figură și cea precedentă. În dreapta jos o fotografie instantanee a unui proiectil care se mișcă în acest mod.

Raza fiecărei sfere în acel moment este egală cu produsul dintre viteza undei v și timpul t care a trecut de cînd sursa era în centrul ei. Înfășurătoarea acestor unde este un con a cărui suprafață face un unghi θ cu direcția de mișcare a sursei. Din figură obținem rezultatul

$$\sin \theta = \frac{v}{v_s}.$$

Pentru undele pe apă conul se reduce la o pereche de drepte secante. În aerodinamică raportul v_s/v se cheamă numărul lui Mach.

¹ Vezi „Radiația Cerenkov: originea ei, proprietățile și aplicațiile“, de V. J. Jelly în *Contemporary Physics*, octombrie 1961.

faptului că relația liniară dintre forța elastică și elongație presupusă valabilă pînă acum nu mai este valabilă în mediu. Viteza de propagare a undelor nu mai este viteza normală de fază și forma undei se schimbă în timp. Componentele mișcării perpendiculare pe linia care unește sursa și observatorul contribuie și ele la efectul Doppler la aceste viteze mari. Cînd v_0 sau v_s depășesc pe v , formula lui Doppler nu mai are evident sens.

Există mai multe situații în care sursa se mișcă printr-un mediu cu o viteză mai mare decît viteza de fază a undelor în acel mediu. În astfel de cazuri frontul de undă ia forma unui con avînd în vîrfurile sale corpul care se mișcă. Unele exemple sînt unda de proră de la o barcă rapidă pe apă și „unda de șoc“ de la un avion sau proiectil care se mișcă prin aer cu o viteză mai mare decît viteza sunetului în acel mediu (viteze supersonice). Radiația Cerenkov constă din unde luminoase emise de particule încărcate care se mișcă printr-un mediu cu o viteză mai mare decît viteza de fază a luminii în acel mediu¹.

În figura 20-12 se arată pozițiile actuale ale undelor sferice generate în diferite poziții ale sursei în timpul mișcării sale.

Intrebări

1. Să se enumere câteva surse de infrasonete. De ultrasunete.

2. Ce dovadă experimentală există în sprijinul ipotezei că viteza sunetului este aceeași pentru toate lungimile de undă?

3. Ce mărime, dacă există, pentru undele transversale dintr-o coardă corespunde amplitudinii de presiune pentru undele longitudinale dintr-un tub?

4. Un clopoțel sună un timp scurt într-o școală. După un timp sunetul său nu se mai aude. Să se urmărească undele sonore și energia pe care ele o transferă din momentul emisiunii până când ele nu se mai aud.

5. Cum putem localiza experimental pozițiile nodurilor și ventrelor într-o coardă? Într-o coloană de aer? Pe o suprafață vibrantă?

6. Să se explice cum un instrument cu coarde este „acordat“.

7. Să se discute faptele care determină intervalul de frecvență al vocii umane și calitatea vocii.

8. Goarna nu are valve. Cum putem atunci produce diferite note cu ea? La ce note este limitată goarna? Să se explice.

9. Va oscila o coardă de vioară ciupită un timp mai lung sau mai scurt dacă vioara nu are placă de rezonanță? Să se explice.

10. Două vapoare cu sirene cu abur de aceeași înălțime sună în port. Vă

așteptați să se producă un fenomen de interferență cu regiuni de intensitate mare și mică?

11. Să presupunem că în efectul Doppler pentru sunet sursa și receptorul sînt în repaus într-un anumit sistem de referință dar mediul transmițător se mișcă față de acest reper. Va exista o variație a lungimii de undă sau a frecvenței recepționate?

12. Există efect Doppler pentru sunet atunci cînd observatorul sau sursa se mișcă perpendicular pe linia care le unește? Cum putem atunci determina efectul Doppler dacă mișcarea are o componentă perpendiculară pe această linie?

13. Un satelit emite unde radio cu frecvența constantă. Aceste unde sînt recepționate pe sol și determinate să dea bătăi cu o frecvență standard. Frecvența bătăilor este apoi aplicată unui difuzor „auzindu-se“ astfel semnalele satelitului. Să se descrie cum se modifică sunetul atunci cînd satelitul se apropie, trece deasupra capului nostru și se depărtează de detector.

14. Două diapazoane identice emit note de aceeași frecvență. Să se explice cum ați putea auzi bătăi între ele?

15. Undele transversale dintr-o coardă pot fi polarizate (vezi de exemplu întrebarea 16 din capitolul 19). Pot fi polarizate undele sonore?

Probleme

1. Înălțimea cea mai joasă detectabilă ca sunet de urechea umană medie corespunde la aproximativ 20 Hz, iar cea mai înaltă la aproximativ 20 kHz. Care este lungimea de undă a flectărei frecvențe în aer?

2. O undă sonoră are o frecvență de 440 Hz. Care este lungimea de undă a acestui sunet în aer? În apă?

3. Liliicii emit ultrasunete. Lungimea de undă cea mai scurtă a ultrasunetului emis în aer de un liliac este de aproximativ 3,3 mm. Care este frecvența cea mai înaltă a ultrasunetului pe care îl poate emite un liliac?

4. (a) Un difuzor are un diametru de 15 cm. La ce frecvență lungimea de undă a sunetului emis de el, în

aer, va fi egală cu diametrul său? Va fi de zece ori mai mare decât diametrul? Va fi o zecime din diametru? (b) Să se facă aceleași calcule pentru un difuzor cu un diametru de 30 cm. Dacă lungimea de undă este mare în comparație cu diametrul difuzorului, undele sonore să răspîndesc aproape uniform în toate direcțiile de la difuzor, dar dacă lungimea de undă este mică în comparație cu diametrul difuzorului, energia undei se propagă în special în direcția înalte.

5. O metodă pentru a afla distanța de la dvs. pînă la un fulger constă în a număra secunde din momentul în care vedeți fulgerul pînă în momentul cînd auziți tunetul și apoi de a împărți numărul de secunde la 5. Rezultatul dă distanța în mile (1 milă=1,61 km). Să se explice această metodă și să se determine eroarea relativă (în procente) în condițiile standard.

6. O piatră cade într-o fîntînă. Sunetul generat la lovirea apei se aude după un timp t . Care este adîncimea d a fîntînii? Să se afle d dacă $t=3,0$ s.

7. (a) Viteza sunetului într-un anumit metal este V . Este lovit un capăt al unui tub din acel metal de lungime l . Un ascultător de la celălalt capăt aude două sunete — unul de la unda care s-a propagat prin metalul tubului și altul de la unda care s-a propagat prin aer. Dacă v este viteza sunetului în aer, ce interval de timp t se scurge între cele două sunete? (b) Să presupunem că $t=1,4$ s și că metalul este fierul. Să se afle lungimea l .

8. Presiunea într-o undă sonoră progresivă este dată de ecuația

$$p=1,5 \sin \pi (x-330 t),$$

unde x este în metri, t în secunde și p în N/m^2 . Să se afle amplitudinea presiunii, frecvența, lungimea de undă și viteza undei.

9. Să se arate că intensitatea unei unde sonore: (a) cînd este exprimată

prin amplitudinea presiunii P este dată de

$$I=\frac{P^2}{2\rho_0 v},$$

unde v este viteza undei iar ρ_0 densitatea standard a aerului, și (b) cînd este exprimată prin amplitudinea elongațiilor y_m , este dată de

$$I=2\pi^2\rho_0 v y_m^2 \nu^2,$$

unde ν este frecvența undei.

10. (a) Dacă două unde sonore, una în aer și una în apă au aceeași intensitate, care este raportul amplitudinilor presiunii undei în apă și în aer? (b) Dacă în schimb, amplitudinile presiunii sînt egale, care va fi raportul intensităților undelor?

11. O notă cu frecvența de 300 Hz are o intensitate de $1,0\mu W/m^2$. Care este amplitudinea vibrațiilor aerului produse de acest sunet?

12. Două unde dau naștere la variații de presiune într-un anumit punct din spațiu date de

$$p_1=P \sin 2\pi \nu t,$$

$$p_2=P \sin 2\pi (\nu t-\Phi).$$

Care este amplitudinea undei rezultante în acest punct dacă $\Phi=0$, $\Phi=-1/4$, $\Phi=1/6$ și $\Phi=1/8$?

13. În figura 20-13 se prezintă un interferometru acustic, folosit pentru a demonstra interferența undelor sonore. S este o diafragmă care vibrează sub influența unui electromagnet. D este un detector de sunete, cum ar

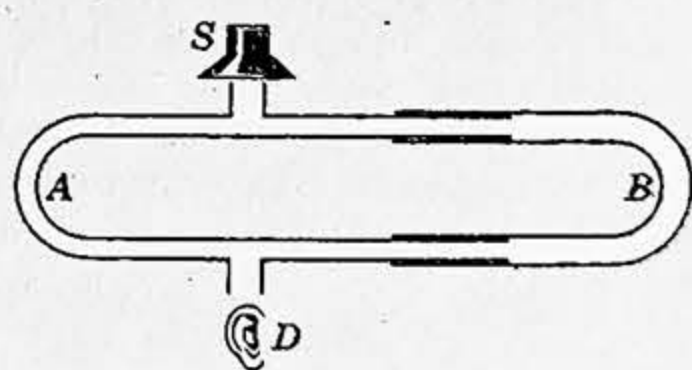


Figura 20-13.

fi urechea sau un microfon. Drumul SBD poate fi variat ca lungime, iar drumul SAD este fix.

Interferometrul conține aer și s-a găsit că intensitatea sunetului are o valoare minimă de 100 unități într-o anumită poziție a lui B și crește continuu până la o valoare maximă de 900 unități într-o a doua poziție, cu 1,65 cm mai departe de prima poziție. Să se afle: (a) frecvența sunetului emis de sursă și (b) amplitudinile relative ale undelor care ajung la detector pentru cele două poziții ale lui B. (c) Cum se poate ca aceste unde să aibă amplitudini diferite, considerându-le generate de aceleași surse?

14. Două difuzoare S_1 și S_2 emit fiecare câte un sunet cu frecvențe de 200 Hz, uniform în toate direcțiile. S_1 are o putere de ieșire acustică de 1,2 mW, iar S_2 o putere de 1,8 mW. S_1 și S_2 vibrează în fază. Să considerăm un punct P care se află la 4,0 m de S_1 și la 3,0 m de S_2 . (a) Cum sînt legate între ele fazele celor două unde care ajung în P? (b) Care este intensitatea sunetului în P atunci cînd ambele difuzoare S_1 și S_2 emit? (c) Care este intensitatea sunetului în P dacă S_1 este deconectat (S_2 conectat)? (d) Care este intensitatea sunetului în P dacă S_2 este deconectat (S_1 conectat)?

15. O sursă sferică de sunete este plasată în P_1 lângă un perete reflector AB și un microfon este așezat într-un punct P_2 , așa cum se arată în

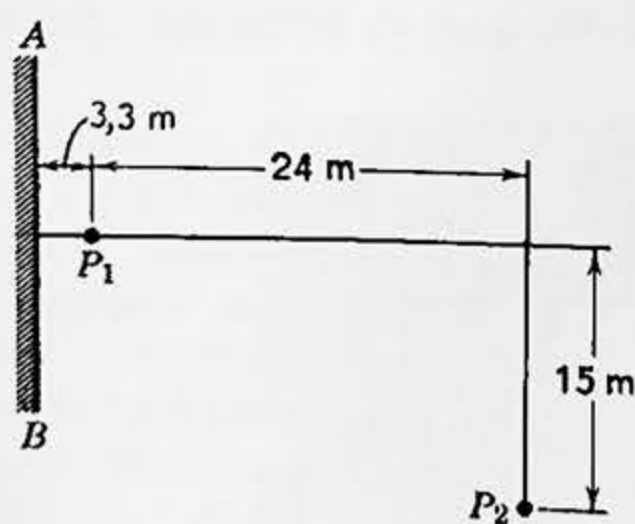


Figura 20-14.

figura 20-14. Frecvența sursei sonore P_1 este variabilă. Să se afle două frecvențe diferite pentru care intensitatea sunetului observată în P_2 , va fi maximă. Viteza sunetului în aer este de 330 m/s.

16. Nivelul apei într-un tub vertical de sticlă de 1,0 m lungime poate fi ajustat la orice poziție în tub. Un diapazon care vibrează cu 660 Hz este ținut exact deasupra capătului deschis al tubului. În ce poziții ale nivelului apei va avea loc rezonanța?

17. În figura 20-15 o tijă R este prinsă în centrul său și un disc D aflat la capătul ei este introdus într-un tub de sticlă în care se găsește pilitură de plută împrăștiată de-a lungul tubului. Un plonjor P este introdus prin celălalt capăt al tubului. Tijă este pusă în vibrație longitudinală, iar plonjorul este deplasat în tub până cînd pilitura de plută formează un tablou de noduri și ventre (pilitura formează niște striatii bine definite în ventre). Dacă cunoaștem frecvența ν a vibrațiilor longitudinale din tijă, o măsurare a distanței medii d dintre două ventre succesive ne permite să determinăm viteza sunetului v în gazul din tub. Să se arate că

$$v = 2 \nu d.$$

Aceasta este metoda lui Kundt pentru determinarea vitezei sunetului în diferite gaze.

18. Un tub de 1,0 m lungime este închis la un capăt. O sîrmă întinsă este plasată lângă capătul deschis. Sîrma este de 0,30 m lungime și are o masă de 10 g. Ea este ținută fixă la ambele capete și vibrează pe modul său fundamental. Ea pune în vibrație coloana de aer din tub pe frecvența



Figura 20-15.

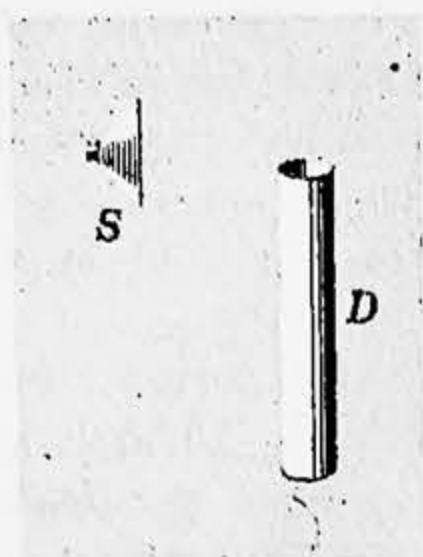


Figura 20-16.

sa fundamentală prin rezonanță. Să se afle: (a) frecvența oscilațiilor coloanei de aer și (b) tensiunea din sîrmă.

19. Un tub poate funcționa ca un filtru acustic făcînd o discriminare împotriva trecerii prin el a sunetului de frecvențe diferite de frecvențele proprii ale tubului. Țeava de eșapament a unui automobil este un exemplu. (a) Să se explice cum funcționează un astfel de filtru. (b) Cum putem determina frecvența superioară sub care sunetul nu este transmis?

20. Un tub deschis de orgă are o frecvență fundamentală de 300 Hz. Primul ton superior al unui tub închis de orgă are aceeași frecvență ca primul ton superior al tubului deschis. Cît de lung este fiecare tub?

21. S din figura 20-16 este un mic difuzor acționat de un oscilator audio și un amplificator, variabil ca frecvență numai de la 1 000 la 2 000 Hz. D este un segment dintr-un tub cilindric de metal de 45,7 cm lungime.

Dacă viteza sunetului în aer este de 345 m/s, la temperatura respectivă, la ce frecvență se va produce rezonanța dacă frecvența emisă de difuzor este variată de la 1 000 la 2 000 Hz? Să se schițeze modurile de vibrație pentru elongații în flecare caz. Sînt neglijate efectele de margine.

22. O anumită coardă de vioară are lungimea de 50 cm între capetele sale fixe și are o masă de 2,0 g. Coarda emite un sunet corespunzător notei la (440 Hz) fiind liberă (fără a fi apăsată cu degetul). Unde trebuie să apăsăm cu degetul pentru a emite nota do (528 Hz)?

23. Corzile unui violoncel au o lungime L . Cu ce lungime l trebuie scurtate prin apăsare cu degetul pentru a schimba înălțimea sunetului cu un raport de frecvențe r ? Să se afle l , dacă $L=0,80$ m și $r=6/5, \dots, r=3/2$.

24. Dacă o coardă de vioară este acordată la o anumită notă, cu cît trebuie mărită tensiunea din coardă pentru ca ea să emită o notă cu frecvență dublă (adică o notă cu o octavă mai sus ca înălțime).

25. O sîrmă de aluminiu de lungime $l_1=60,0$ cm și cu aria secțiunii transversale $1,00$ mm² este legată de o sîrmă de oțel de aceeași secțiune transversală. Sîrma compusă, încărcată cu un bloc m de masă $10,0$ kg este aranjată așa cum se arată în figura 20-17, astfel încît distanța l_2 de la joncțiune pînă la scripetele suport este de 86,6 cm. În sîrmă sînt produse

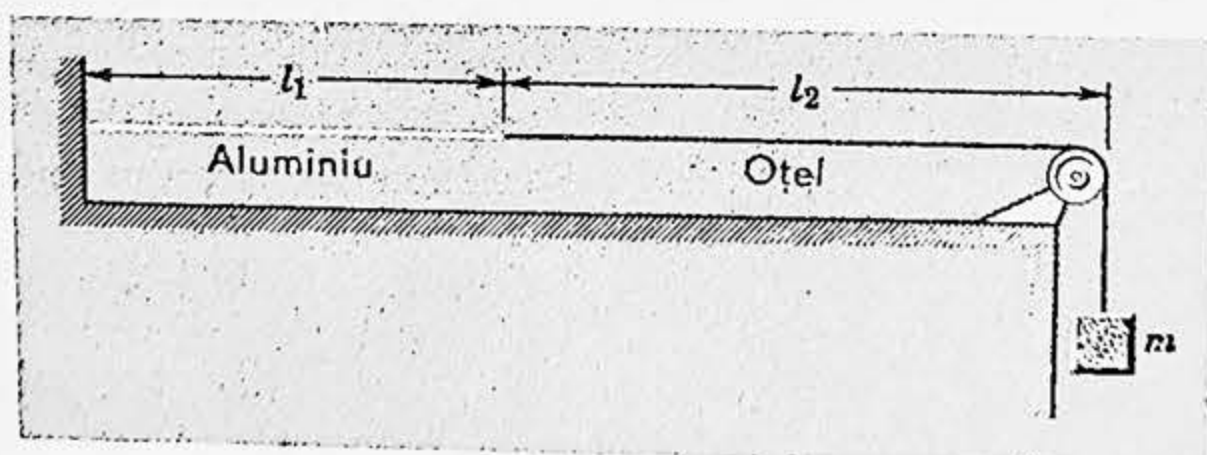


Figura 20-17.

unde transversale folosind o sursă externă de frecvență variabilă. (a) Să se afle frecvența cea mai joasă de excitație pentru care se observă unde staționare, astfel încât joncțiunea din sîrmă să fie un nod. (b) Care este numărul total de noduri observate la această frecvență, excluzînd cele două noduri de la capetele sîrmei? Densitatea aluminului este $2,60 \text{ g/cm}^3$ și cea a oțelului $7,80 \text{ g/cm}^3$.

26. Două strune identice de pian au o frecvență fundamentală de 600 Hz dacă sînt ținute sub aceeași tensiune. Ce creștere relativă a tensiunii dintr-o strună va duce la apariția a 6 bătăi pe secundă atunci cînd ambele strune vibrează simultan?

27. Un diapazon de frecvență necunoscută dă 3 bătăi pe secundă cu un diapazon standard de frecvență 384 Hz . Frecvența bătăilor descrește atunci cînd o mică bucățică de ceară este lipită pe un braț al primului diapazon. Care este frecvența acestui diapazon?

28. Microundele care se propagă cu viteza luminii sînt reflectate de un aeroplan depărtat care se apropie de sursa de unde. S-a găsit că atunci cînd undele reflectate dau bătăi cu undele radiate de sursă, frecvența bătăilor este de 990 Hz . Dacă lungimea de undă a microundelor este de $0,10 \text{ m}$, care este viteza de apropiere a avionului?

29. Ne-am putea deplasa printr-o lumină roșie atît de repede încît ea să apară verde? Am fi amendați pentru depășire de viteză? Se va lua $\lambda = 6200 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ pentru lumina roșie, $\lambda = 5400 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ pentru lumina verde și $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ pentru viteza luminii.

30. Un fluier cu frecvența de 540 Hz se rotește pe un cerc cu raza de $0,60 \text{ m}$ cu o viteză unghiulară de $15,0 \text{ rad/s}$. Care sînt frecvențele cele

mai joase și cele mai înalte auzite de un ascultător situat la o distanță mare și aflat în repaus față de centrul cercului?

31. O sirenă care emite un sunet cu frecvența de 1000 Hz , se depărtează de noi spre o stîncă cu o viteză de 10 m/s . (a) Care este frecvența sunetului auzit direct de la sirenă. (b) Care este frecvența sunetului pe care-l auzim reflectat de stîncă. (c) Ce frecvență a bătăilor vom auzi? Se va lua frecvența sunetului în aer de 330 m/s .

32. Un călăreț B urmărește un alergător A de-a lungul unui drum rectiliniu. Amîndoi se mișcă cu viteza maximă de 144 km/oră sau 40 m/s . Călărețul B , nereușind să-l prindă, sună din nou din sirenă. Se va lua viteza sunetului în aer de 335 m/s și frecvența sursei de 500 Hz . Să se demonstreze clar dacă va exista o deplasare Doppler în frecvența auzită de alergătorul A și, dacă este, care va fi variația de frecvență?

33. O sursă de unde sonore cu frecvența de 1080 Hz se mișcă spre dreapta cu o viteză de 33 m/s față de sol. În dreapta sa există o suprafață reflectoare care se mișcă spre stînga cu o viteză de 66 m/s față de sol. Se va lua viteza sunetului în aer de 330 m/s . Să se afle: (a) lungimea de undă a sunetului emis în aer de sursă, (b) numărul undelor pe secundă care ajung la suprafața reflectoare, (c) viteza undelor reflectate, (d) lungimea de undă a undelor reflectate.

34. Un glonte este tras cu o viteză de 660 m/s . Să se afle unghiul făcut de unda de șoc cu linia de mișcare a glontelui.

35. Un avion cu reacție trece deasupra la o înălțime de 5000 m cu o viteză de $1,5 \text{ Mach}$ (adică, $1,5$ ori viteza sunetului). (a) Să se afle unghiul făcut de unda de șoc cu linia

de mișcare a avionului. (b) După cât timp de la trecerea avionului exact deasupra noastră va atinge unda de șoc pământul?

36. Viteza luminii în apă este de aproximativ trei pătrimi din viteza luminii în vid. Un fascicul de electroni rapizi de la un betatron emite radiație

Cerenkov în apă, frontul de undă fiind un con cu unghiul de 60° . Să se afle viteza electronilor în apă.

37. Să se calculeze viteza proiectilului ilustrat în fotografia din figura 20-12. Se presupune că viteza sunetului în mediul prin care se mișcă proiectilul este de 380 m/s.



I
R
t
n
t
n
v
si
cr
cu
cir
mu
nic
cep

Temperatura

21-1. Descrierea macroscopică și descrierea microscopică

În analiza situațiilor fizice ne concentrăm de obicei atenția asupra unei porțiuni de materie pe care o separăm, în mintea noastră, de mediul exterior ei. Numim o astfel de porțiune *sistem*. Tot ce este în exteriorul sistemului și care are o legătură directă cu comportarea sa, se numește *mediu*. Căutăm apoi să determinăm comportarea sistemului aflând cum interacționează el cu mediul său. De exemplu, o minge poate fi sistem și mediul poate fi aerul și pământul. În căderea liberă căutăm să aflăm cum afectează aerul și pământul mișcarea mingii. Tot astfel, gazul dintr-un vas poate fi sistem iar un piston mobil sau un bec Bunsen pot fi mediul. Căutăm să aflăm cum este afectată comportarea gazului de către acțiunea pistonului și a becului. În toate aceste cazuri trebuie să alegem mărimi observabile adecvate pentru descrierea comportării sistemului. Numim *macroscopice* aceste mărimi care reprezintă proprietăți de ansamblu ale sistemului măsurate prin operații de laborator. Pentru procesele în care intervine căldura legile care leagă mărimile macroscopice adecvate (care includ presiunea, volumul, temperatura, energia internă și entropia, printre altele) formează baza științei numită *termodinamica*. Multe din mărimile macroscopice (presiunea, volumul și temperatura, de exemplu) sînt legate direct de percepțiile simțurilor noastre. Putem de asemenea adopta un punct de vedere *microscopic*. În acest caz considerăm mărimi care descriu atomii și moleculele care constituie sistemul, vitezele lor, energiile, masele, momentele cinetice, comportarea în timpul ciocnirilor etc. Aceste mărimi sau formulările matematice bazate pe ele formează baza științei numită *mecanica statistică*. Proprietățile microscopice nu sînt legate direct de percepțiile simțurilor noastre.

Pentru orice sistem mărimile macroscopice și cele microscopice trebuie să fie legate între ele deoarece ele nu sînt decît diferite moduri de descriere a aceleiași situații. În particular, vom fi în stare să exprimăm pe primele cu ajutorul ultimelor. Presiunea unui gaz, văzută macroscopic, este măsurată în mod operațional folosind un manometru (fig. 17-10). Văzută microscopic, ea este legată de media vitezelor moleculelor de gaz care ciocnesc unitatea de suprafață și care transferă impuls fluidului manometric atunci cînd lovesc suprafața sa. În paragraful 23-4 vom prezenta cantitativ presiunea a cărei definiție microscopică a fost dată aici. Analog (vezi paragraful 23-5) temperatura unui gaz poate fi legată de energia cinetică medie de translație a moleculelor.

Dacă mărimile macroscopice pot fi exprimate cu ajutorul mărimilor microscopice, vom fi în stare să exprimăm legile termodinamicii sub formă cantitativă în limbajul mecanicii statistice. Putem face în adevăr aceasta. Cu cuvintele lui R. C. Tolman:

Explicarea științei complete a termodinamicii cu ajutorul științei mai abstracte a mecanicii statistice, este una din cele mai mari realizări ale fizicii. În plus, caracterul mai fundamental al considerațiilor mecanicii statistice face posibilă completarea într-o măsură importantă a principiilor obișnuite ale termodinamicii.

Începem examinarea fenomenelor termice în acest capitol cu un studiu al temperaturii. Pe măsură ce vom progresa vom încerca să căpătăm o înțelegere mai profundă a acestor fenomene prin împletirea descrierii microscopice și macroscopice. Împletirea punctului de vedere microscopic cu cel macroscopic este o caracteristică a fizicii moderne.

21-2. Echilibrul termic. Principiul zero al termodinamicii

Simțul tactil este calea cea mai simplă prin care distingem corpurile fierbinți de corpurile reci. Prin pipăire putem aranja corpurile în ordinea gradului lor de încălzire, constatînd că A este mai cald decît B , B mai cald decît C etc. Spunem că acesta constituie simțul nostru al temperaturii. Acesta este un procedeu foarte subiectiv de determinare a temperaturii unui corp și sigur nu este prea util pentru scopurile științei. Un simplu experiment, sugerat în 1790 de John Locke, arată nesiguranța acestei metode. Fie o persoană care-și cufundă mîinile, una în apă caldă și cealaltă mînă în apă rece. Apoi îl punem să-și cufunde ambele mîini în apă călduță. Aceasta îi va părea mai rece pentru prima mînă și mai caldă pentru cea de a doua mînă. Judecata noastră asupra temperaturii poate fi deci eronată. Mai departe, intervalul de temperatură relativ la simțul nostru este limitat. Avem nevoie de o măsură obiectivă, numerică, a temperaturii.

Pentru a începe vom încerca să înțelegem sensul noțiunii de temperatură. Fie un obiect A pe care-l simțim rece față de mînă și un obiect identic B pe care-l simțim cald, puse în contact unul cu altul. După un timp suficient de lung, A și B generează aceeași senzație de temperatură. Atunci se spune că A și B sînt în echilibru termic unul cu altul. Putem generaliza expresia „două corpuri sînt în echilibru termic” pentru a înțelege că cele două corpuri sînt în astfel de stări încît dacă ele ar fi puse în

contact, sistemul rezultat ar fi în echilibru termic. Verificarea logică și operațională a echilibrului termic se realizează folosind un al treilea corp numit și corp de probă, cum este un termometru. Această situație este rezumată într-un postulat numit adesea *principiul zero al termodinamicii*: *Dacă A și B sînt în echilibru termic cu un al treilea corp C („termometrul”), atunci A și B sînt în echilibru termic unul cu altul.*

Această discuție exprimă ideea că temperatura unui sistem este o proprietate care pînă la urmă atinge aceeași valoare ca cea a altor sisteme atunci cînd toate aceste sisteme sînt puse în contact. Acest concept concordă cu ideea de toate zilele referitoare la temperatură ca măsură a gradului de încălzire sau răcire a unui sistem, deoarece atîta timp cît putem avea încredere în simțul nostru al temperaturii, gradul de încălzire al tuturor obiectelor devine același după ce ele au fost puse în contact suficient de mult timp. Ideea conținută în principiul zero, deși simplă, nu este evidentă. De exemplu, Ion și Vasile, fiecare îl cunosc pe Dan, dar ei pot sau nu să se cunoască unul pe altul. Două bucăți de fier atrag un magnet dar ele pot sau nu să se atragă una pe alta.

O formulare mai formală, dar poate mai fundamentală a principiului zero este următoarea: *Există o mărime scalară numită temperatură, care reprezintă o proprietate a tuturor sistemelor termodinamice (în stări de echilibru), astfel încît egalitatea temperaturilor este o condiție necesară și suficientă pentru echilibrul termic.* Această afirmație¹ justifică folosirea temperaturii ca o variabilă termodinamică; formularea dată mai sus este un corolar al acestei noi formulări. Vorbind mai liber, esența principiului zero este: *există o mărime utilă numită „temperatură“.*

21-3. Măsurarea temperaturii

Există mai multe proprietăți fizice măsurabile care variază atunci cînd percepția noastră fiziologică privind temperatura variază. Printre acestea sînt volumul unui lichid, lungimea unei bare, rezistența electrică a unei sîrme, presiunea unui gaz menținut la volum constant, volumul unui gaz menținut la presiune constantă și culoarea filamentului unui bec. Oricare dintre aceste proprietăți poate fi folosită pentru construirea unui termometru adică pentru stabilirea unei scări particulare (empirice) de temperatură. O astfel de scară a temperaturilor poate fi stabilită prin alegerea unei substanțe termometrice particulare și a unei proprietăți termometrice particulare a acestei substanțe. Definim apoi scara temperaturilor presupunînd o relație monotonă continuă între proprietatea termometrică aleasă a substanței noastre și temperatura măsurată pe scara noastră (particulară). De exemplu, substanța termometrică poate fi un lichid într-un tub capilar de sticlă și proprietatea termometrică poate fi lungimea coloanei de lichid; sau substanța termometrică poate fi un gaz închis într-un vas și ținut la volum constant și proprietatea termometrică poate fi presiunea gazului, și așa mai departe. Trebuie să ne dăm seama că fiecare alegere a substanței și a proprietății termo-

¹ Vezi J. S. Thomsen, *American Journal of Physics*, 30, 294, 1962.

metrice — împreună cu relația admisă sau presupusă între proprietate și temperatură — duce la o scară particulară (empirică) a temperaturilor, ale cărei indicații nu trebuie să concorde neapărat cu indicațiile date de oricare altă scară a temperaturilor definită independent.

Acest haos aparent în definirea temperaturii este înlăturat printr-o înțelegere universală în cadrul comunității științifice asupra folosirii unei anumite substanțe termometrice, a unei anumite proprietăți termometrice și a unei anumite relații funcționale între valorile măsurate ale acelei proprietăți și o scară a temperaturilor universal acceptată. O scară particulară a temperaturilor, definită în orice alt mod, poate fi atunci totdeauna etalonată după scara universală. Vom descrie o astfel de scară în paragraful 21-5 și una echivalentă în paragraful 25-6.

Să presupunem că am ales o substanță termometrică. Să reprezentăm prin X proprietatea termometrică pe care vrem s-o folosim în stabilirea unei scări a temperaturilor. Alegem arbitrar următoarea funcție liniară dintre proprietatea X și temperatura T pe care o are termometrul adecvat și orice sistem în echilibru termic cu el:

$$T(X) = aX. \quad (21-1)$$

În această expresie a este o constantă pe care trebuie s-o evaluăm. Prin alegerea acestei forme liniare pentru $T(X)$ am fixat faptul că *diferențe de temperatură egale* sau *intervale de temperatură egale, corespund la variații egale ale lui X* . Aceasta înseamnă, de exemplu, că ori de câte ori coloana de mercur în termometrul de sticlă cu mercur variază ca lungime cu o unitate, temperatura variază cu o cantitate fixă bine definită, indiferent de temperatura de pornire. Rezultă de asemenea că două temperaturi măsurate cu același termometru, se află în același raport ca și valorile X corespunzătoare adică

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2}.$$

Pentru a determina constanta a și deci pentru a etalona termometrul, precizăm un *punct fix standard* la care toate termometrele trebuie să indice aceeași temperatură T . Acest punct fix este ales egal cu cel la care gheața, apa lichidă și vaporii de apă coexistă în echilibru și care se numește *punctul triplu al apei*. Această stare poate fi obținută numai la o anumită presiune și este univoc determinată (fig. 21-1). Presiunea vaporilor de apă în punctul triplu este de 4,58 torr. Temperatura în acest punct fix standard este aleasă arbitrar¹ egală cu 273,16 grade Kelvin și este prescurtată sub forma 273,16 K. Gradul Kelvin (kelvinul) este un interval de temperatură egal cu o unitate.

Dacă indicăm valorile din punctul triplu prin indicele tr , atunci pentru orice termometru

$$\frac{T(X)}{T(X_{tr})} = \frac{X}{X_{tr}},$$

¹ Adoptat în 1954 la cea de-a 10-a Conferință Generală asupra Măsurilor și Creutăților de la Paris.

unde pentru toate termometrele

$$T(X_{tr}) = 273,16 \text{ K}$$

astfel încît

$$T(X) = 273,16 \text{ K} \frac{X}{X_{tr}} \quad (21-2)$$

Prin urmare, atunci cînd proprietatea termometrică are valoarea X temperatura T pe scara particulară aleasă este dată în grade Kelvin de $T(X)$, atunci cînd valorile lui X și X_{tr} sînt substituite în membrul stîng al acestei ecuații.

Putem aplica acum ecuația (21-2) la mai multe termometre. Pentru un termometru de sticlă cu lichid, X este L — lungimea coloanei de lichid, și ecuația (21-2) dă

$$T(L) = 273,16 \text{ K} \frac{L}{L_{tr}}$$

Pentru un gaz la presiune constantă, X este V — volumul gazului, și

$$T(V) = 273,16 \text{ K} \frac{V}{V_{tr}} \quad (P \text{ constant}).$$

Pentru un gaz la volum constant, X este P — presiunea gazului, și

$$T(P) = 273,16 \text{ K} \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ constant}).$$

Pentru un termometru cu rezistență de platină, X este R — rezistența electrică, și

$$T(R) = 273,16 \text{ K} \frac{R}{R_{tr}}$$

și analog pentru alte substanțe termometrice și alte proprietăți termometrice.

Exemplul 1. Un anumit termometru cu rezistență de platină are o rezistență R de 90,35 ohmi atunci cînd balonul său este introdus într-o celulă pentru punctul triplu, ca cea din figura 21-1. Ce temperatură va fi definită de ecuația (21-2) dacă balonul este introdus într-un mediu astfel încît rezistența sa devine 96,28 ohmi?

Din ecuația (21-2)

$$T(X) = 273,16 \text{ K} \frac{X}{X_{tr}} = 273,16 \text{ K} \frac{96,28}{90,35} = 280,6 \text{ K}.$$

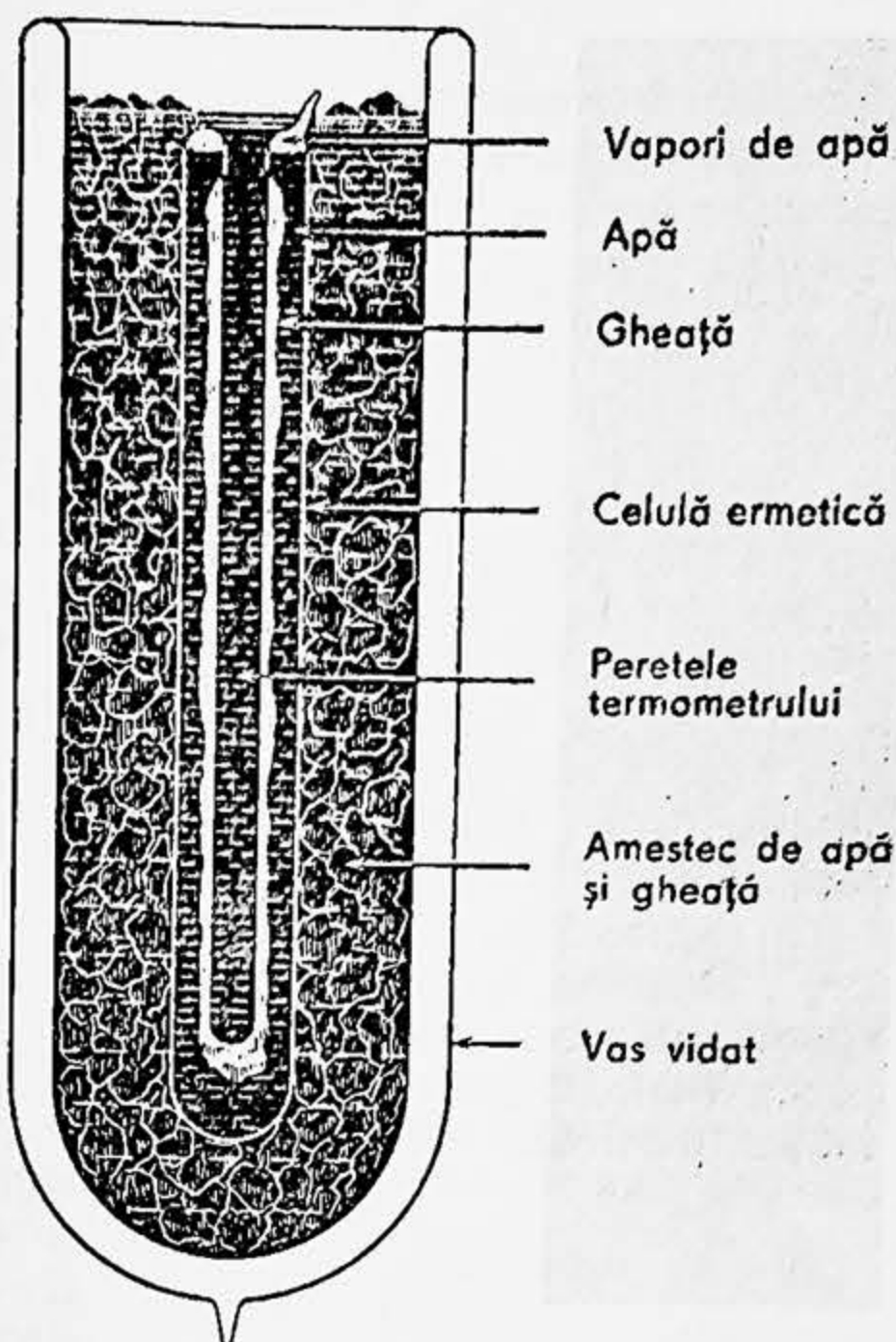


Figura 21-1. Celula pentru punctul triplu al apei de la Biroul Național de Standarde (S.U.A.). Ea conține apă pură și este închisă ermetic după ce a fost evacuat tot aerul. Apoi este cufundată într-o baie de apă și gheață. Sistemul se află în punctul triplu atunci cînd gheața, apa și vaporii sînt toți prezenți și sînt în echilibru în interiorul celulei. Termometrul care trebuie etalonat este cufundat în peretele central.

Observăm că această temperatură este dată de o scară particulară definită prin aplicarea ecuației (21-2) unui dispozitiv particular, termometrul cu rezistență de platină.

Problema care se pune acum este dacă valoarea pe care o obținem pentru temperatura unui sistem depinde de alegerea termometrului pe care-l folosim pentru măsurarea temperaturii. Noi am asigurat prin definiție faptul că toate termometrele de diferite tipuri vor fi în concordanță între ele la punctul fix standard, dar ce se va întâmpla la alte puncte? Ne putem imagina o serie de încercări în care temperatura unui sistem dat este măsurată simultan cu mai multe termometre diferite. Rezultatul acestor încercări arată că toate termometrele dau indicații diferite. Chiar dacă sînt folosite termometre diferite de același tip, cum sînt termometrele cu gaz la volum constant care folosesc gaze diferite, obținem citiri diferite de temperatură pentru un sistem dat într-o stare dată.

În consecință, pentru a obține o scară bine definită a temperaturilor, trebuie să alegem un tip particular de termometru ca termometru etalon sau standard. Alegerea va fi făcută nu pe baza convenienței experimentale, ci prin cerința ca scara temperaturilor definită de un termometru particular să se dovedească a fi o mărime utilă în formularea

legilor fizicii. Variații minime în citiri se constată printre diferitele termometre cu gaz la volum constant, ceea ce ne sugerează să alegem un gaz ca substanță termometrică standard. Se constată că pe măsură ce cantitatea de gaz folosită într-un astfel de termometru și deci presiunea sa, este redusă, variațiile indicațiilor date de diferite termometre cu gaz care folosesc diferite feluri de gaz se reduc de asemenea. Prin urmare, trebuie să fie ceva fundamental în comportarea unui termometru la volum constant conținînd un gaz la presiuni joase.

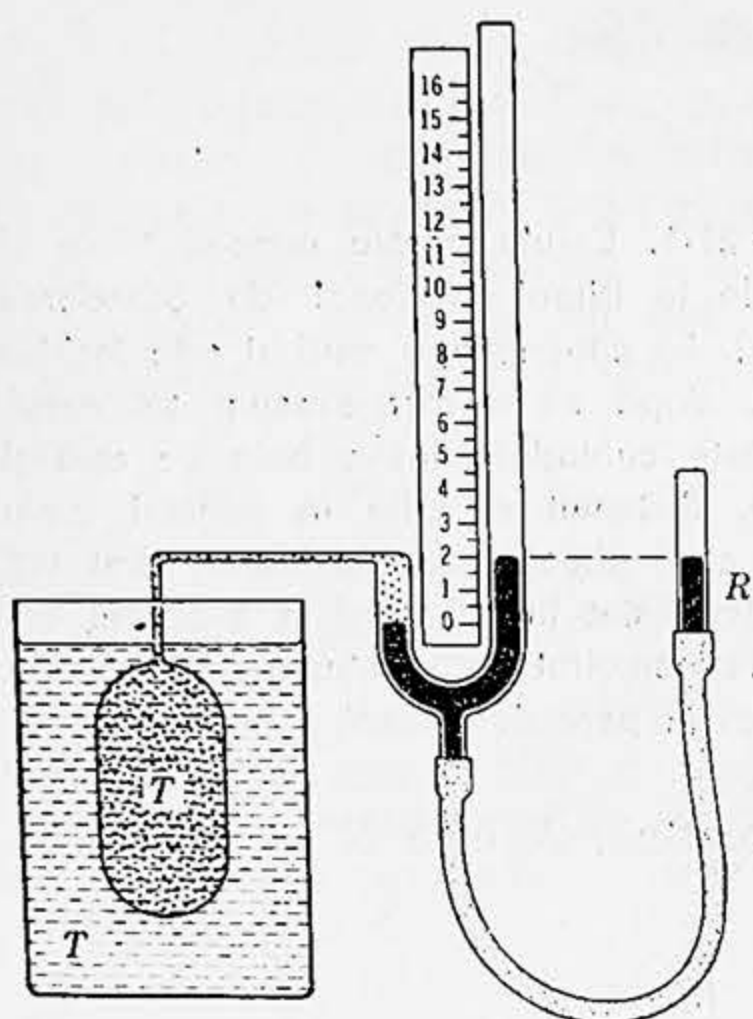


Figura 21-2. O reprezentare a unui termometru cu gaz la volum constant. Atîta timp cît mercurul din stînga tubului manometric rămîne la același nivel pe scară (zero), volumul gazului închis va fi constant. Meniscul poate fi totdeauna adus la poziția zero, prin ridicarea sau coborîrea rezervorului *R*.

21-4. Termometrul cu gaz la volum constant

Dacă volumul unui gaz este menținut constant, presiunea sa depinde de temperatură și crește în mod continuu cu creșterea temperaturii. Termometrul cu gaz la volum constant folosește presiunea la volum constant ca proprietate termometrică.

Termometrul este arătat schematic în figura 21-2. El constă dintr-un balon de sticlă, porțelan, cuarț, platină sau

platină-iridu (depinde de intervalul de temperatură în care el trebuie folosit), legat printr-un tub capilar de un manometru cu mercur. Balonul conținând gazul este introdus într-o baie sau într-un mediu a cărui temperatură trebuie măsurată; ridicând sau coborând rezervorul cu mercur, mercurul din ramura stângă a tubului în formă de U poate fi făcut să coincidă cu un marcaj de referință fix, păstrând astfel gazul închis la un volum constant. Apoi citim înălțimea mercurului în ramura din dreapta. Presiunea gazului închis este diferența înălțimilor coloanelor de mercur (înmulțită cu ρg) plus presiunea atmosferică, indicată de un barometru. În practică aparatul este foarte laborios și trebuie să facem multe corecții, de exemplu: (1) pentru a ține seama de variația mică de volum datorită unei contracții sau dilatări ușoare a balonului și (2) pentru a ține seama de faptul că nu tot gazul închis (cum este cel din capilar) a fost cufundat în baie. Presupunând că toate corecțiile au fost făcute și că P este valoarea corectată a presiunii la temperatura băii, temperatura va fi dată provizoriu (vezi mai jos) de

$$T(P) = 273,16 \text{ K} \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ constant}). \quad (21-3)$$

Termometrul la volum constant, folosit așa cum este descris mai jos, este termometrul care servește pentru a stabili scara temperaturilor, folosită astăzi în mod universal în corectarea științifică.

21-5. Scara de temperatură a gazului ideal

Fie o anumită cantitate de gaz introdusă în balonul unui termometru cu gaz la volum constant, astfel încât dacă balonul este înconjurat de apă la punctul triplu, presiunea P_{tr} este egală cu o valoare bine definită, de exemplu 80 cm Hg. Să înconjurăm acum balonul cu vaporii de apă care se condensează la presiunea de 1 atm și, cu volumul menținut constant la valoarea sa precedentă, să măsurăm presiunea gazului P_0 — presiunea la temperatura vaporilor, în acest caz $P_{0,80}$. Să calculăm apoi provizoriu temperatura din $T(P_{0,80}) = 273,16 \text{ K}$ ($P_{0,80}/80 \text{ torr}$). Să îndepărtăm acum o cantitate de gaz astfel încât P_{tr} să aibă o valoare mai mică, să zicem 40 cm Hg. Măsurăm apoi noua valoare a lui P_0 și calculăm o altă temperatură provizorie din $T(P_{0,40}) = 273,16 \text{ K}$ ($P_{0,40}/40 \text{ cm Hg}$). Continuăm acest procedeu reducând cantitatea de gaz din balon mereu și calculând la această nouă valoare mai mică a lui P_{tr} temperatura vaporilor $T(P_0)$. Dacă reprezentăm valorile lui $T(P_0)$ în funcție de P_{tr} și avem suficiente date, putem extrapola curba rezultantă pînă la intersecția sa cu axa unde $P_{tr} = 0$.

În figura 21-3 am reprezentat curbele obținute prin acest procedeu pentru termometre la volum constant cu diferite gaze. Aceste curbe arată că indicațiile de temperatură ale unui termometru cu gaz la volum constant, depind de gazul folosit în cazul valorilor obișnuite ale presiunii de referință. Dacă însă presiunea de referință descrește, indicațiile de temperatură ale termometrelor cu gaz la volum constant, care folosesc diferite gaze, tind către aceeași valoare. Prin urmare, valoarea extrapolată a temperaturii depinde numai de proprietățile generale ale

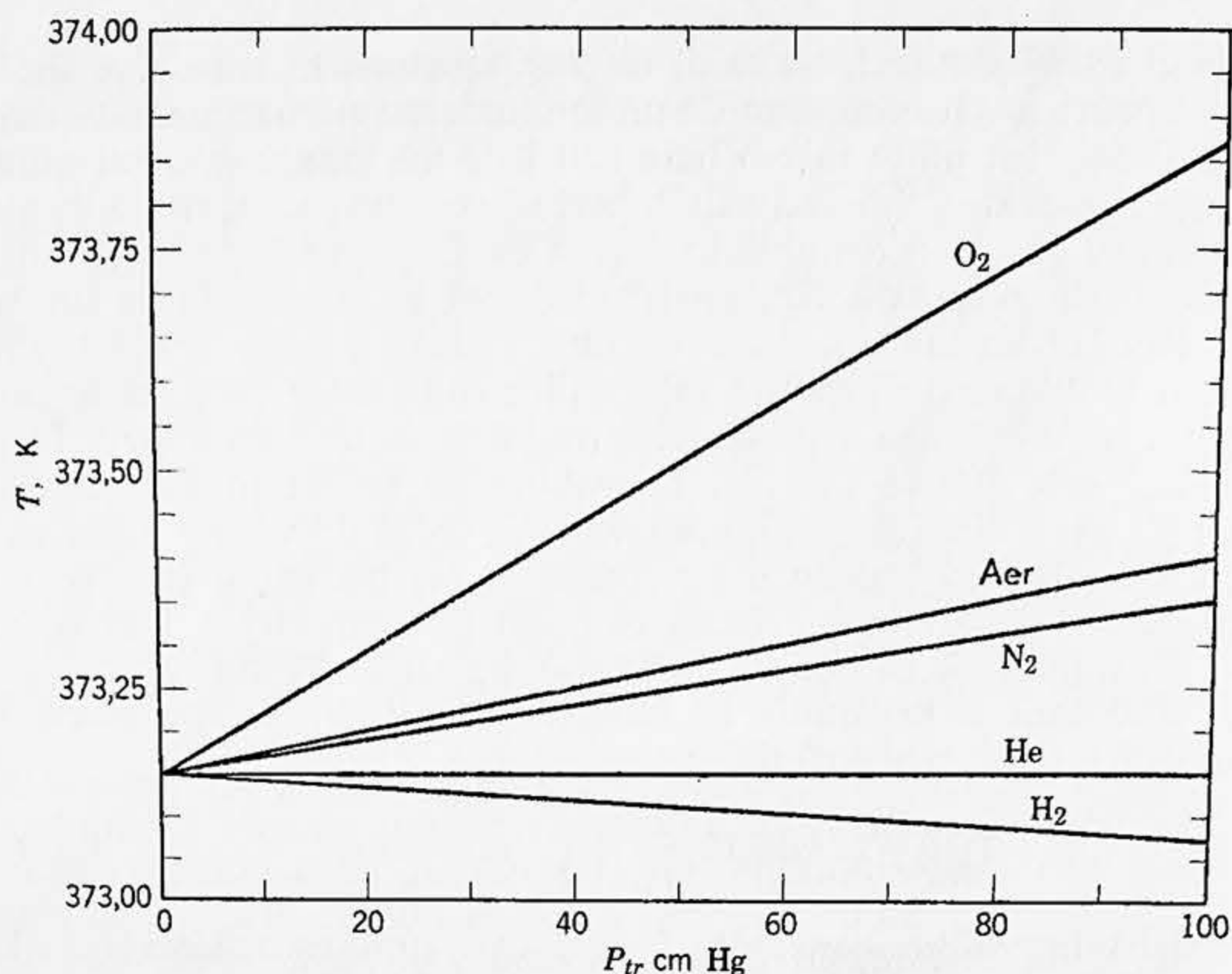


Figura 21-3. Indicațiile unui termometru cu gaz la volum constant pentru temperatura T de condensare a vaporilor în funcție de P_{tr} atunci când sînt folosite diferite gaze. Atunci când cantitatea de gaz din termometru este redusă, presiunea sa P_{tr} în punctul triplu descrește. Observăm că pentru un P_{tr} particular, valorile lui T date de diferite termometre cu gaz diferă. Discrepanța este mică dar măsurabilă, fiind de aproximativ 0,2% în cazurile extreme arătate (O_2 și H_2 la 1 000 torr). Heliul dă aproape aceeași temperatură T pentru toate presiunile (curba este aproape orizontală) astfel încît comportarea lui este cea mai apropiată de comportarea unui gaz ideal pe întregul domeniu arătat.

gazelor și nu de un gaz particular. Definim de aceea o scară de temperatură a gazului ideal prin relația

$$T = 273,16 \text{ K} \lim_{P_{tr} \rightarrow 0} \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ constant}). \quad (21-4)$$

Termometrul nostru standard este deci ales ca fiind un termometru cu gaz la volum constant folosind o scară a temperaturilor definită prin ecuația (21-4).

Deși scara aleasă de noi pentru temperatură este independentă de proprietățile oricărui gaz particular, ea depinde de proprietățile gazelor în general (adică de proprietățile unui gaz ideal). De aceea, pentru a măsura o temperatură trebuie folosit un gaz la acea temperatură. Temperatura cea mai coborîtă care poate fi măsurată cu oricare termometru cu gaz este de aproximativ 1 K. Pentru a obține această temperatură trebuie să folosim heliul la presiuni joase, deoarece heliul devine lichid la o temperatură mai coborîtă decît oricare alt gaz. Prin urmare, nu putem da sens experimental temperaturilor sub 1 K cu ajutorul unui termometru cu gaz.

Am dori să definim o scară a temperaturilor în așa fel încît să fie independentă de proprietățile oricărei substanțe particulare. Vom arăta în paragraful 25-6 că scara termodinamică absolută a temperaturilor, numită scara Kelvin, este o astfel de scară. Vom arăta de asemenea că scara gazului ideal și scara Kelvin sînt identice în intervalul de temperatură în care poate fi folosit termometrul cu gaz. Din acest motiv, putem scrie K în dreptul temperaturii dată de un gaz ideal așa cum am făcut deja.

Vom arăta de asemenea în paragraful 25-6 că scara Kelvin are un zero absolut la 0 K și că nu există temperaturi sub acest zero. Zero absolut al temperaturii a rezistat tuturor încercărilor de a-l obține experimental, deși este posibil să ne apropiem oricît de aproape de el¹. Existența lui zero absolut este dedusă prin extrapolare. Studentul nu trebuie să gîndească despre zero absolut ca despre o stare cu energie zero și fără mișcare. Concepția că orice acțiune moleculară ar înceta la zero absolut este incorectă. Această noțiune presupune că conceptul pur macroscopic de temperatură este strict legat de conceptul microscopic al mișcării moleculare. Cînd încercăm să facem o asemenea legătură, aflăm în realitate că pe măsură ce ne apropiem de zero absolut, energia cinetică a moleculelor tinde către o valoare finită așa numită energie de zero. Energia moleculară este minimă, dar nu este nulă la zero absolut.

În tabela 21-1 enumerăm temperaturile, în scara Kelvin, ale diferitelor corpuri și procese.

Tabela 21-1

UNELE TEMPERATURI ÎN K*

Reacția termonucleară cu carbon	$5 \cdot 10^8$
Reacția termonucleară cu heliu	10^8
Soare în interior	10^7
Coroana solară	10^6
Unda de șoc în aer la 20 Mach	$2,5 \cdot 10^4$
Nebuloase vizibile	10^4
Suprafața Soarelui	$6 \cdot 10^3$
Punctul de topire al wolframului	$3,6 \cdot 10^3$
Punctul de topire al plumbului	$6,0 \cdot 10^2$
Punctul de înghețare al apei	$2,7 \cdot 10^2$
Punctul de fierbere al oxigenului (1 atm)	$9,0 \cdot 10^1$
Punctul de fierbere al hidrogenului (1 atm)	$2,0 \cdot 10^1$
Punctul de fierbere al heliului (^4He) la 1 atm	4,2
Punctul de fierbere al ^3He la presiuni joase accesibile	$3,0 \cdot 10^{-1}$
Demagnetizarea adiabatică a sărurilor paramagnetice	10^{-3}
Demagnetizarea adiabatică a nucleelor	10^{-6}

* Vezi *Scientific American*, septembrie 1954; număr special despre căldură.

¹ Este posibil să preparăm sisteme care să aibă temperaturi Kelvin negative. Este surprinzător faptul că astfel de temperaturi nu sînt obținute trecînd prin zero Kelvin, ci trecînd prin temperaturi infinite. Adică temperaturile negative nu sînt mai „rece” decît zero absolut, ci sînt mai „calde” decît temperaturile infinite. Vezi *Science by Degress*, de Castle, Emmerich Heikes, Miller și Rayne, publicat de Walker și Compania, New York, 1965. Zero absolut rămîne experimental inaccesibil.

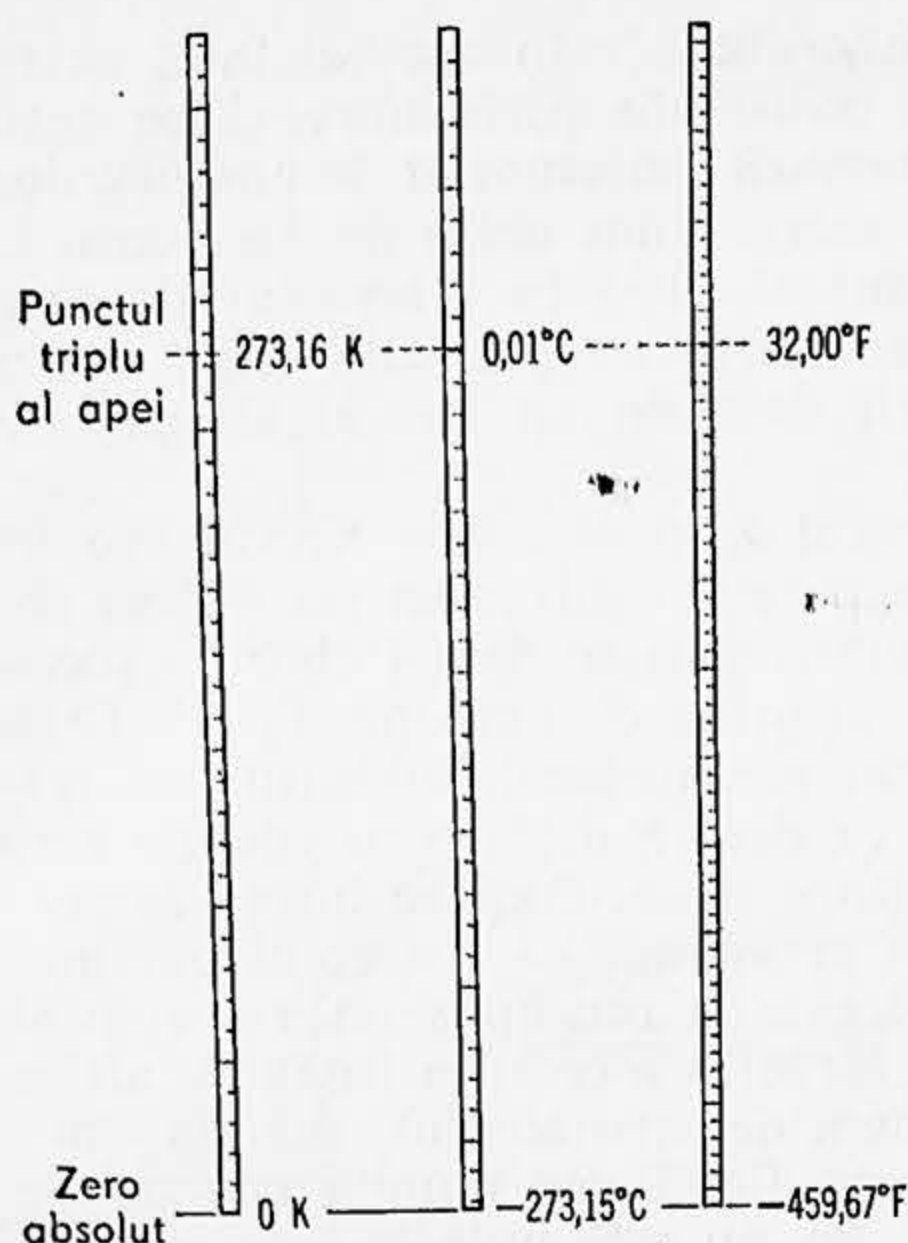


Figura 21-4. Scările de temperatură Kelvin, Celsius și Fahrenheit.

21-6. Scara Celsius și scara Fahrenheit

Se folosesc de obicei două scări de temperatură, scara Celsius¹ și scara Fahrenheit. Aceste scări se definesc cu ajutorul scării Kelvin care constituie scara fundamentală a temperaturilor în știință.

Scara Celsius a temperaturii folosește un grad (unitatea de temperatură) care are aceeași mărime ca și gradul de pe scara Kelvin. Dacă notăm cu T_C temperatura pe scara Celsius, atunci

$$T_C = T - 273,15^\circ\text{C} \quad (21-5)$$

leagă temperatura Celsius T_C ($^\circ\text{C}$) și temperatura Kelvin T (K). Vedem că punctul triplu al apei ($=273,16$ K prin definiție) corespunde lui $0,01^\circ\text{C}$. În baza experienței, temperatura la care gheața, apa și vaporii de apă saturați (cu aer) sînt în echilibru la presiunea

atmosferică — așa numitul punct de înghețare al apei — este egală cu $0,00^\circ\text{C}$ și temperatura la care vaporii și apa lichidă sînt în echilibru la presiunea de 1 atm — așa numitul punct de fierbere al apei — este egală cu $100,00^\circ\text{C}$.

Scara Fahrenheit, folosită de obicei în țările care folosesc limba engleză (cu excepția Angliei însăși, care a adoptat scara Celsius pentru uz comercial și civil în 1964), nu este folosită în cercetări științifice. Legătura dintre scara Fahrenheit și scara Celsius este dată de relația

$$T_F = 32^\circ\text{F} + \frac{9}{5} T_C.$$

Din această relație putem trage concluzia că punctul de topire al gheței ($0,00^\circ\text{C}$) este egal cu $32,0^\circ\text{F}$, că punctul de fierbere al apei ($100,0^\circ\text{C}$) este egal cu $212,0^\circ\text{F}$ și că un grad Fahrenheit este egal cu $5/9$ dintr-un grad Celsius. În figura 21-4 sînt comparate scările Kelvin, Celsius și Fahrenheit.

21-7. Scara practică internațională a temperaturilor

Să rezumăm acum ideile din ultimele paragrafe. Punctul fix standard în termometrie este punctul triplu al apei căruia i s-a prescris în

¹ Această scară, bazată pe o scară inventată de suedezul Celsius în 1742, a fost numită scară „centigrad” pînă în 1948, cînd cea de-a 9-a Conferință Generală a Măsurilor și Greutăților, a decis ca această denumire să fie schimbată.

mod arbitrar valoarea 273,16 K. Termometrul cu gaz la volum constant este termometrul standard sau etalon. Scara extrapolată a gazului este folosită pentru a defini temperatura gazului ideal prin $T = 273,16 \text{ K} \lim_{P_{tr} \rightarrow 0}$

(P/P_{tr}). Această scară este identică cu scara Kelvin (scara termodinamică absolută) în intervalul în care poate fi folosit un termometru cu gaz.

Folosind termometrul standard în acest mod, putem determina experimental alte puncte de referință pentru măsurători de temperatură, numite puncte fixe. Enumerăm punctele fixe fundamentale adoptate pentru referințe experimentale în tabela 21-2. Temperaturile pot fi exprimate în scara Celsius, folosind ecuația (21-5), temperatura Kelvin fiind determinată.

Tabela 21-2

PUNCTELE FIXE ALE SCĂRII PRACTICE INTERNAȚIONALE
A TEMPERATURILOR
(1960)¹

Substanța	Punctul de transformare	Temperatura	
		°C	K
Oxigen	Punct de fierbere normal	-182,97	90,18
Apă	Punctul triplu	0,01	273,16
Apă	Punctul de fierbere normal	100,00	373,15
Sulf ²	Punct de fierbere normal	444,60	717,75
Argint	Punct de topire normal	960,80	1 233,95
Aur	Punct de topire normal	1 063,00	1 336,15

¹ Toate temperaturile sînt presupuse exacte pentru scopurile de etalonare a scărilor.

² Poate fi folosit în schimb punctul de topire normal al zincului (419,505°C).

Determinarea temperaturilor în scara gazului ideal este o muncă anevoioasă. N-ar avea sens să folosim acest procedeu pentru a determina temperaturile în toate ocaziile. În consecință a fost adoptată în 1927 (revizuită în 1948 și apoi în 1954 și 1960) o Scară Practică Internațională a Temperaturilor (SPIT) pentru a asigura o scară ce poate fi folosită ușor în scopuri practice, cum ar fi etalonarea instrumentelor industriale sau științifice. Această scară constă dintr-o serie de rețete pentru a realiza în practică aproximațiile cele mai bune posibile ale scării Kelvin. A fost adoptată o serie de puncte fixe, punctele fundamentale din tabela 21-2, și au fost indicate o serie de instrumente care trebuie folosite pentru interpolare între aceste puncte fixe și pentru extrapolare dincolo de punctul fix cel mai înalt. Sînt indicate formule pentru corectarea temperaturilor fundamentale conform indicațiilor presiunii barometrice. SPIT se abate de la scara Kelvin la temperaturile între punctele fixe, însă diferența este de obicei neglijabilă. SPIT a devenit etalonul standard în aproape toate țările.

21-8. Dilatarea termică

Efectele obișnuite ale variațiilor de temperatură sînt variațiile în dimensiunea și starea materialelor. Să considerăm variațiile dimensiuni-

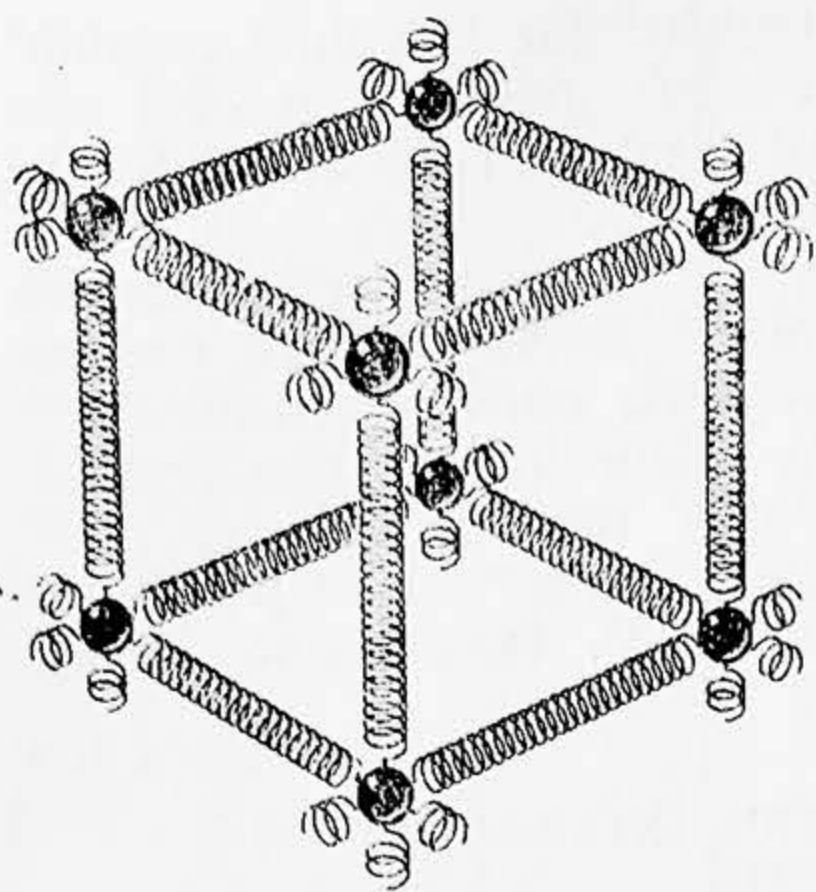


Figura 21-5. Un solid se comportă în multe privințe ca și cum ar fi format dintr-un sistem de resorturi microscopice („lăcaș de resorturi”) în care moleculele sînt ținute laolaltă de forțe elastice.

lor care se produc fără schimbare de stare. Să considerăm un model simplu al unui solid cristalin. Atomii sînt menținuți laolaltă într-un aranjament regulat de către forțele de origine electrică. Forțele dintre atomi sînt asemănătoare acelor care ar fi exercitate de o serie de resorturi conectînd atomii, astfel încît putem vizualiza corpul solid ca un sistem de resorturi microscopice (fig. 21-5). Aceste „resorturi” sînt foarte moi (problema 38, capitolul 15) și sînt aproximativ 10^{22} astfel de resorturi într-un cm^3 . La orice temperatură atomii solidului vibrează. Amplitudinea de vibrație este de aproximativ 10^{-9} cm și frecvența aproximativ 10^{13} Hz.

Cînd temperatura crește distanța medie dintre atomi crește. Aceasta duce la o dilatare (expansiune) a întregului corp solid atunci cînd temperatura crește.

Variația oricărei dimensiuni a solidului cum este lungimea sa, lățimea sau grosimea, se numește dilatare liniară. Dacă lungimea acestei dimensiuni liniare este l , variația lungimii, provenite dintr-o variație ΔT a temperaturii este Δl . Aflăm din experiență că, dacă ΔT este suficient de mic, această variație Δl a lungimii este proporțională cu variația de temperatură ΔT și cu lungimea inițială l . Prin urmare, putem scrie

$$\Delta l = \alpha l \Delta T, \quad (21-6)$$

unde α , numit *coeficient de dilatare liniară*, are valori diferite pentru materiale diferite. Putem retranscrie această formulă astfel

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T},$$

astfel încît α are semnificația unei variații relative a lungimii pe o variație unitate (1°) a temperaturii.

Strict vorbind, valoarea lui α depinde de temperatura actuală și de temperatura de referință aleasă pentru determinarea lui l (vezi problema 15). Variația sa este însă de obicei neglijabilă în comparație cu precizia cu care trebuie efectuate măsurătorile tehnice. Putem s-o considerăm fără grijă ca o constantă pentru un material dat, independentă de temperatură. În tabela 21-3 dăm valorile experimentale ale coeficientului mediu de dilatare liniară pentru mai multe solide obișnuite. Pentru toate substanțele enumerate, variația de lungime constă într-o dilatare (expansiune) atunci cînd temperatura crește, deoarece α este

pozitiv. Ordinul de mărime al dilatării este de aproximativ 1 mm pentru 1 m lungime pentru 100°C^1 .

Tabela 21-3

UNELE VALORI* ALE LUI $\bar{\alpha}$

Substanța	$\bar{\alpha}$, grd^{-1}	Substanța	$\bar{\alpha}$, grd^{-1}
Aluminiu	$23 \cdot 10^{-6}$	Caucluc tare	$80 \cdot 10^{-6}$
Alamă	$19 \cdot 10^{-6}$	Gheață	$51 \cdot 10^{-6}$
Cupru	$17 \cdot 10^{-6}$	Invar	$0,7 \cdot 10^{-6}$
Sticlă (obișnuită)	$9 \cdot 10^{-6}$	Plumb	$29 \cdot 10^{-6}$
Sticlă (pirex)	$3,5 \cdot 10^{-6}$	Oțel	$11 \cdot 10^{-6}$

* Pentru intervalul $0^{\circ}\text{C}—100^{\circ}\text{C}$; cu excepția intervalului $-10^{\circ}\text{C}—0^{\circ}\text{C}$ pentru gheață.

Exemplul 2. O riglă de oțel trebuie etalonată astfel încît intervalele de 1 milimetru să fie exacte cu o precizie de $5 \cdot 10^{-5}$ mm la o anumită temperatură. Care este variația maximă de temperatură permisă în timpul etalonării?

Din ecuația (21-6)

$$\Delta l = \alpha l \Delta T,$$

avem $5 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = (11 \cdot 10^{-6} \text{ grd}^{-1}) \cdot 1,0 \text{ mm} \cdot \Delta T$,

în care am folosit α pentru oțel, luat din tabela 21-3. Aceasta dă $\Delta T \approx 5 \text{ grd}$. Temperatura menținută în timpul procesului de etalonare trebuie menținută de asemenea atunci cînd rigla este folosită și trebuie menținută constantă în limitele a 5 grd.

Observăm (vezi tabela 21-3) că dacă în locul oțelului este folosit aliajul invar atunci pentru aceeași toleranță cerută este permisă o variație de temperatură de aproximativ 75 grd sau pentru aceeași variație de temperatură ($\Delta T = 5 \text{ grd}$) toleranța obținută ar fi cu peste un ordin de mărime mai bună.

La nivel microscopic, dilatarea termică a solidului înseamnă o creștere a distanțelor medii dintre atomii solidului. Curba energiei potențiale pentru doi atomi adiacenți într-un solid cristalin în funcție de distanța lor internucleară este o curbă asimetrică asemănătoare cu cea din figura 21-6. Atunci cînd atomii se apropie unul de altul, distanța lor de separație descrescînd față de valoarea la echilibru r_0 , intră în joc puternice forțe repulsive și curba de potențial crește abrupt ($F = -dU/dr$); dacă atomii se depărtează între ei, distanța lor de separație crescînd față de valoarea la echilibru, predomină forțe atractive ceva mai slabe și curba de potențial crește mai încet. La o energie dată de vibrație, distanța dintre atomi va varia periodic de la o valoare minimă pînă la o valoare maximă, distanța medie fiind mai mare decît distanța la echilibru datorită naturii asimetrice a curbei energiei potențiale. La o energie de vibrație și mai mare, distanța medie va fi și mai mare. Efectul este amplificat de faptul că în luarea mediei

¹ Un grad Celsius (1 grd) este un interval de temperatură (ΔT) de o unitate, măsurat pe scara Celsius. Un grad Celsius (1°C) este o anumită indicație a temperaturii (T) pe scara Celsius.

temporale a mișcării trebuie să ținem seama de timpul mai îndelungat petrecut la distanțele maxime (viteze de vibrație mai mici). Deoarece energia de vibrație crește odată cu creșterea temperaturii, distanța medie dintre atomi crește cu temperatura și solidul ca un întreg se dilată.

Observăm că dacă curba energiei potențiale ar fi simetrică în jurul distanței de echilibru, atunci oricât de mare ar deveni amplitudinea vibrațiilor, distanța medie ar corespunde distanței de echilibru. În consecință dilatarea termică este o consecință directă a abaterii de la simetrie (adică asimetria) a curbei energiei potențiale care este caracteristică solidelor.

Unele solide cristaline, în anumite intervale de temperatură, se pot contracta atunci când temperatura crește. Analiza de mai sus rămâne valabilă dacă presupunem că există numai moduri de vibrație longitudinale (de compresune) sau că aceste moduri de vibrație predomină. Solidele pot prezenta însă și moduri transversale (de lunecare) de vibrație și aceste moduri de vibrație permit solidului să se contracte atunci când temperatura crește, distanța medie dintre planele atomice descrescând. Pentru anumite tipuri de structură cristalină și în anumite intervale de temperatură aceste moduri transversale de vibrație pot domina față de cele longitudinale, dând un coeficient net negativ de dilatare termică.

Ar trebui subliniat faptul că modelele microscopice prezentate aici sînt simplificări extreme ale unui fenomen complex ce poate fi tratat cu mai multă grijă prin folosirea termodinamicii și teoriei cuantice.

Pentru multe solide, numite *izotrope*, variația procentuală (relativă) a lungimii pentru o variație dată de temperatură este aceeași pentru toate liniile din solid. Dilatarea este cu totul analogă unei mărimi fotografice, cu excepția faptului că solidul este tridimensional. Astfel, dacă avem o placă plană cu o gaură străpunsă în ea, $\Delta l/l (= \alpha \Delta T)$ pentru un ΔT dat este același pentru lungimea, grosimea, diagonala feței, diagonala spațială și diametrul găurii. Orice linie, fie dreaptă fie curbă, se lungeste în raportul α pentru un grad de creștere a temperaturii. Dacă vă zgîriați numele pe o placă, linia care reprezintă numele dvs. va suferi aceeași variație relativă de lungime ca oricare altă linie. Analogia cu o mărire fotografică este arătată în figura 21-7.

Cu aceste idei în minte, studentul trebuie să fie în stare să arate (vezi problemele 16 și 17), că, cu un mare grad de precizie variația re-

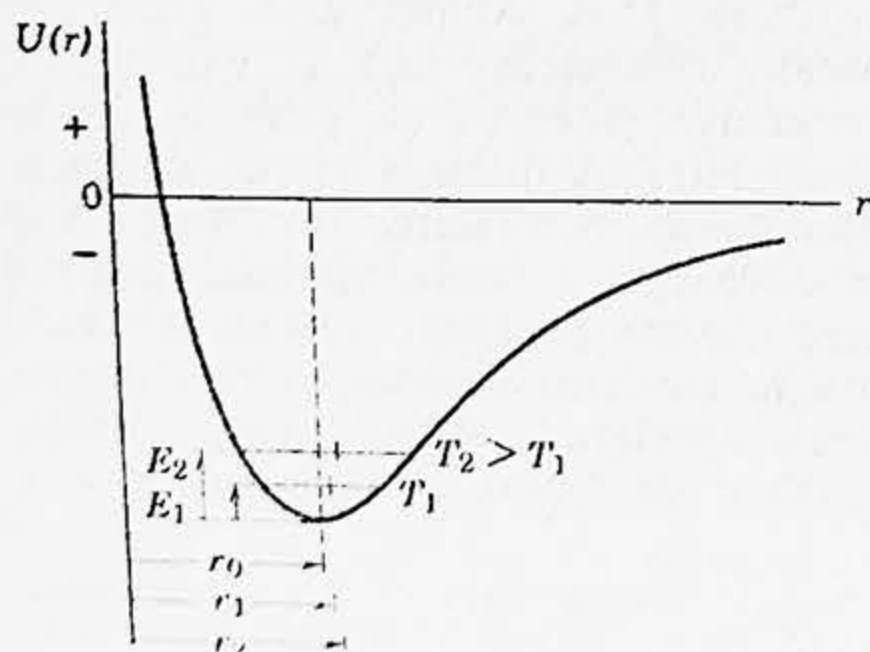
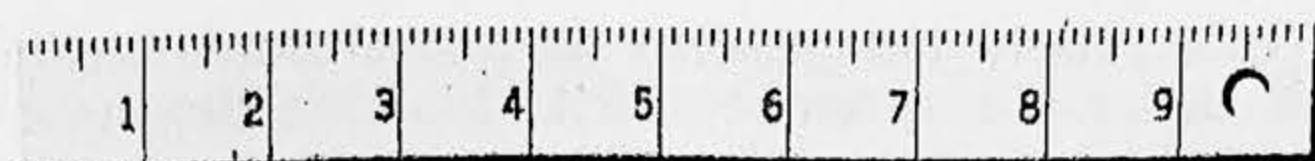
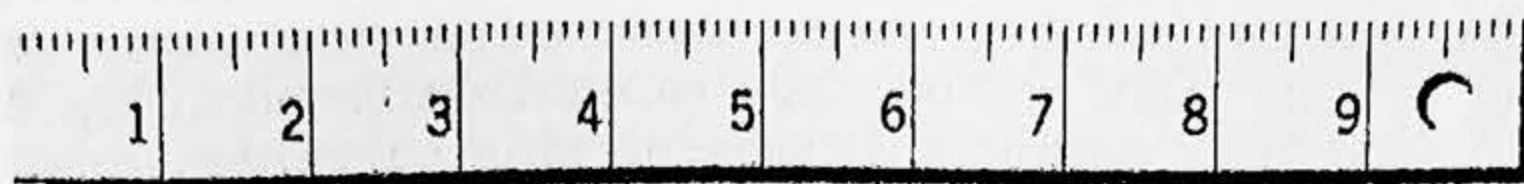


Figura 21-6. Curba energiei potențiale pentru doi atomi vecini într-un solid cristalin în funcție de distanța internucleară. Distanța de echilibru este r_0 . Deoarece curba este asimetrică, distanța medie (r_1 , r_2) crește odată cu temperatura (T_1 , T_2) și deci energia de vibrație (E_1 , E_2) crește.



(a)



(b)

Figura 21-7. Aceeași riglă de oțel la două temperaturi diferite. Prin dilatare, oricare dimensiune crește în același raport: scara, numerele, orificiul și grosimea toate cresc prin același factor. (Dilatarea arătată de la (a) la (b) este evident exagerată deoarece ar corespunde unei creșteri imaginare de temperatură de aproximativ $100\,000^{\circ}\text{C}$!)

lativă a ariei A pentru o variație cu un grad a temperaturii, pentru un solid izotrop, este 2α , adică

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T$$

și variația relativă a volumului V pentru o variație cu un grad a temperaturii pentru un solid izotrop, este 3α , adică

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta T.$$

Deoarece forma unui fluid nu este definită, are sens numai variația volumului cu temperatura. Gazele răspund apreciabil la variații de temperatură sau presiune, în timp ce variația de volum a lichidelor cu variația temperaturii sau presiunii este foarte mică. Dacă notăm cu β coeficientul de dilatare volumică a unui lichid, adică

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T},$$

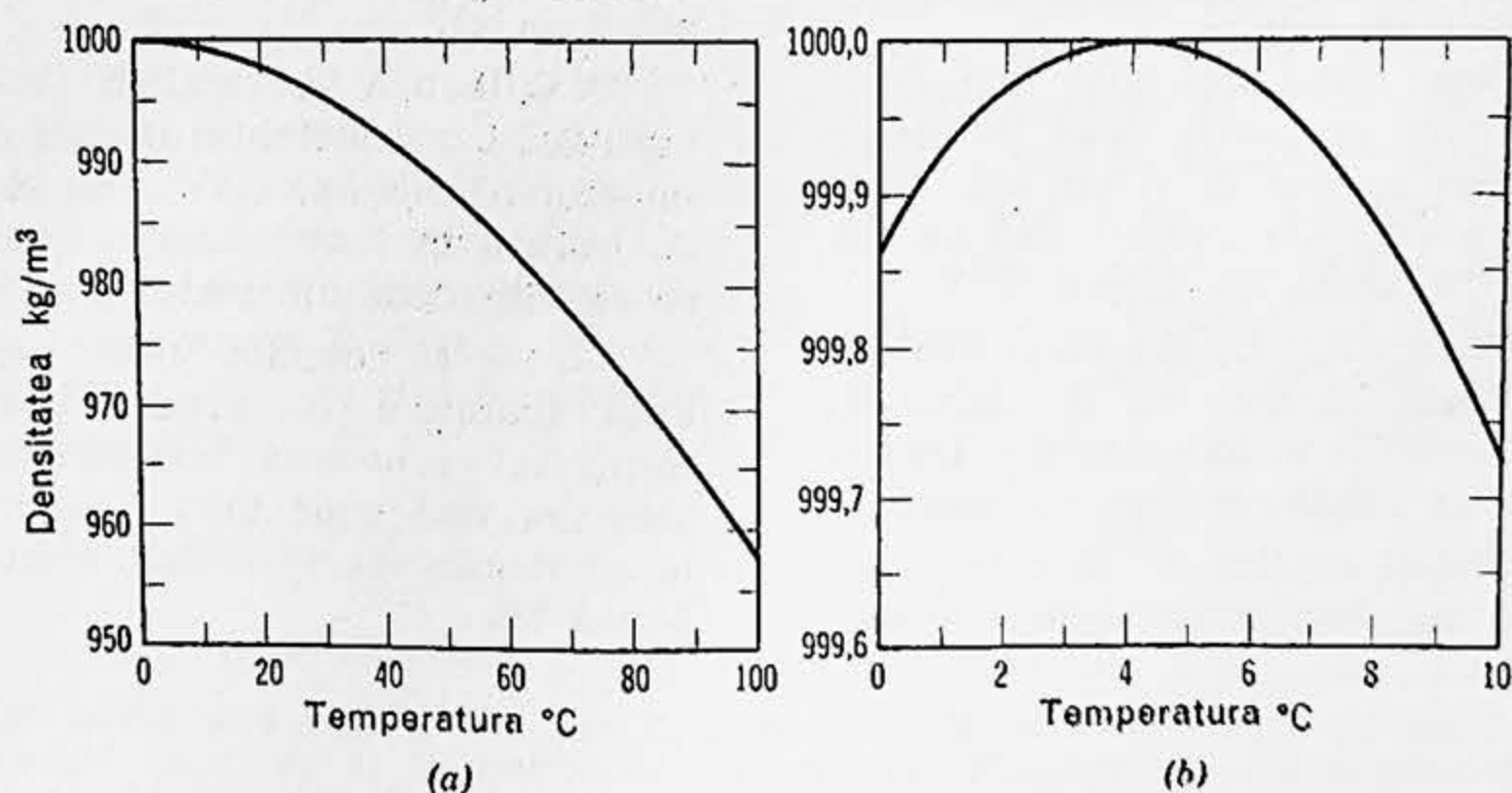


Figura 21-8. (a) Variația cu temperatura a densității apei la presiunea atmosferică. (b) Variația între 0 și 10°C în detaliu.

găsim că β este relativ independent de temperatură. Lichidele se dilată în mod tipic cu creșterea temperaturii, dilatarea lor în volum fiind în general de aproximativ zece ori mai mare decât cea a solidelor.

Cu toate acestea, cel mai obișnuit lichid, apa, nu se comportă ca celelalte lichide. În figura 21-8 se arată curba dilatării pentru apă. Observăm că deasupra lui 4°C apa se dilată odată cu creșterea temperaturii, deși neliniar. Când temperatura coboară de la 4 la 0°C , însă, apa se dilată în loc să se contracte. O astfel de dilatare cu descreșterea temperaturii nu se observă la nici un alt lichid obișnuit; ea se observă la substanțe de tipul cauciucului și în anumite solide cristaline pe intervale limitate de temperatură. Densitatea apei este maximă la 4°C când valoarea densității¹ este $1\,000\text{ kg/m}^3$ sau $1,000\text{ g/cm}^3$. La toate celelalte temperaturi densitatea sa este mai mică. Această comportare a apei explică motivul pentru care lacurile îngheață mai întâi la suprafață.

Întrebări

1. Este temperatura un concept microscopic sau macroscopic?

2. Conține „senzația noastră de temperatură” o senzație de direcție (sens), adică mai fierbinte înseamnă neapărat temperatură mai înaltă sau este aceasta doar o convenție arbitrară? Celsius, de altfel, a ales inițial punctul de fierbere al apei ca 0°C și punctul de topire a gheții ca 100°C .

3. Sugați cum ați putea măsura temperatura: (a) Soarelui, (b) atmosferei terestre superioare, (c) unei insecte, (d) Lunii, (e) fundului oceanului și (f) heliului lichid?

4. Este vreun gaz mai bun decât altul pentru scopurile unui termometru etalon cu gaz la volum constant? Ce proprietăți ale gazului sînt de dorit pentru astfel de scopuri?

5. Formulați obiecții împotriva folosirii unui termometru de sticlă cu apă. Constituie o îmbunătățire termometrul de sticlă ce conține mercur?

6. Puteți explica de ce coloana de mercur mai întâi coboară și apoi urcă

atunci când un termometru de sticlă cu mercur este introdus într-o flacără?

7. Care sînt dimensiunile coeficientului de dilatare liniară α ? Depinde valoarea lui α de unitatea de lungime folosită? Dacă grd F este folosit în locul grd C ca unitate de variație a temperaturii, se schimbă valoarea numerică a lui α ? Dacă da, cu cît?

8. O bilă de metal poate trece printr-un inel de metal. Dacă bila este încălzită ea înțepenește în inel. Ce s-ar întâmpla dacă în locul bilei ar fi încălzit inelul?

9. O bandă bimetalică, constînd din două benzi metalice diferite nituite împreună, este folosită ca un element de control în termostatul obișnuit. Să se explice cum funcționează ea?

10. Să se explice cum perioada unui ceasornic cu pendul poate fi menținută constantă cu temperatura prin atașarea unor tuburi cu mercur la extremitatea pendulului (vezi problema 13).

¹ Această valoare de o unitate a densității maxime a apei este aceea la care s-au referit inițial dimensiunile relative ale kilogramului și metrului. Măsurători precise arată însă că etaloanele internaționale de masă și de lungime nu corespund exact acestei valori. Densitatea maximă a apei este în realitate $999,973\text{ kg/m}^3$ la $3,98^{\circ}\text{C}$.

11. Să se explice de ce anumite substanțe de tipul cauciucului se contractă cu creșterea temperaturii. (Vezi întrebarea 21, cap. 25).

12. Să se explice de ce dilatarea aparentă a unui lichid într-un balon nu dă dilatarea reală (adevărată) a lichidului.

13. Depinde variația de volum a unui corp când temperatura sa crește

de faptul că corpul are cavități în interior, celelalte condiții fiind aceleași? Să se considere de exemplu o sferă plină și o sferă goală.

14. Ce dificultăți s-ar naște dacă am defini temperatura cu ajutorul densității apei?

15. Să se explice de ce lacurile îngheață mai întâi la suprafață?

Probleme

1. Dacă temperatura în scara gazului ideal la punctul de fierbere al apei este de 373,15 K, care este valoarea limită a raportului dintre presiunea unui gaz la punctul de fierbere al apei și presiunea la punctul triplu al apei, dacă gazul este menținut la volum constant?

2. Fie p_{tr} presiunea din balonul unui termometru cu gaz la volum constant atunci când balonul se află la temperatura punctului triplu de 273,16 K și fie p presiunea atunci când balonul se află la temperatura camerei. Fie date trei termometre cu gaz la volum constant: Pentru nr. 1 gazul este oxigenul și $p_{tr}=20$ cm Hg; pentru nr. 2 gazul este de asemenea oxigenul dar $p_{tr}=40$ cm Hg; pentru nr. 3 gazul este hidrogenul și $p_{tr}=30$ cm Hg. Valorile măsurate ale lui p pentru aceste trei termometre sînt p_1 , p_2 și p_3 . (a) O valoare aproximativă a temperaturii T a camerei poate fi obținută cu fiecare din termometre folosind formulele

$$T_1 = 273,16 \text{ K} \frac{p_1}{20 \text{ cm Hg}};$$

$$T_2 = 273,16 \text{ K} \frac{p_2}{40 \text{ cm Hg}};$$

$$T_3 = 273,16 \text{ K} \frac{p_3}{30 \text{ cm Hg}}.$$

Marcați cu cuvintele „adevărat” sau „fals” fiecare din următoarele afir-

mații: (1) Cu ajutorul metodei descrise toate cele trei termometre vor da aceeași valoare a lui T . (2) Cele două termometre cu oxigen vor fi în concordanță unul cu celălalt dar nu cu termometrul cu hidrogen. (3) Fiecare din cele trei termometre va da o valoare diferită pentru T . (b) În cazul în care există o discordanță între cele trei termometre, să se explice cum ar trebui modificată metoda de utilizare a acestora pentru ca toate cele trei termometre să dea aceeași valoare pentru T .

3. Faptul că obiectele calde și reci se răcesc sau se încălzesc pînă la temperatura mediului înconjurător este o constatare cotidiană. Dacă diferența de temperatură ΔT dintre un obiect și mediul său înconjurător nu este prea mare, viteza de răcire sau de încălzire este aproximativ proporțională cu diferența de temperatură dintre obiect și mediul său înconjurător, adică

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -K\Delta T,$$

unde K este o constantă. Semnul minus apare din cauză că ΔT descrește cu timpul dacă ΔT este pozitiv și invers. Această formulă este cunoscută sub numele de legea de răcire a lui Newton. (a) De ce factori depinde K ? Care sînt dimensiunile sale? (b) Dacă

la un anumit moment diferența de temperatură este ΔT_0 , să se arate că

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-Kt}$$

după un timp t .

4. Un termometru de sticlă cu mercur este introdus pentru câteva minute în apa care fierbe și apoi scos afară. Indicațiile de temperatură citite la diferite momente după scoaterea termometrului sînt următoarele

t, s	$T, ^\circ C$	t, s	$T, ^\circ C$	t, s	$T, ^\circ C$	t, s	$T, ^\circ C$
0	98,4	25	65,1	100	50,3	700	26,5
5	76,1	30	63,9	150	43,7	1 000	26,1
10	71,1	40	61,6	200	38,8	1 400	26,0
15	67,7	50	59,4	300	32,2	2 000	26,0
20	66,4	70	55,4	500	27,8	3 000	26,0

Să se reprezinte K în funcție de timp, presupunînd că se aplică legea lui Newton a răcirii (vezi problema 3). Cît de constantă este „constanta” K ? Ce ar putea provoca variațiile observate la K cu timpul?

5. La ce temperatură scara Fahrenheit și scara Celsius ar indica aceeași temperatură? Dar scara Fahrenheit și scara Kelvin?

6. (a) Temperatura suprafeței Soarelui este de aproximativ 6 000 K. Să se exprime această temperatură în scara Fahrenheit. (b) Să se exprime temperatura normală a corpului uman de 98,6 Fahrenheit în scara Celsius. (c) Excluzînd Havai și Alaska, temperatura cea mai înaltă în Statele Unite este de 134° F la Death Valley, în California, și cea mai coborîtă —70°F la Rogers Pass, în Montana. Să se exprime aceste temperaturi extreme în scara Celsius. (d) Să se exprime punctul normal de fierbere al oxigenului —183°C, în scara Fahrenheit. (e) La ce temperatură Celsius ați găsi că o cameră este inconfortabil de caldă?

7. În intervalul dintre 0 și 660°C un termometru cu rezistență de platină de o anumită construcție este folosit pentru interpolarea temperaturilor în Scara Practică Internațională

a Temperaturilor. Temperatura t este dată de formula variației rezistenței cu temperatura:

$$R = R_0(1 + At + Bt^2).$$

R_0 , A și B sînt constante care se determină prin măsurători la punctul de topire al gheții, punctul de fierbere al apei și punctul de fierbere al sulfului. (a) Dacă R este egal cu 10,000 Ω la punctul de topire al gheții, 13,946 Ω la punctul de fierbere a apei și 24,817 Ω la punctul de fierbere a sulfului, să se afle R_0 , A și B . (b) Să se reprezinte R în funcție de t în intervalul de temperatură de la 0 la 660°C.

8. (a) Să se arate că dacă lungimile a două bare din diferite solide sînt invers proporționale cu coeficienții lor respectivi de dilatare liniară, la o anumită temperatură inițială, diferența de lungime dintre ele va fi constantă la toate temperaturile. (b) Care ar trebui să fie lungimea unei tije de oțel și a unei tije de alamă la 0°C pentru ca la toate temperaturile diferența de lungime dintre ele să fie 0,30 m?

9. O gaură circulară practică într-o placă de aluminiu are un diametru de 2,540 cm la 0°C. Care va fi diametrul ei dacă temperatura plăcii crește pînă la 100°C?

10. Oglinda din sticlă pyrex a telescopului de la observatorul de pe muntele Palomar, are un diametru de 5,08 m. Temperatura variază de la -10°C până la $+50^{\circ}\text{C}$ pe Muntele Palomar. Să se determine variația maximă a diametrului oglinzii.

11. Un pendul de ceasornic confecționat din invar are o perioadă de 0,500 s la 20°C . Dacă ceasornicul este folosit într-o localitate unde clima are temperatură medie 30°C , ce corecție (aproximativă) este necesară la sfârșitul a 30 de zile pentru timpul indicat de ceasornic?

12. Distanța dintre pilonii deschiderii principale a podului Golden Gate de la San Francisco este de 1260 m. Săgeata cablului la mijlocul distanței dintre piloni, la 50°F este 140 m. Luând $\alpha = 6,5 \cdot 10^{-6} (\text{grd F})^{-1}$ pentru cablu, să se calculeze variația în lungime a cablului și variația săgeții cablului pentru o variație de temperatură de la -20°F la 110°F . Se va presupune că pilonii nu se îndoaie și nu se depărtează și că forma cablului este parabolică.

13. Un tub de sticlă aproape plin cu mercur este fixat de extremitatea tijei unui pendul de oțel, de 100 cm lungime. Care trebuie să fie înălțimea mercurului în tubul de sticlă pentru ca centrul de masă al acestui pendul să nu urce sau să nu coboare cu variațiile de temperatură?

14. O bară de oțel are un diametru de 3,000 cm la 25°C . Un inel de alamă are un diametru interior de 2,992 cm la 25°C . La ce temperatură comună inelul va aluneca exact peste bară?

15. Să se arate că dacă α este considerat variabil, dependent de temperatura T , atunci

$$L = L_0 \left[1 + \int_{T_0}^T \alpha(T) dT \right]$$

unde L_0 este lungimea la o temperatură de referință T_0 .

16. Aria A a unei plăci dreptunghiulare este ab . Coeficientul ei de dilatare liniară este α . După o creștere de temperatură ΔT , latura a s-a alungit cu Δa , iar latura b s-a alungit cu Δb . Să se arate că dacă neglijăm aria mică $\Delta a \cdot \Delta b$, arătată prin hașura oblică și mult exagerată ca dimensiuni în figura 21-9, atunci $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$.

17. Să se arate că, dacă neglijăm mărimile foarte mici, variația în volum a unui solid, în timpul dilatării, la o creștere de temperatură ΔT este dată de $\Delta V = 3\alpha V \Delta T$, unde α este coeficientul de dilatare liniară.

18. Când temperatura unui ban de „cupru” a crescut cu 100°C , diametrul său a crescut cu 0,18%. Să se calculeze cu două cifre semnificative creșterea procentuală a: (a) ariei unei fețe (b) grosimii, (c) volumului și (d) masei banului. (e) Care este coeficientul de dilatare liniară?

19. Să se calculeze variația în volum a unei sfere de aluminiu cu raza de 10,0 cm atunci când ea este încălzită de la $0,00$ până la 100°C .

20. Să considerăm un termometru de sticlă cu mercur. Să presupunem că secțiunea transversală a capilarului are valoarea constantă A_0 și că volumul rezervorului de mercur la $0,00^{\circ}\text{C}$ este V_0 . Dacă mercurul umple exact rezervorul la $0,00^{\circ}\text{C}$, să se arate că lungimea coloanei de mercur din capilar la o temperatură $t^{\circ}\text{C}$ este

$$l = \frac{V_0}{A_0} (\beta - 3\alpha)t$$

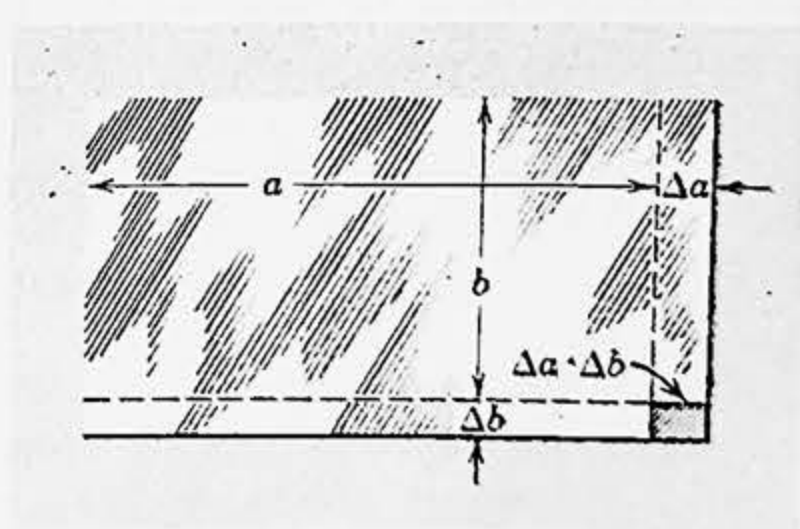


Figura 21-9.

adică este proporțională cu temperatura, unde β este coeficientul de dilatare în volum al mercurului și α este coeficientul de dilatare liniară al sticlei.

21. Densitatea este masa pe unitatea de volum. Dacă volumul V depinde de temperatură, atunci și densitatea ρ depinde de temperatură. Să se arate că variația densității $\Delta\rho$ datorită variației de temperatură ΔT este dată de

$$\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T,$$

unde β este coeficientul de dilatare în volum. Să se explice semnul minus.

22. (a) Să se arate că variația momentului de inerție I cu temperatura al unui obiect solid este dată de $\Delta I = -2\alpha I\Delta T$. (b) Să se arate că variația perioadei t a unui pendul fizic cu temperatura este dată $\Delta t = \frac{1}{2}\alpha t\Delta T$.

23. Să considerăm un cilindru omogen de alamă de masă $M=0,50$ kg și rază $R=30$ mm. Cilindrul este așezat în lagăre fără frecări și pus în rotație în jurul axei sale cilindrice cu o viteză unghiulară $\omega=60$ rad/s. (a) Care este momentul cinetic al cilindru-lui și cât lucru mecanic trebuie efectuat pentru a atinge această viteză de rotație, pornind din repaus? (b) După ce cilindrul a atins starea de mișcare descrisă mai sus, îl încălzim fără contact mecanic de la temperatura camerei (20°C) până la 100°C . Se va lua coeficientul mediu de dilatare liniară a alamei $\alpha=2,0\cdot 10^{-5}$ grd^{-1} . Să se afle variațiile relative, dacă există, ale vitezei unghiulare, momentului cinetic și

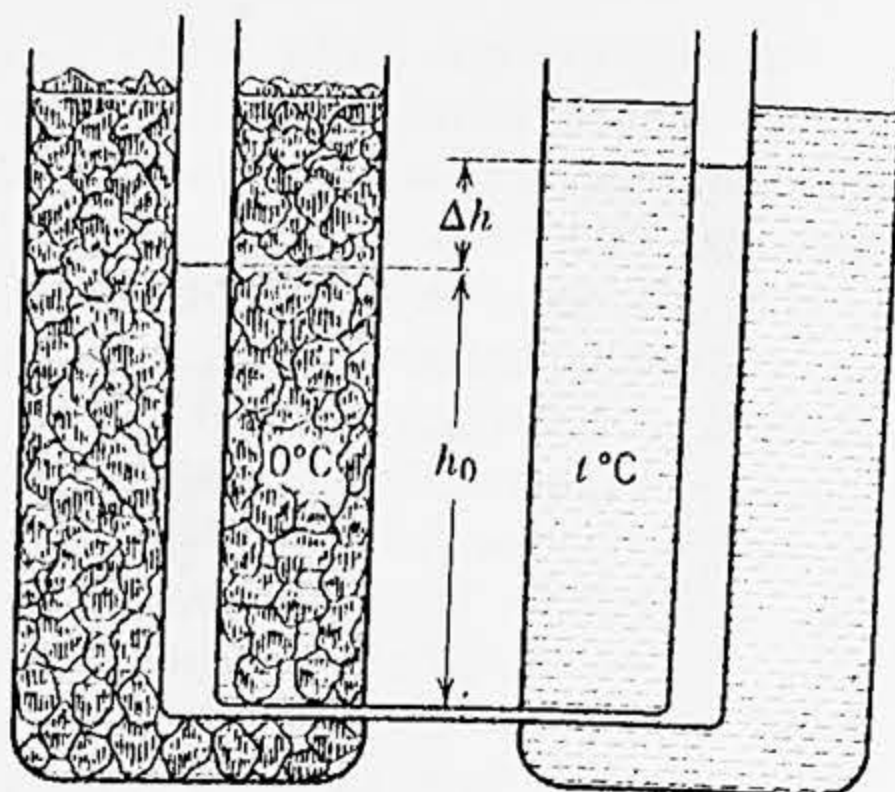


Figura 21-10.

energiei cinetice de rotație a cilindru-lui. Să se explice.

24. Să se arate că dacă temperatura unui lichid într-un barometru variază cu ΔT și presiunea este constantă, înălțimea h variază cu $\Delta h = -\beta h\Delta T$, unde β este coeficientul de dilatare în volum.

25. Două tuburi de sticlă verticale umplute cu un lichid sînt legate la capetele lor inferioare printr-un tub capilar orizontal. Unul dintre tuburi este înconjurat de o baie conținînd gheață și apă în echilibru ($0,0^\circ\text{C}$) iar celălalt de o baie de apă fierbinte (t). Diferența de înălțime a lichidelor din cele două coloane este Δh , h_0 fiind înălțimea coloanelor la $0,0^\circ\text{C}$. Să se arate cum acest aparat (fig. 21-10), folosit pentru prima dată în 1816 de Dulong și Petit, poate fi folosit pentru a măsura coeficientul de dilatare absolută β al unui lichid (în locul diferenței de dilatare dintre sticlă și lichid). Să se determine β dacă $t = -16,0^\circ\text{C}$, $h_0 = 126$ cm și $\Delta h = 1,50$ cm.

Căldura și primul principiu al termodinamicii

22-1. Căldura — o formă a energiei

Atunci când două sisteme aflate la temperaturi diferite sînt puse în contact, temperatura finală atinsă de ambele sisteme este undeva între cele două temperaturi inițiale. Aceasta este o observație obișnuită. Omul a căutat mult timp o înțelegere mai profundă a unor astfel de fenomene. Pînă la începutul secolului al XIX-lea, aceste fenomene erau explicate prin postularea că ar exista în fiecare corp o substanță materială numită *caloric* (indestructibil). Se credea că un corp la temperatură înaltă conține mai mult fluid caloric decît unul la o temperatură joasă. Cînd cele două corpuri sînt puse în contact, corpul bogat în fluidul caloric transmite o parte celui alt pînă cînd ambele corpuri ating aceeași temperatură. Teoria caloricului a fost în stare să descrie mai multe procese cum este conducția căldurii sau amestecarea substanțelor într-un calorimetru într-un mod satisfăcător. Cu toate acestea conceptul de căldură ca o *substanță* (fluid), a cărei cantitate totală rămîne constantă, nu a putut pînă la urmă să reziste experienței. Cu toate acestea, noi descriem și astăzi multe variații obișnuite de temperatură ca transferul a „ceva” de la un corp aflat la temperatură mai înaltă către un corp aflat la o temperatură mai joasă și acest „ceva” îl numim căldură. O definiție utilă dar neoperațională este: *căldura este ceea ce se transferă între un sistem și mediul său înconjurător ca rezultat numai al diferențelor de temperatură.*

Pînă la urmă s-a ajuns la următoarea înțelegere generală: căldura este o formă a energiei și nu o substanță. Prima dovadă decisivă că căldura n-ar putea fi o substanță a fost dată de către Benjamin Thompson (1753—1814), un american care a devenit mai tîrziu contele Rumford

de Bavaria. Într-un articol citit în fața Societății Regale (Royal Society)¹ din 1798 el scria:

Eu... sînt convins că obiceiul de a deschide bine ochii la orice se întîmplă în viața de toate zilele a condus adesea, ca și întîmplarea sau jocul imaginației..., la îndoelele utile și la căi judecătorești pentru cercetare și progres decît toate meditațiile cele mai perseverente, ale filozofilor, în orele destinate special pentru studiu. A fost o întîmplare că eu am fost condus să fac experiențele despre care relatez acum.

Rumford a făcut descoperirea sa în timp ce supraveghea găurirea unui tun pentru guvernul din Bavaria. Pentru a preveni supraîncălzirea, țeava tunului a fost umplută cu apă. Apa a fost completată pe măsură ce se vaporiza prin fierbere în timpul procesului de găurire. Se credea că fluidul caloric trebuie furnizat apei pentru a o fierbe. Producerea continuă de caloric era explicată prin ipoteza că atunci cînd o substanță este divizată mai fin, ca în procesul de găurire, capacitatea ei de a reține caloricul devine mai mică și că fluidul caloric eliberat în acest mod era cauza fierberii apei. Rumford a observat în experiențe speciale, însă, că apa se evaporă prin fierbere chiar dacă instrumentele sale de găurit deveneau atît de tocite încît nu mai erau în stare să mai taie sau să mai dividă materialul.

El scria, după eliminarea, în baza experienței, a tuturor interpretărilor posibile pe baza caloricului:

...Raționînd asupra acestui subiect, nu trebuie să uităm să considerăm acea circumstanță deosebit de remarcabilă că sursa căldurii generate prin frecare, în aceste experiențe, apărea în mod evident a fi *inepuizabilă*...; îmi pare ca fiind extrem de dificil, dacă nu chiar imposibil, de a ne forma vreo idee distinctă despre un lucru capabil să fie excitat și comunicat în măsura în care căldura era excitată și comunicată în aceste experiențe, cu excepția mișcării.

Avem aici germenele ideii că lucrul mecanic cheltuit în procesul de găurire era răspunzător pentru crearea căldurii. Ideea nu a fost clar pusă decît mult mai tîrziu de către alții. În locul dispariției continue de energie mecanică și creării continue a căldurii, nici unul nesupunîndu-se vreunui principiu de conservare, astăzi întregul proces este privit ca o transformare a energiei dintr-o formă în alta, energia totală fiind conservată.

Deși conceptele de energie și conservarea sa par evidente astăzi, aceasta a fost o idee nouă chiar în anii 1850 și a scăpat unor oameni cum ar fi Galilei și Newton. În decursul istoriei ulterioare a fizicii, această idee de conservare a condus pe oameni la noi descoperiri. Istoria sa timpurie era remarcabilă din mai multe privințe. Mai mulți gînditori au ajuns la acest mare concept aproape în același timp; la început toți erau fie întîmpinați cu răceală, fie ignorați. Principiul conservării energiei a fost stabilit în mod independent de către Julius von Mayer (1814—1878) în Germania, James Joule (1818—1889) în Anglia, Hermann

¹ Rumford, un american, a fost fondatorul Institutului Regale din Londra. Pe de altă parte Institutul Smithsonian din Washington își datorează originea unui englez.

von Helmholtz (1821—1894) în Germania și L. A. Colding (1815—1888) în Danemarca¹.

Joule a fost acela care a arătat experimental că, atunci cînd o cantitate dată de energie mecanică este transformată în căldură, se dezvoltă întotdeauna o aceeași cantitate de căldură. Astfel, echivalența dintre căldură și lucru mecanic ca două forme de energie a fost definitiv stabilită.

Helmholtz a exprimat primul clar ideea că nu numai căldura și energia mecanică, ci toate formele de energie sînt echivalente și că o cantitate dată dintr-o formă de energie nu poate dispărea fără ca o cantitate egală de energie să apară în alte forme.

22-2. Căldura specifică

Unitatea pentru măsurarea căldurii Q este definită cantitativ cu ajutorul unei variații specifice produse într-un corp în timpul unui proces specificat. Astfel, dacă temperatura unui kilogram de apă crește de la 14,5 la 15,5°C prin încălzire, spunem că a fost transmisă sistemului o *kilocalorie* (kcal) de căldură. *Caloria* (1 cal = 10⁻³ kcal) este de asemenea folosită ca unitate pentru căldură. În sistemul internațional de unități căldura se măsoară, ca orice formă de energie, în jouli.

Temperatura de referință trebuie specificată deoarece în vecinătatea temperaturii camerei, există o mică variație a căldurii necesare pentru o creștere cu un grad a temperaturii, în funcție de intervalul de temperatură ales. Vom neglija această variație pentru majoritatea scopurilor practice. Unitățile de căldură sînt legate între ele astfel:

$$1,000 \text{ kcal} = 1\,000 \text{ cal} \cong 4,186 \text{ kJ}.$$

Substanțele diferă una de alta prin căldura necesară pentru a produce o creștere dată a temperaturii unui corp cu o masă dată. Raportul dintre căldura ΔQ transmisă unui corp și creșterea de temperatură corespunzătoare ΔT se numește *capacitatea calorică* C a corpului, adică

$$C = \text{capacitatea calorică} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Cuvîntul „capacitate” poate duce la confuzii deoarece el sugerează următoarea afirmație total lipsită de sens: „cantitatea de căldură pe care o poate conține un corp”, în timp ce sensul cuvîntului nu este decît cel al căldurii transmise pentru o creștere cu un grad a temperaturii.

¹ Din publicația postumă a lucrării *Reflections* (1872) a inginerului francez Sadi Carnot (1796—1832), rezultă clar că el a ajuns la principiul conservării energiei înaintea tuturor celorlalți. Studentul ar trebui să reflecteze îndeajuns la faptul că cei cinci oameni, primii care au înțeles principiul conservării energiei, au fost toți tineri și toți aveau profesii în afara domeniului fizicii în timpul descoperirilor. Mayer a fost medic, vîrsta 28 ani; Helmholtz a fost fiziolog, vîrsta 32 ani; Colding — inginer, vîrsta 27; Joule — industriaș, vîrsta 25 și Carnot — inginer, vîrsta 34 ani. Rumford a fost mai în vîrstă, 45 ani, comparativ.

Capacitatea calorică pe unitatea de masă a unui corp, numită *căldură specifică*, este o caracteristică a materialului din care este confecționat corpul:

$$c = \frac{\text{capacitatea calorică}}{\text{masa}} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}. \quad (22-1)$$

Pe de o parte, se poate vorbi corect de capacitatea calorică a unui ban, iar pe de altă parte de căldura specifică a cuprului.

Nici capacitatea calorică a unui corp, nici căldura specifică a unui material nu sînt constante ci depind de poziția intervalului de temperatură. Ecuatiile precedente dau numai valori medii pentru aceste mărimi în intervalul de temperatură ΔT . Căldura specifică c a unui material la orice temperatură este definită prin

$$c = \frac{dQ}{mdT}. \quad (22-2)$$

Prin urmare, căldura care trebuie transmisă unui corp de masă m , confecționat dintr-un material cu căldura specifică c , pentru a-i mări temperatura de la T_i pînă la T_f este

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c dT \quad (22-3)$$

unde c este o funcție de temperatură. La temperaturi obișnuite și în intervale deasupra temperaturii obișnuite, căldurile specifice pot fi considerate constante. Figura 22-1 arată variația căldurii specifice a apei cu temperatura. Informația de acest tip se obține folosind un încălzitor electric pentru a furniza căldură cu o viteză care poate fi determinată precis. Vedem din grafic că căldura specifică a apei variază cu mai puțin de 1% față de valoarea sa de 1,000 cal/g·grd de la 15°C.

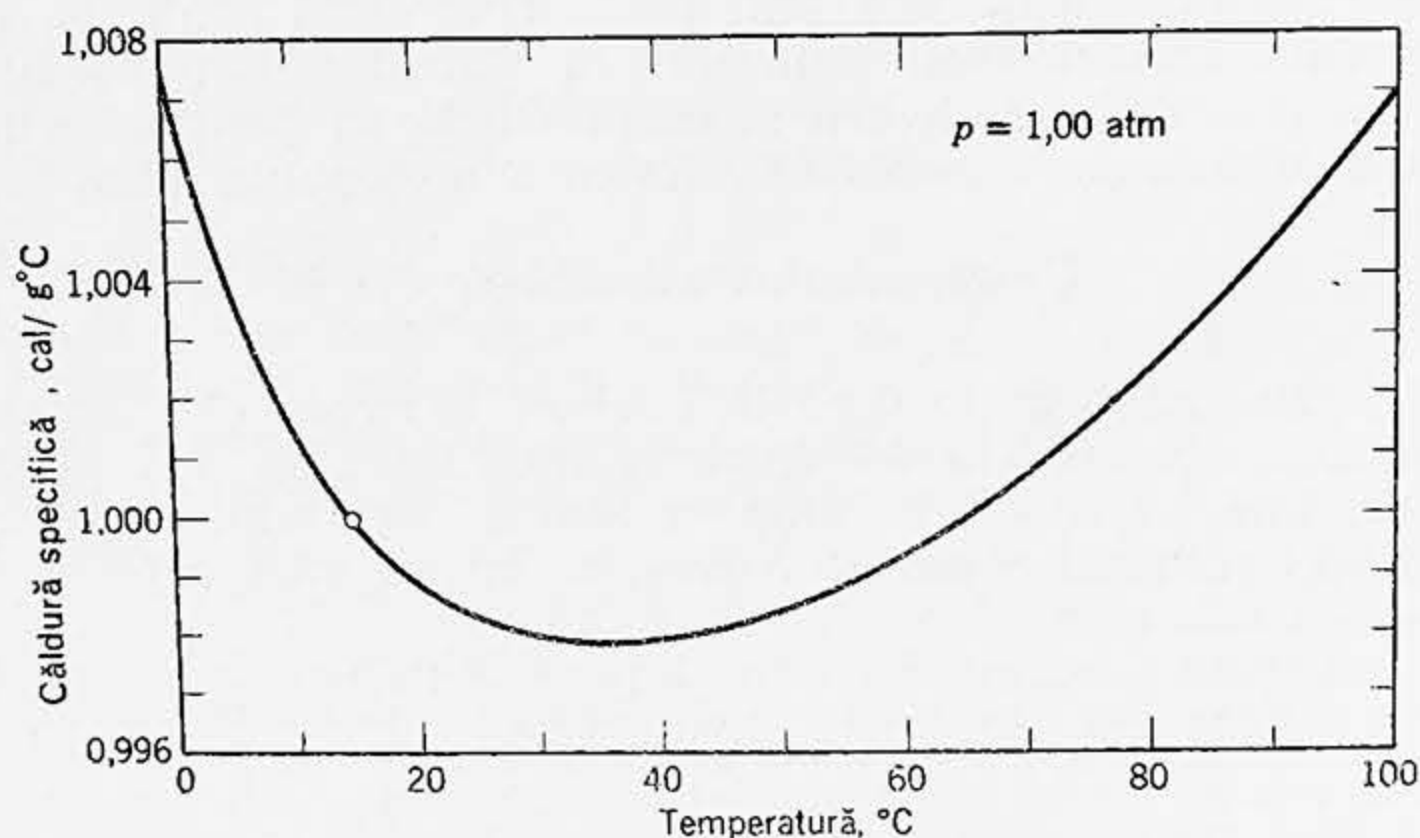


Figura 22-1. Variația cu temperatura a căldurii specifice a apei la o presiune de 1,00 atm. Cerculețul corespunzător lui 15°C indică definiția caloriei.

Ecuatiile (22-1) și (22-2) nu definesc căldura specifică în mod univoc. Trebuie să specificăm de asemenea și condițiile în care căldura ΔQ este transmisă probei. Noi am presupus tacit condiția ca proba să rămână la presiunea atmosferică normală (constantă) în timpul schimbului de căldură. Aceasta este o condiție obișnuită, dar există multe alte posibilități, fiecare conducând în general la o valoare diferită pentru c . Pentru a obține o valoare unică pentru c trebuie să specificăm condițiile, cum ar fi de exemplu căldura specifică la presiune constantă c_p , căldura specifică la volum constant c_v etc.

Tabela 22-1 (coloana a 2-a) arată căldurile specifice la presiune constantă ale unor elemente solide; vom discuta căldurile specifice ale gazelor mai târziu. Observăm că căldura specifică a apei, egală cu 1,00 cal/g·grd, este mare în comparație cu cea a majorității substanțelor.

Tabela 22-1

VALORI ALE LUI c_p PENTRU UNELE SOLIDE (LA TEMPERATURA CAMEREI ȘI $p=1,0$ Atm.)

Substanța	Căldura specifică cal/g·grd	Masa molară g/mol	Căldura molară cal/mol·grd
Aluminiu	0,215	27,0	5,82
Carbon	0,121	12,0	1,46
Cupru	0,0923	63,5	5,85
Plumb	0,0305	207	6,32
Argint	0,0564	108	6,09
Tungsten	0,0321	184	5,92

Exemplul 1. Un bloc de cupru cu masa de 75 g, luat dintr-un furnal, este aruncat într-un vas de sticlă cu masa de 300 g conținând 200 g apă. Temperatura apei crește de la 12°C la 27°C. Care a fost temperatura furnalului?

Acesta este un exemplu de două sisteme, aflate inițial la temperaturi diferite, care ajung la echilibru termic după contact. Nu este implicată nici o energie mecanică, ci numai un schimb de căldură. Prin urmare

căldura cedată de cupru = căldura primită de (vas + apă)

$$m_{Cu}c_{Cu}(T_{Cu}-T_e) = (m_sc_s + m_ac_a)(T_e - T_a).$$

Indicele Cu înseamnă cupru, s — sticlă și a — apă. Temperatura inițială a cuprului este T_{Cu} , temperatura inițială a apei din vas este T_a și T_e este temperatura finală de echilibru. Substituind valorile date, cu $c_{Cu}=0,093$ cal/g·grd, $c_s=0,12$ cal/g·grd și $c_a=1,0$ cal/g·grd, obținem

$$\begin{aligned} &75 \text{ g} \cdot (0,093 \text{ cal/g} \cdot \text{grd}) (T_{Cu} - 27^\circ\text{C}) = \\ &= (300 \text{ g} \cdot 0,12 \text{ cal/g} \cdot \text{grd} + 200 \text{ g} \cdot 1,0 \text{ cal/g} \cdot \text{grd}) \cdot (27^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

sau rezolvînd în raport cu T_{Cu}

$$T_{Cu} = 530^\circ\text{C}.$$

Ce aproximații, atât experimentale cît și teoretice, au fost folosite implicit pentru a ajunge la acest răspuns?

22-3. Căldurile molare ale solidelor

Din a doua coloană a tabelului 22-1 tragem concluzia că căldurile specifice ale solidelor variază mult de la un material la altul. O situație cu totul diferită apare însă dacă comparăm probe de materiale care conțin același număr de molecule în loc să comparăm probe care să aibă aceeași masă. Putem face aceasta exprimând căldurile specifice (astfel exprimate, ele se cheamă *călduri molare*) în cal/mol·grd în loc de cal/g·grd¹. În 1819 Dulong și Petit au arătat că căldurile molare ale tuturor substanțelor, cu mici excepții (vezi carbonul în tabela 22-1) au valori apropiate de 6 cal/mol·grd ($\approx 25 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$). Căldura molară, dată în a patra coloană a tabelului 22-1, se obține înmulțind căldura specifică (coloana a 2-a) cu masa molară (coloana a 3-a). Deci căldura necesară *unei molecule* pentru a mări temperatura unui solid cu o cantitate dată pare a fi aproximativ aceeași pentru aproape toate materialele. Aceasta este o dovadă izbitoare în sprijinul teoriei moleculare a substanței.

În realitate căldurile molare variază cu temperatura tinzând către zero atunci când $T \rightarrow 0 \text{ K}$, și tinzând către valoarea lui Dulong și Petit atunci când $T \rightarrow \infty$. Deoarece numărul moleculelor și nu tipul moleculei pare a fi important pentru determinarea căldurii necesare pentru a mări temperatura unui corp cu o cantitate dată, ne așteptăm ca căldurile molare ale diferitelor substanțe să varieze cu temperatura în aproape același mod. Figura 22-2 arată că în adevăr căldurile molare ale diferitelor substanțe pot fi făcute să se situeze pe o aceeași curbă

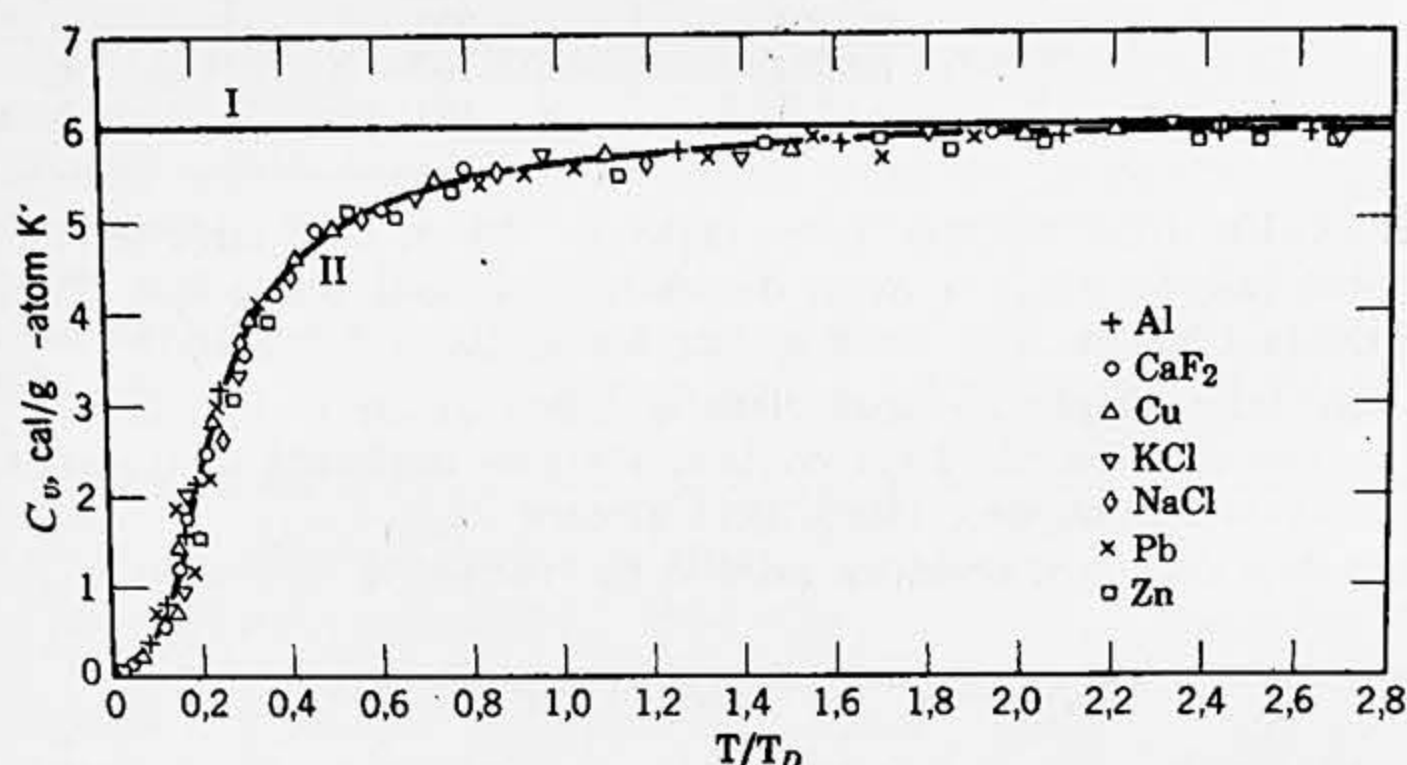


Figura 22-2. Căldurile molare (C_v) arătate numai pentru câteva puncte selectate. Linia I reprezintă regula lui Dulong și Petit, iar curba II reprezintă rezultatul teoriei lui Debye.

¹ Un mol de orice substanță este acea masă de substanță care conține un anumit număr de molecule și anume $6,02252 \cdot 10^{23}$, numit numărul lui Avogadro. Acest număr este rezultatul relației de definiție după care un mol de carbon (de fapt izotopul ¹²C) are o masă exact de 12 g. Masa molară M a unei substanțe este o mărime adimensională care exprimă numărul de grame pentru un mol din acea substanță. Astfel masa molară a oxigenului este 32,0 g/mol. Deși molul este o unitate de masă, nu putem să-l transformăm de exemplu în grame, pînă nu cunoaștem compoziția chimică a substanței; din acest motiv considerăm convenabil să folosim un simbol special (μ) pentru masele exprimate în moli.

printr-o simplă ajustare empirică a scării temperaturilor. Scara orizontală din figura 22-2 este raportul adimensional T/T_D unde T este temperatura Kelvin, iar T_D este o temperatură caracteristică, numită *temperatura lui Debye*, care are o valoare constantă, determinată pentru fiecare material. Pentru plumb T_D are valoarea empirică 88 K și pentru carbon $T_D = 1860$ K. Din aceste date studentul poate arăta că o valoare $T/T_D = 0,60$ de pe scară, corespunde lui $T = 53$ K pentru plumb și lui $T = 1120$ K pentru carbon. Invers, temperatura camerei (~ 300 K) corespunde lui $T/T_D = 3,4$ pentru plumb și lui $T/T_D = 0,16$ pentru carbon. Vedem astfel din figura 22-2 că în trecut, când erau disponibile doar căldurile specifice la temperatura camerei, plumbul se conforma legii lui Dulong și Petit, în timp ce carbonul părea a fi o excepție.

Linia dreaptă I din figura 22-2 reprezintă valoarea găsită de Dulong și Petit în 1819; ea concordă cu experiența la temperaturi înalte și este în discordanță cu experiența la temperaturi joase. Ea corespunde ipotezei că fiecare atom dintr-un solid vibrează în mod independent ca un oscilator clasic. Curba II se datorește lui Debye (1912). În teoria lui Debye se poate obține o temperatură caracteristică T_D , direct legată de o frecvență de vibrație caracteristică materialului, independent de experiențele asupra căldurii specifice. Se folosesc pentru acesta principiile cuantice pentru a analiza vibrațiile cuplate ale atomilor într-un solid și se obține o formulă a căldurii specifice care, exprimată prin raportul adimensional T/T_D , este aceeași pentru toate substanțele. Concordanța excelentă a acestei formule (curba II) cu experiența este un triumf al fizicii cuantice.¹

Materialele reprezentate în figura 22-2 sînt „normale”, prin aceea că ele nu se topesc, nu fierb, nu-și schimbă structura cristalină etc. în intervalul de temperatură indicat. Măsurătorile de căldură specifică care ne spun cum un solid absoarbe energie atunci cînd temperatura sa crește, constituie o metodă sensibilă de a detecta astfel de rearanjamente moleculare atomice sau electronice. Figura 22-3 de exemplu, arată căldura specifică a tantalului în vecinătatea lui 4,39 K. Sub

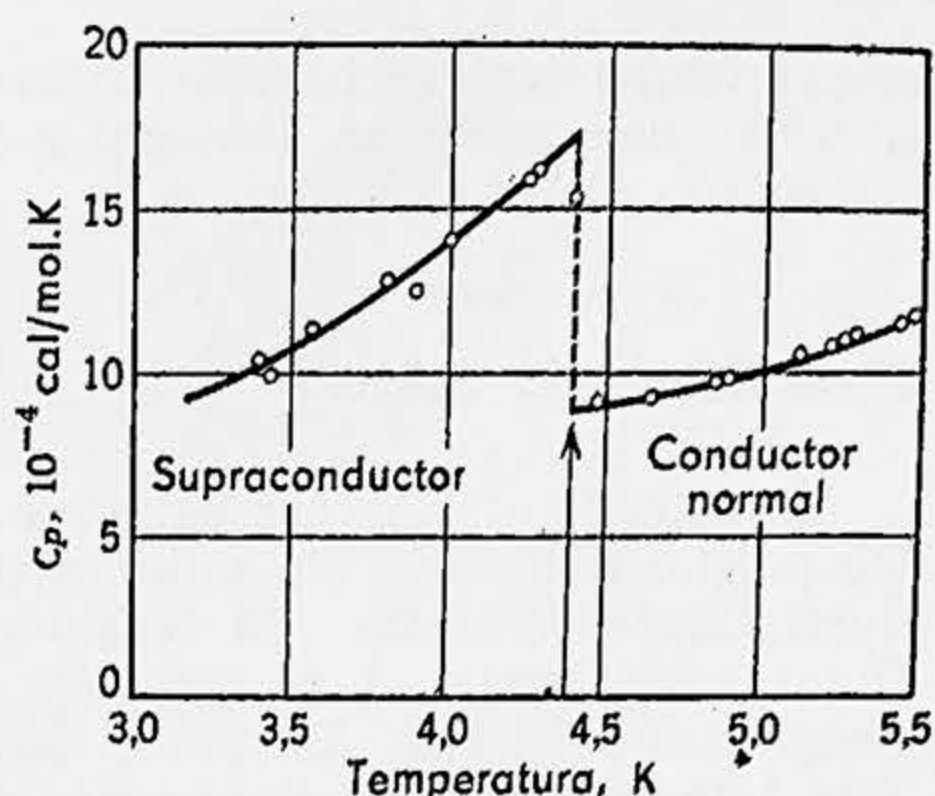


Figura 22-3. Căldura specifică a tantalului în vecinătatea temperaturii sale de tranziție în starea supraconductoare.

¹ Datele reprezentate în figura 22-2 sînt valorile lui C_p spre deosebire de cele din tabela 22-1 care sînt C_v . Primele sînt mai ușor de calculat teoretic deoarece dilatarea termică nu trebuie luată în considerație, în schimb (pentru solide) ultimele sînt mult mai ușor de măsurat. Cele două călduri specifice sînt legate prin formula termodinamică simplă

$$C_p = C_v + T\beta^2/k\rho$$

în care β este coeficientul termic al dilatării de volum, $k(-\Delta V/V \Delta p)$ este compresibilitatea (izotermă) și ρ este densitatea. La temperatura camerei diferența dintre C_p și C_v pentru solide tipice este de aproximativ 5%.

această temperatură de tranziție tantalul pierde complet rezistența sa electrică — el devine supraconductor. Deasupra acestei temperaturi el are rezistența la care ne așteptăm pentru un metal normal.

22-4. Conducția căldurii

Transferul de energie determinat de o diferență de temperatură între părțile adiacente ale unui corp se numește *conducția căldurii* (*conductibilitatea termică*). Să considerăm o placă de material cu aria secțiunii transversale A și grosimea Δx ale cărei fețe sînt menținute la temperaturi diferite. Măsurăm căldura ΔQ transferată perpendicular pe fețe într-un timp Δt . Experiența arată că ΔQ este proporțional cu Δt și cu aria secțiunii transversale A pentru o diferență de temperatură dată ΔT și că ΔQ este proporțional cu $\Delta T / \Delta x$ pentru un ΔT și A date, cu condiția ca acest ΔT cît și Δx să fie mici. Adică

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x} \text{ aproximativ.}$$

La limită, cînd placa are o grosime infinitesimală dx , pe care există o diferență de temperatură dT , obținem legea fundamentală a conducției de căldură (conductibilității termice)

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (22-4)$$

Aici dQ/dt este viteza de transfer a căldurii prin aria A , dT/dx este numit *gradient de temperatură*, iar k este o constantă de proporționalitate numită *conductivitate termică*. Alegem sensul transferului de căldură în sensul în care crește x ; deoarece transferul căldurii are loc în sensul descreșterii lui T , am introdus semnul minus în ecuația (22-4) (adică vrem ca dQ/dt să fie pozitiv atunci cînd dT/dx este negativ).

O substanță cu o conductivitate termică k mare este un bun conductor de căldură; o substanță cu o conductivitate termică k mică este un rău conductor de căldură sau un bun izolator termic. Valoarea lui k depinde de temperatură, crescînd ușor odată cu creșterea temperaturii, dar k poate fi luat practic constant peste tot într-o substanță, dacă diferența de temperatură între părțile materialului nu este prea mare. În tabela 22-2 dăm valorile lui k pentru diferite substanțe; vedem că metalele sînt în totalitate mai bune conductoare de căldură decît nemetalele și că gazele sînt rele conductoare de căldură.

Să aplicăm ecuația (22-4) unei tije, de lungime L și cu aria secțiunii transversale A , în care s-a atins o stare staționară (fig. 22-4). Într-o stare staționară temperatura în fiecare punct este constantă în timp. Prin urmare, dQ/dt este același în toate secțiunile (de ce?). Dar $dQ/dt = -kA(dT/dx)$, astfel încît pentru k și A constante, gradientul de temperatură dT/dx este același în toate secțiunile. Prin urmare, T descrește liniar de-a lungul tije astfel încît $-dT/dx = (T_2 - T_1)/L$. De aceea căldura ΔQ transferată în timpul Δt este

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA \frac{T_2 - T_1}{L}. \quad (22-5)$$

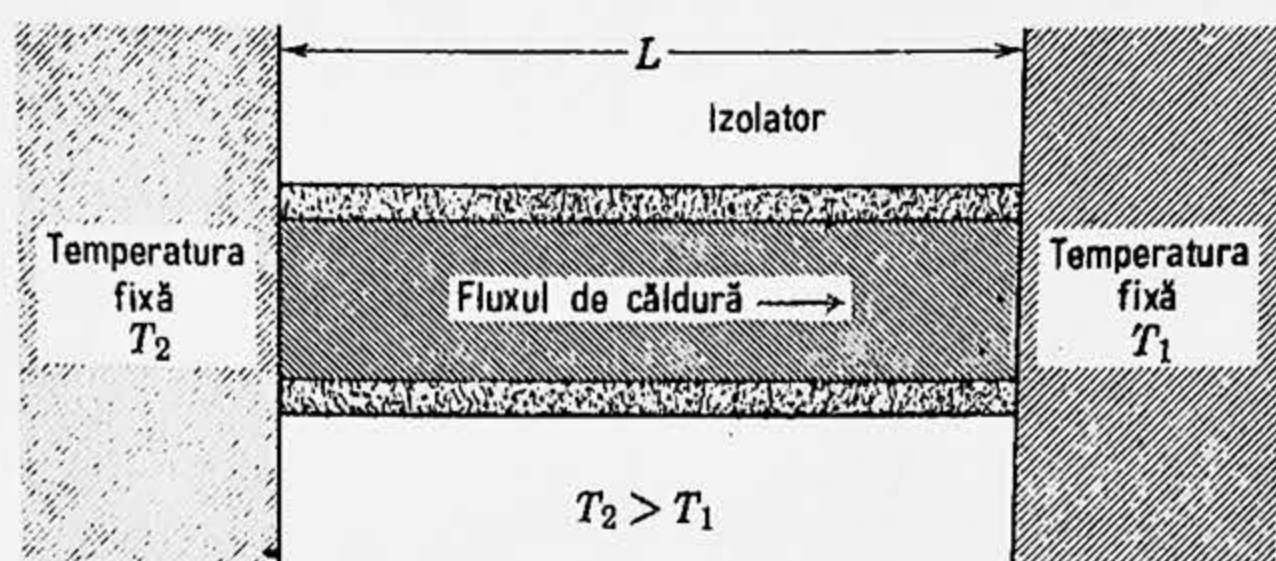


Figura 22-4. Conducția căldurii printr-o bară conductoare izolată.

Fenomenul conducției de căldură arată de asemenea că noțiunile de căldură și de temperatură sînt net diferite. Bare diferite avînd aceeași diferență de temperatură între capetele lor pot transmite cantități de căldură complet diferite în același timp.

Tabela 22-2

CONDUCTIVITĂȚI TERMICE, kcal/s·m·grd (GAZE LA 0°C; CELELALTE LA TEMPERATURA CAMEREI)

<i>Metale</i>		<i>Hidrogen</i>	$3,3 \cdot 10^{-5}$
Aluminiu	$4,9 \cdot 10^{-2}$	Oxygen	$5,6 \cdot 10^{-6}$
Alamă	$2,6 \cdot 10^{-2}$	<i>Altele</i>	
Cupru	$9,2 \cdot 10^{-2}$	Azbest	$2 \cdot 10^{-5}$
Plumb	$8,3 \cdot 10^{-3}$	Beton	$2 \cdot 10^{-4}$
Argint	$9,9 \cdot 10^{-2}$	Plută	$4 \cdot 10^{-5}$
Oțel	$1,1 \cdot 10^{-2}$	Sticlă	$2 \cdot 10^{-4}$
<i>Gaze</i>		Gheață	$4 \cdot 10^{-4}$
Aer	$5,7 \cdot 10^{-6}$	Lemn	$2 \cdot 10^{-5}$

Exemplul 2. Să considerăm o placă compusă, constînd din două materiale avînd grosimi diferite, L_1 și L_2 , și conductivități termice diferite k_1 și k_2 . Dacă temperaturile pe suprafețele exterioare sînt T_2 și T_1 , să se afle viteza de transmisie a căldurii prin placa compusă (fig. 22-5) într-o stare staționară.

Fie T_x temperatura la interfața dintre cele două materiale. Atunci

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{k_2 A (T_2 - T_x)}{L_2}$$

și

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$

Într-o stare staționară $\Delta Q_1/\Delta t = \Delta Q_2/\Delta t$, astfel încît

$$\frac{k_2 A (T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{L_1}$$

Fie $\Delta Q/\Delta t$ viteza de transmisie a căldurii (aceeași pentru toate secțiunile). Atunci, rezolvînd în raport cu T_x și introducînd în fiecare din aceste ecuații, obținem

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A (T_2 - T_1)}{L_1/k_1 + L_2/k_2}$$

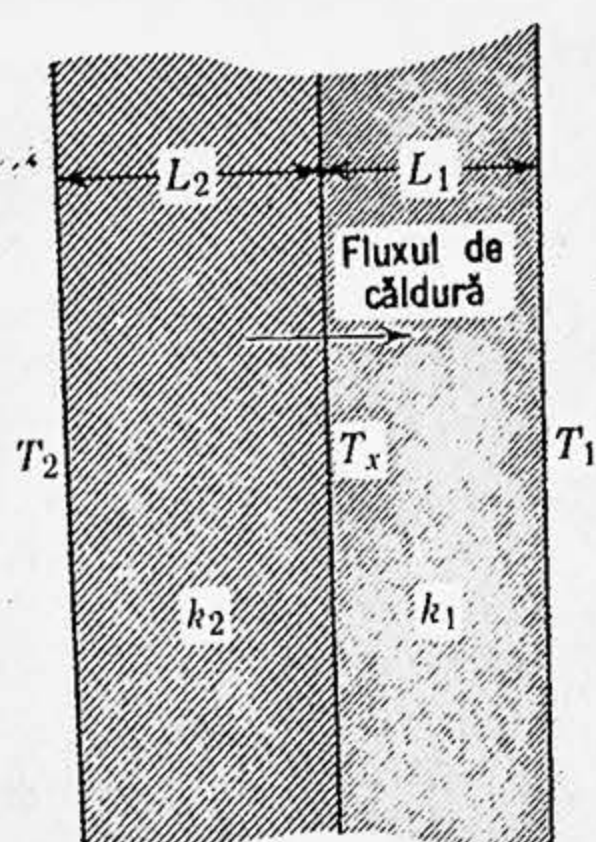


Figura 22-5. Exemplul 2. Transmisia căldurii prin două straturi de substanță cu conductivități termice diferite.

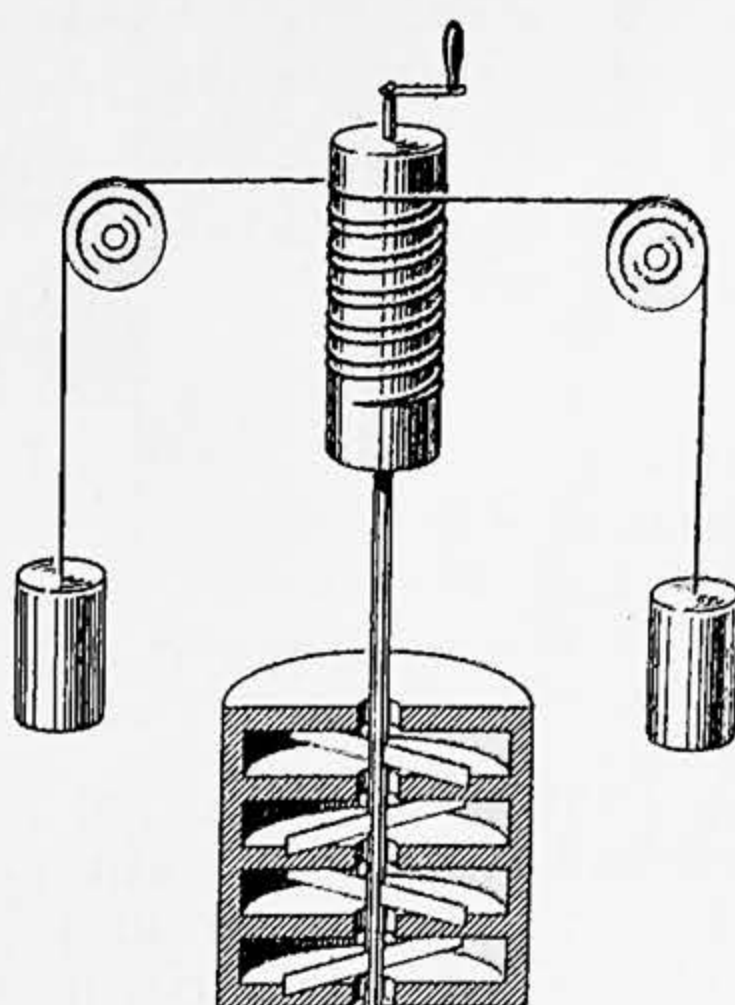


Figura 22-6. Dispozitivul lui Joule pentru măsurarea echivalentului mecanic al căldurii. Corpurile care cad învârtesc paletel care amestecă apa din vas, ridicînd astfel temperatura acesteia.

Generalizarea pentru un număr oarecare de secțiuni în serie este evidentă:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A (T_2 - T_1)}{\sum L_i / k_i} ,$$

22-5. Echivalentul mecanic al căldurii

Dacă căldura nu este nimic altceva decît o altă formă de energie, orice unitate de energie ar putea fi și unitate de căldură. Caloria s-a născut înainte de a fi acceptată în general ideea că căldura este energie. Joule a fost primul care a măsurat cu grijă echivalentul în energia mecanică al energiei termice, adică numărul de jouli echivalent cu 1 calorie. Raportul dintre „unitatea de căldură” și „unitatea mecanică” de energie poate fi găsit din experiențe în care o cantitate măsurată de energie mecanică este transformată complet într-o cantitate măsurată de căldură. Joule a folosit inițial un aparat în care niște corpuri în cădere roteau o serie de palete într-un vas cu apă (fig. 22-6). Pierderea de energie mecanică a fost calculată cunoscîndu-se greutatea corpurilor și înălțimile de la care cădeau ele, iar cîștigul de energie calorică a fost calculat prin determinarea masei echivalente a apei și a creșterii sale de temperatură. Joule vroia să arate că aceeași cantitate de energie termică se obține dintr-un lucru mecanic cheltuit, dat, indiferent de metoda folosită pentru a produce lucrul mecanic. El a produs căldură prin agitarea mercurului, prin frecarea unor inele de fier într-o baie de

mercur, prin convertirea energiei electrice în căldură într-o sîrmă cufundată în apă și în alte moduri. De fiecare dată constanta de proporționalitate dintre căldura produsă și lucrul mecanic efectuat se încadra în eroarea experimentală de 5%. Joule nu avea la dispoziție termometrele de astăzi etalonate cu mare precizie, și nici nu putea face corecții sigure pentru pierderile de căldură ale sistemului așa cum se poate face astăzi. Experiențele sale de pionerat sînt remarcabile nu numai pentru măiestria și ingeniozitatea pe care le-a dovedit, ci și pentru influența pe care ele au avut-o în a convinge pe oamenii de știință de peste tot de corectitudinea conceptului privind căldura ca o formă de energie.

Rezultatele astăzi acceptate¹ (vezi anexa A pentru valori mai precise) sînt

$$1 \text{ kcal} = 1\,000 \text{ kal} = 4\,186 \text{ J},$$

adică 4 186 J de energie mecanică, transformate fiind în căldură, vor mări temperatura unui kilogram de apă de la 14,5°C pînă la 15,5°C.

În calorimetria modernă căldura este aproape totdeauna măsurată cu ajutorul energiei electrice transferată unei băi de apă prin trecerea unui curent printr-un rezistor care este cufundat în baie; ea este rar măsurată pe baza observării creșterii de temperatură a unei băi de apă. Astfel, unitatea practică logică de căldură este joule-ul (1 J este 1 W·s) și aceasta a fost într-adevăr adoptată ca unitate acceptată internațional pentru căldură de către cea de-a 9-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți (1948). În adevăr, în practica modernă de laborator caloria (sau kilocaloria) nu mai este folosită sau necesară. Ea este însă adînc înrădăcinată în literatura științifică. Pentru a permite folosirea în continuare a acestei unități familiare — dar pentru a recunoaște importanța practică a joule-ului — a fost definită o nouă kilocalorie — *kilocaloria termochimică*:

$$1 \text{ kcal (termochimică)} = 4\,184,0 \text{ J (exact)}.$$

În practica obișnuită de laborator această kilocalorie nu diferă sensibil de cea definită anterior.

22-6. Căldura și lucrul mecanic

Am văzut, *căldura este energia transmisă de la un corp la altul datorită unei diferențe de temperatură între ele*. Ideea privitoare la căldură ca ceva care se găsește într-un corp, așa cum presupunea teoria caloricului, contrazice multe fapte experimentale. Ea există numai în măsura în care ea se transmite, datorită unei diferențe de temperatură, și atunci energia se numește energie calorică (termică). Dacă căldura ar fi o substanță (fluid) sau un anumit tip de energie care să-și mențină identitatea atunci cînd este conținută într-un sistem, nu ar fi posibil de evacuat căldură indefinit dintr-un sistem care nu se schimbă. Totuși,

¹ Henry A. Rowland a efectuat în 1879 o determinare îngrijită a echivalențului mecanic al căldurii care rămîne pînă astăzi un model de experiență îngrijită. Rezultatul său diferă de valoarea acceptată astăzi numai cu 1 la 2 000. Rowland a absolvit Institutul Politehnic din Rensselaer în 1870 și a devenit în 1876 primul profesor de fizică al Universității nou înființată Johns Hopkins, unde el a condus această experiență. Vezi „The Education of an American Scientist, Henry A. Rowland” de Samuel Rezneck, *American Journal of Physics*, februarie 1960.

Rumford a arătat că aceasta era posibil. În adevăr, efectuând continuu lucru mecanic în aparatul lui Joule, putem obține o cantitate infinită de căldură în afara apei, legând-o de un sistem de răcire, de exemplu, fără a schimba condițiile apei.

În același mod lucrul mecanic nu este ceva pe care să-l conțină un sistem într-o cantitate definită. Putem introduce o cantitate indefinită de lucru mecanic într-un sistem fără a-i schimba starea, așa cum din nou ilustrează aparatul lui Joule. Lucrul mecanic, la fel ca și căldura, implică un transfer de energie. În mecanică, lucrul mecanic este implicat în schimburile de energie în care temperatura nu joacă nici un rol.

Dacă energia termică este transmisă datorită unor diferențe de temperatură, putem distinge căldura de lucrul mecanic definind *lucrul mecanic ca energia care este transmisă de la un sistem la altul astfel încât nu este implicată direct vreo diferență de temperatură*. Această definiție este în concordanță cu folosirea anterioară a acestui termen. Adică în expresia $dW = Fdx$, forța F poate proveni de la surse electrice, magnetice, gravitaționale și altele. Termenul de lucru mecanic include toate aceste procese de schimb de energie, dar el exclude în mod expres schimbul de energie care provine din diferențe de temperatură.

Să considerăm un alt exemplu simplu, acela al frecării a două suprafețe între ele. Nu există nici o limită pentru căldura care poate fi îndepărtată din acest sistem sau pentru lucrul mecanic care poate fi efectuat asupra lui, astfel încât nu există un sens definit pentru următoarele fraze: „căldura dintr-un sistem” sau „lucrul mecanic din sistem”. Cantitățile Q și W nu sînt caracteristici ale stării (de echilibru) unui sistem, ci ale *procesului termodinamic* prin care sistemul trece de la o stare de echilibru la alta, interacționînd cu mediul său. Numai în decursul unui astfel de proces putem da sens mărimilor căldură și lucru mecanic; putem atunci identifica pe Q cu căldura transmisă către sau de la sistem și pe W cu lucrul mecanic efectuat asupra sau de către sistem. Studiul unor astfel de procese și al schimbărilor de energie implicate în efectuarea lucrului mecanic și a schimbului de căldură constituie obiectul *termodinicii*.

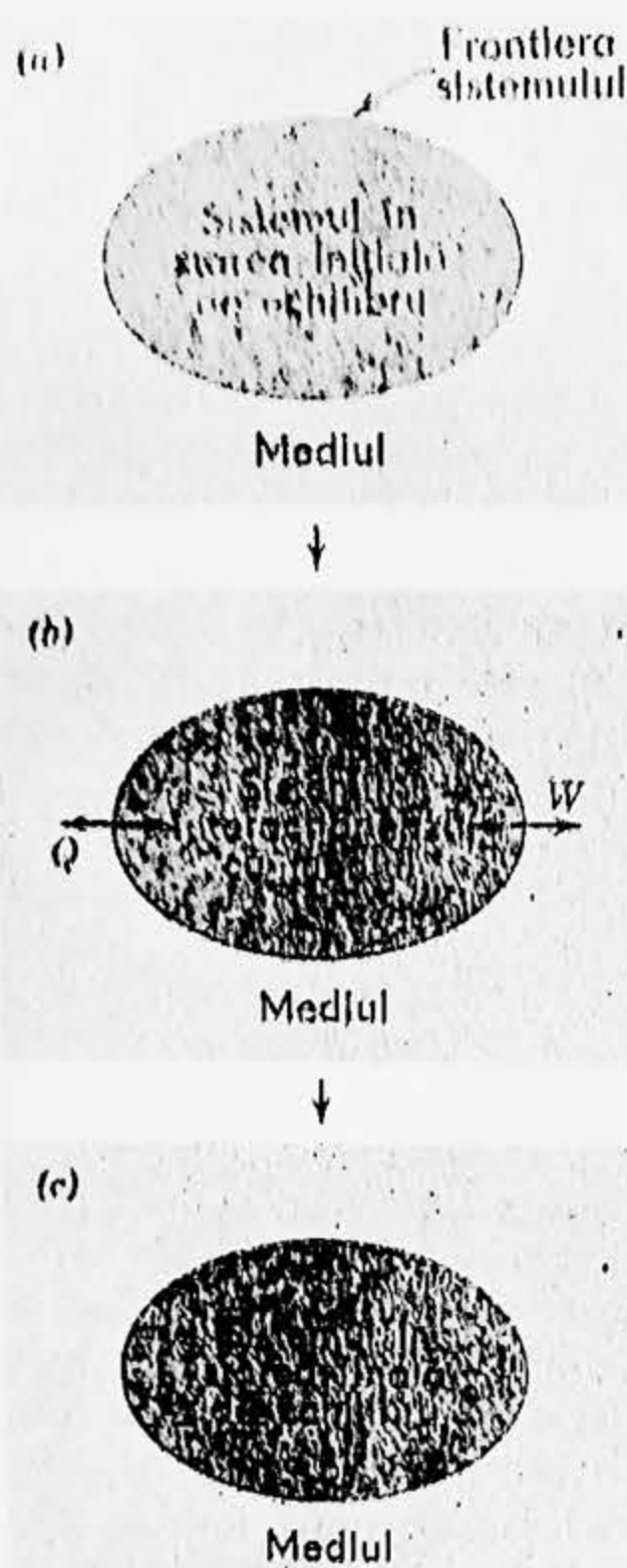


Figura 22-7. (a) Un sistem în starea inițială, în echilibru cu mediul său înconjurător. (b) Un proces termodinamic în timpul căruia sistemul poate schimba căldura Q sau lucrul mecanic W cu mediul său. (c) O stare de echilibru finală atinsă la sfârșitul procesului.

În figura 22-7 considerăm un proces termodinamic general. Trebuie mai întâi să formulăm precis care este sistemul și care este mediul său înconjurător. În figură am trasat o suprafață închisă care înconjură sistemul pentru a-l defini. În (a) sistemul este în *starea sa inițială*, în echilibru cu mediul său exterior. În (b) sistemul interacționează cu mediul său printr-un proces termodinamic specific. În timpul acestui proces se poate face un schimb de energie sub formă de căldură și (sau) lucru mecanic între sistem și mediul înconjurător. Săgețile care reprezintă schimbul de Q sau W străpung suprafața care închide sistemul. În (c) sistemul a atins *starea sa finală*, din nou în echilibru cu mediul său exterior.

Figura 22-8 arată un corp care cade și rotește un generator, care la rândul său trimite un curent electric printr-un rezistor cufundat într-un vas cu apă. Să alegem drept sistem generatorul și circuitul electric atașat, apa și vasul. Atunci mediul înconjurător este format din corp și Pământul care îl atrage. Procesul constă în căderea liberă a corpului pe o distanță h în câmpul gravitațional terestru. În timpul acestui proces mediul (prin intermediul firului) efectuează un lucru mecanic W asupra sistemului. Nu există vreo diferență de temperatură între sistem și mediul său exterior, și deci $Q=0$ pentru acest proces.

Alegerea sistemului în problemele de termodinamică este arbitrară. Să alegem acum drept sistem numai apa și vasul său din figura 22-8. Mediul va fi acum format din generatorul cu circuitul electric, precum și din corp și Pământ. Pentru această alegere a sistemului, există acum o diferență de temperatură între mediu (rezistor) și sistem (apă) și în timpul procesului căldura Q va fi transmisă sistemului. Nu acționează însă nici un fel de forțe prin frontiera sistemului pentru a produce deplasări și deci $W=0$ pentru acest proces. Acest exemplu arată că în primul rând trebuie să precizăm bine care este sistemul și care este mediul său înconjurător înainte de a putea decide dacă variația stării sistemului se datorește unei transmisii de căldură sau efectuării de lucru mecanic sau ambelor. Va exista un schimb sau transfer de căldură între sistem și mediu numai dacă există o diferență de temperatură prin frontieră sistemului; dacă nu există nici o diferență de temperatură schimbul de energie implică numai lucrul mecanic.

Să calculăm acum Q și W pentru un anumit proces termodinamic. Considerăm deci un gaz aflat într-un vas cilindric prevăzut cu un piston mobil. Fie gazul sistemul nostru. Inițial el este în echilibru cu mediul exterior (care este format din rezervorul de căldură și din piston, arătate în fig. 22-9) și are o presiune p_i și un volum V_i . Putem considera că pereții vasului constituie frontiera sistemului. Căldura poate fi transmisă spre sistem sau dinspre sistem prin fundul cilindrului și lucrul mecanic poate fi efectuat asupra sistemului sau de către sistem prin comprimarea sau respectiv destinderea gazului, cu ajutorul pistonului. Să considerăm un proces în care sistemul interacționează cu mediul său înconjurător și atinge o stare finală de echilibru caracterizată de o presiune p_f și un volum V_f .

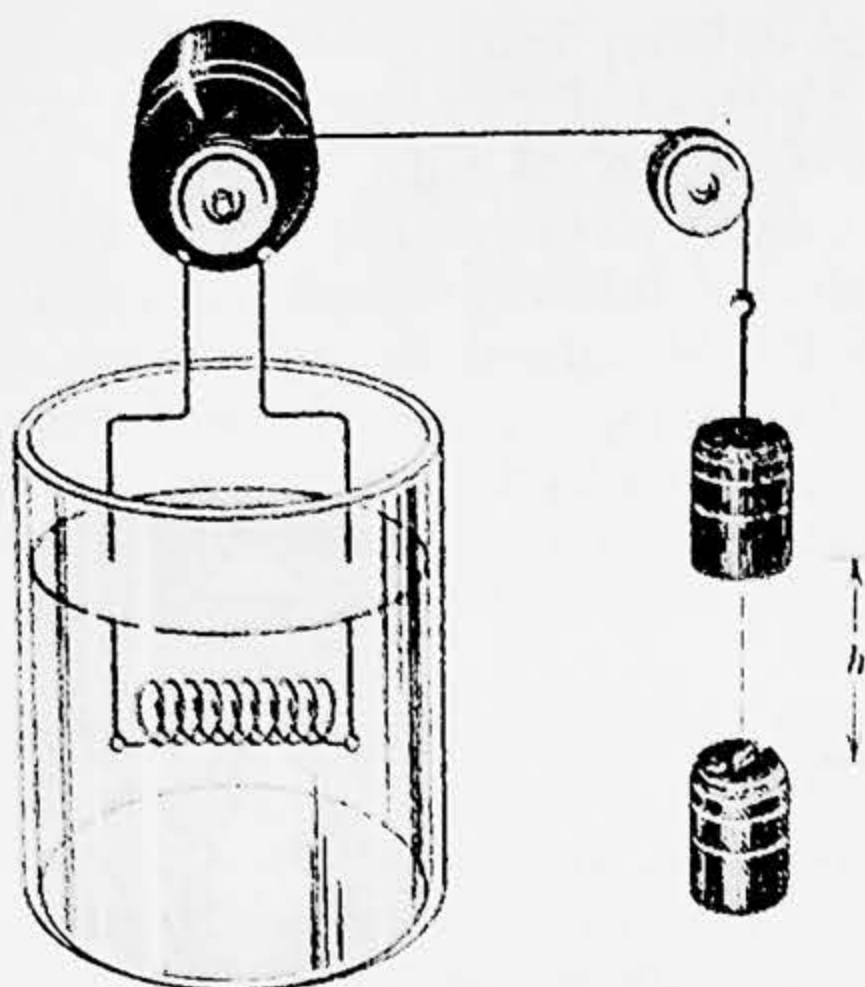
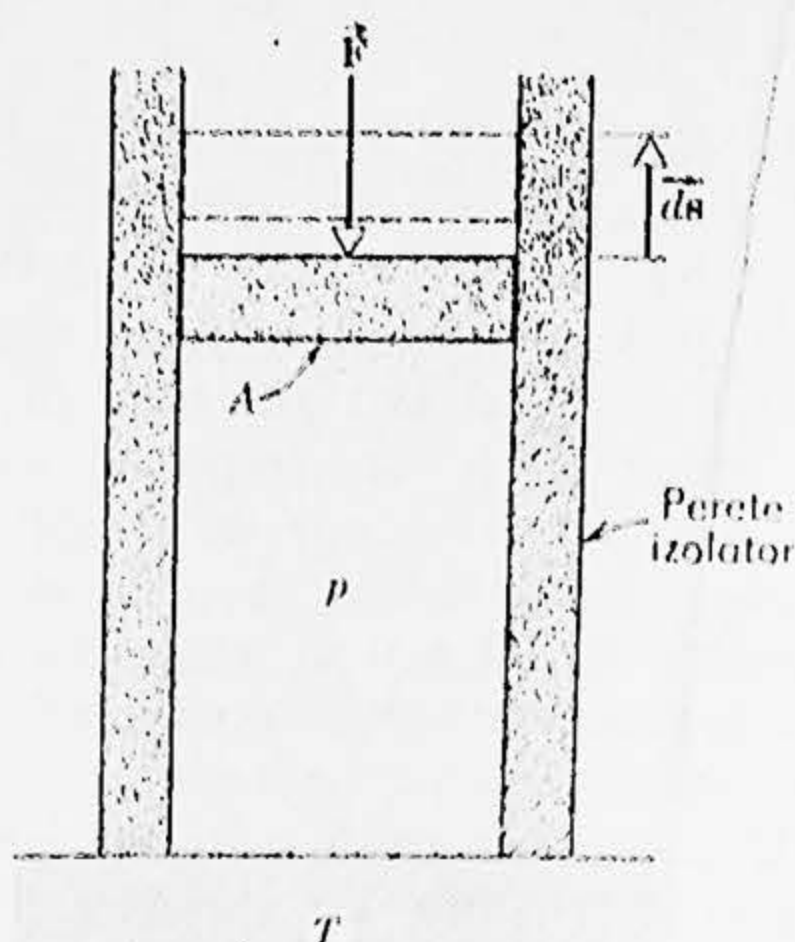


Figura 22-8. Căldura și lucrul mecanic. Un corp în cădere efectuează lucru mecanic asupra unui generator electric care trimite curent printr-un rezistor ce încălzește apa în care el este cufundat.



Rezervor de căldură cu temperatura controlabilă T

Figura 22-9. Lucrul mecanic este efectuat de către gazul aflat la presiunea p atunci când el se destinde. Sistemul poate schimba căldura cu rezervorul de căldură pe care este așezat cilindrul.

În figura 22-9 se arată destinderea unui gaz. Lucrul mecanic efectuat de gaz pentru deplasarea pistonului pe o distanță infinitesimală ds este

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = pA \, ds = p dV$$

unde dV este variația diferențială a volumului gazului. În general, presiunea nu va fi constantă în timpul deplasării. Pentru a obține lucrul mecanic total W efectuat asupra pistonului de către gaz într-o deplasare finită, trebuie să cunoaștem modul cum variază p cu deplasarea. Atunci putem calcula integrala

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p dV$$

pe intervalul de variație a volumului. Această integrală poate fi evaluată grafic ca fiind aria de sub curbă într-o diagramă p - V așa cum se arată într-un caz particular în figura 22-10.

Există mai multe căi, diferite, prin care sistemul poate fi adus de la starea inițială i la starea finală f . De exemplu (fig. 22-11) presiunea poate fi menținută constantă de la i la a și apoi volumul poate fi menținut constant de la a la f . Atunci lucrul mecanic efectuat de către gazul care se destinde este egal cu aria de sub linia if . O altă posibilitate este drumul ibf în care caz lucrul mecanic efectuat de către gaz este egal

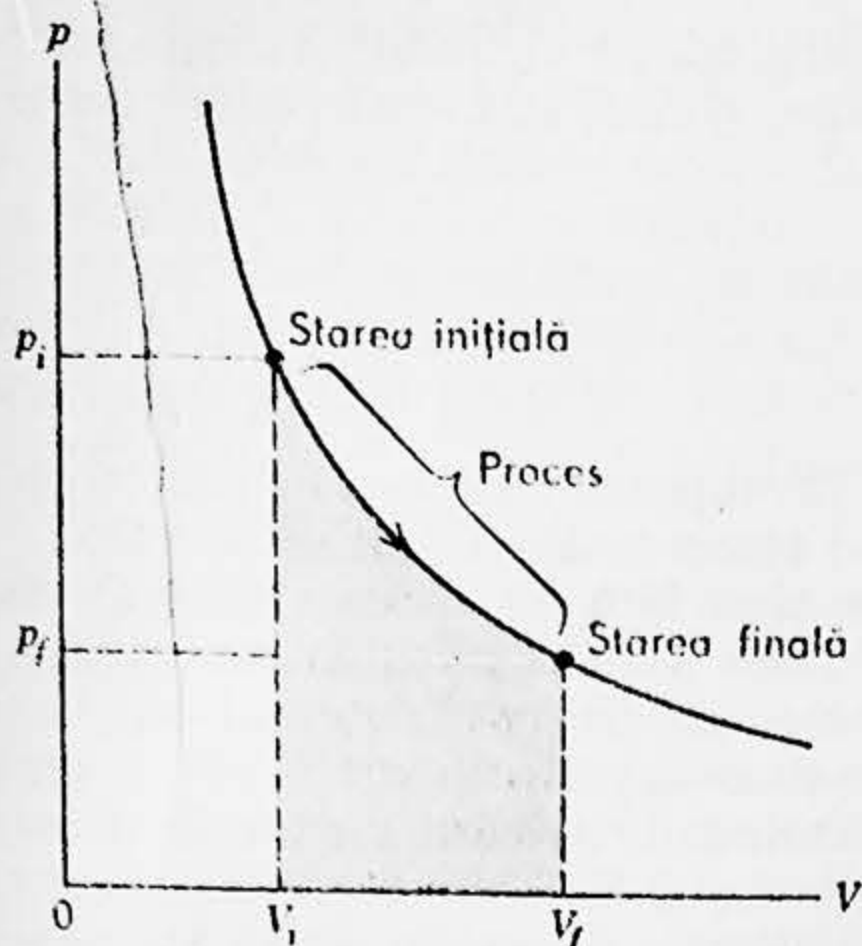


Figura 22-10. Lucrul mecanic efectuat de un gaz este egal cu aria de sub curba procesului în diagrama p - V .

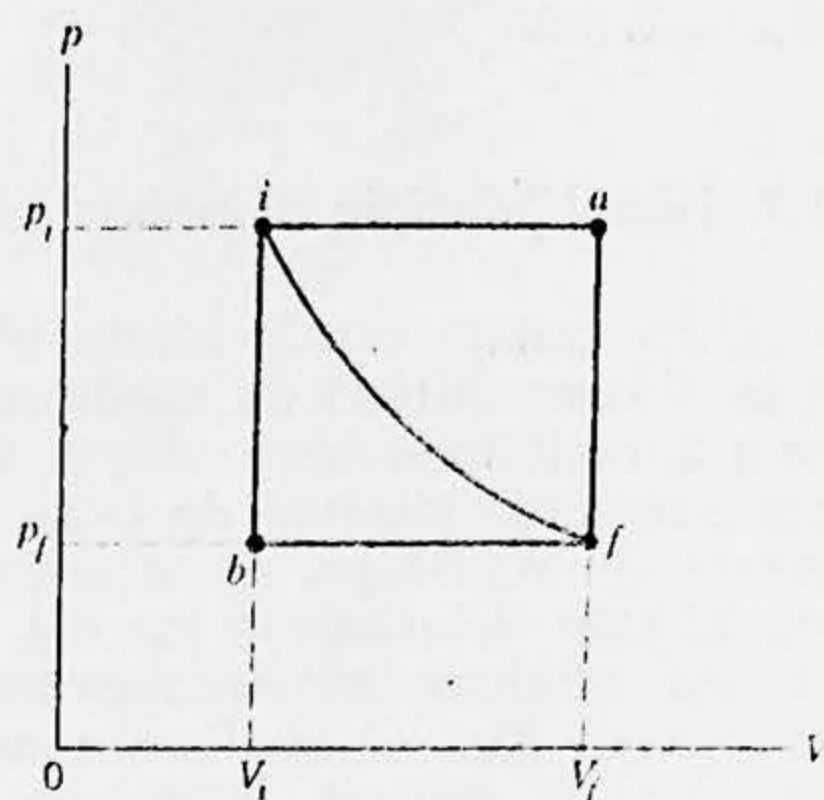


Figura 22-11. Lucrul mecanic efectuat de un sistem depinde nu numai de starea inițială (i) și starea finală (f), ci și de drumul intermediar urmat.

cu aria de sub linia bf . Curba continuă de la i la f este un alt drum posibil în care lucrul mecanic efectuat de gaz este iarăși diferit de cele două drumuri precedente. Putem vedea astfel că *lucrul mecanic efectuat de un sistem depinde nu numai de starea sa inițială și starea sa finală, ci și de stările intermediare adică de drumul urmat în timpul procesului.*

Un rezultat analog reiese dacă calculăm căldura absorbită în timpul procesului. Starea i este caracterizată de o temperatură T_i , iar starea f de o temperatură T_f . Căldura absorbită de sistem, de exemplu, depinde de felul în care este încălzit sistemul. Îl putem încălzi la o presiune constantă p_i , de exemplu, pînă cînd atingem temperatura T_f și apoi să schimbăm presiunea la temperatura constantă pînă la valoarea finală p_f . Sau putem mai întîi să coborîm presiunea pînă la p_f și apoi să-l încălzim la această presiune pînă la temperatura finală T_f . Sau putem urma multe alte drumuri. Fiecare drum dă un rezultat diferit pentru căldura absorbită de sistem. Prin urmare, *căldura pierdută sau cîștigată de un sistem depinde nu numai de starea inițială și cea finală, ci și de stările intermediare, adică de drumul urmat în timpul procesului.* Acesta este un fapt experimental. După cum a scris J. C. Slater:

„....Ar fi plăcut să putem spune că într-o stare dată sistemul posedă atîta sau atîta energie termică. Plecînd de la zero absolut al temperaturii, unde am putea spune că energia termică este zero, am putea încălzi corpul pînă la starea care ne interesează, am putea calcula $\int dQ$ de la zero absolut pînă la acea stare și am putea numi aceasta energie termică. Dar rămîne faptul îndărătnic, acela că am obține răspunsuri diferite dacă am încălzi în moduri diferite... Nu avem nimic altceva de făcut“.

Atît căldura cît și lucrul mecanic „depind de drumul” urmat. Nici unul din ele nu este independent de drum și nici unul nu poate fi observat singur.

22-7. Primul principiu al termodinamicii

Acum, putem corela aceste idei. Să presupunem că un sistem trece de la o stare inițială de echilibru i la o stare finală de echilibru f într-un anumit mod bine definit. Căldura absorbită de sistem fiind Q și lucrul mecanic efectuat de către sistem fiind W . Să calculăm acum diferența $Q-W$. Să pornim acum din nou și să trecem sistemul de la aceeași stare i la aceeași stare f , dar de data aceasta în alt mod pe un alt drum. Putem face aceasta mereu, folosind de fiecare dată alte drumuri. Vom găsi că în fiecare caz cantitatea $Q-W$ este aceeași. Adică, deși Q și W separat depind de drumul urmat, diferența $Q-W$ nu depinde deloc de felul cum sistemul trece de la starea i la starea f ci numai de starea inițială și starea finală (de echilibru). Studentul își va reaminti de la mecanică că, atunci cînd un obiect se mișcă dintr-un punct inițial i pînă la un punct final f într-un cîmp gravitațional în absența frecărilor, lucrul mecanic efectuat depinde numai de pozițiile celor două puncte și nu depinde deloc de drumul pe care se mișcă corpul. De aici tragem concluzia că există o funcție de coordonatele spațiale ale corpului a cărei valoare finală minus valoarea inițială este egală cu lucrul mecanic efectuat în deplasarea corpului. Am numit această funcție energie potențială. Acum în termodinamică, găsim că, atunci cînd un sistem a trecut de la starea i la starea f , cantitatea $Q-W$ depinde numai de coordonatele inițiale și finale și nu depinde deloc de drumul urmat între aceste puncte extreme. Tragem concluzia că există o funcție de coordonatele termodinamice a cărei valoare finală minus valoarea inițială este egală cu variația $Q-W$ în acel proces. Numim această funcție *energie internă*.

Dar Q este energia comunicată sistemului prin transferul (schimbul) de căldură și W este energia cedată de sistem prin efectuare de lucru mecanic, astfel încît diferența $Q-W$ reprezintă, prin definiție, *variația energiei interne a sistemului*. Să notăm energia internă cu litera U . Atunci energia internă a sistemului în starea f , U_f , minus energia internă a sistemului în starea i , U_i , nu reprezintă decît *variația energiei interne a sistemului* și această cantitate are o valoare bine definită independentă de modul cum sistemul a trecut din starea i în starea f . Avem

$$U_f - U_i = \Delta U = Q - W. \quad (22-6)$$

La fel ca pentru energia potențială, tot astfel și pentru energia internă nu contează decît variația ei. Dacă se alege o valoare arbitrară pentru energia internă într-o anumită stare de referință standard, valoarea sa în oricare altă stare va avea o valoare bine definită. Ecuația (22-6) este cunoscută sub numele de *primul principiu al termodinamicii*. În aplicarea ecuației (22-6) trebuie să nu uităm că Q este considerat pozitiv

atunci cînd sistemul primește căldură și W este pozitiv atunci cînd sistemul este cel care efectuează lucrul mecanic.

Dacă sistemul nostru suferă numai o variație infinitesimală a stării, va fi absorbită doar o cantitate infinitesimală de căldură dQ și va fi efectuată doar o cantitate infinitesimală de lucru mecanic dW , astfel încît variația energiei interne dU este de asemenea infinitesimală. În acest caz, primul principiu se scrie sub formă diferențială¹ astfel:

$$dU = dQ - dW. \quad (22-7)$$

Putem exprima primul principiu în cuvinte astfel: *Orice sistem termodinamic într-o stare de echilibru posedă o variabilă de stare numită energie internă U a cărei variație dU într-un proces diferențial este dată de ecuația (22-7).* Reamintim, că conținutul esențial al principiului zero al termodinamicii (pag. 557) este, vorbind liber: există o mărime termodinamică utilă numită „temperatură”. Conținutul esențial al primului principiu este: există o mărime termodinamică utilă numită „energie internă”; principiul oferă de asemenea, prin ecuația (22-6), o metodă pentru măsurarea cantitativă a variațiilor energiei interne.

Primul principiu al termodinamicii se aplică oricărui proces din natură care are loc între stări de echilibru. Observăm că *procesul* poate cuprinde sau nu stări de echilibru. Putem aplica primul principiu la explozia unei pocnitori într-o țevă de oțel izolată, de exemplu. Datorită generalității sale, informația pe care o dă primul principiu este departe de a fi completă, deși este exactă și corectă. Există unele chestiuni foarte generale la care el nu poate răspunde. De exemplu, deși el ne spune că energia se conservă în orice proces, el nu ne spune dacă un anumit proces particular se poate sau nu produce în adevăr. O generalizare cu totul diferită, numită al doilea principiu al termodinamicii, ne dă această informație și o mare parte din domeniul termodinamicii depinde de acest al doilea principiu (capitolul 25).

22-8. Unele aplicații ale primului principiu al termodinamicii

Am văzut că atunci cînd un gaz se destinde, lucrul mecanic efectuat de el asupra mediului înconjurător este

$$W = \int p dV,$$

unde p este presiunea exercitată asupra gazului sau de către gaz și dV este variația infinitesimală a volumului gazului. Să considerăm un caz particular în care presiunea rămîne constantă în timp ce volumul variază cu o cantitate finită, să zicem de la V_i la V_f . Atunci.

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) \text{ (presiune constantă).}$$

¹ W și Q nu sînt funcții adevărate de starea unui sistem, adică ele nu depind de valorile coordonatelor sistemului. Prin urmare, dW și dQ nu sînt diferențiale exacte după cum se spune în matematică. Tot ceea ce înseamnă ele aici este doar o cantitate mică. În alte cărți cu un nivel mai avansat, ele sînt scrise sub forma dQ și dW pentru a indica natura lor inexactă. Pe de altă parte, dU este o diferențială exactă, deoarece U este o funcție exactă de coordonatele sistemului.

Contact fără frecări
și fără scăpări
de gaz

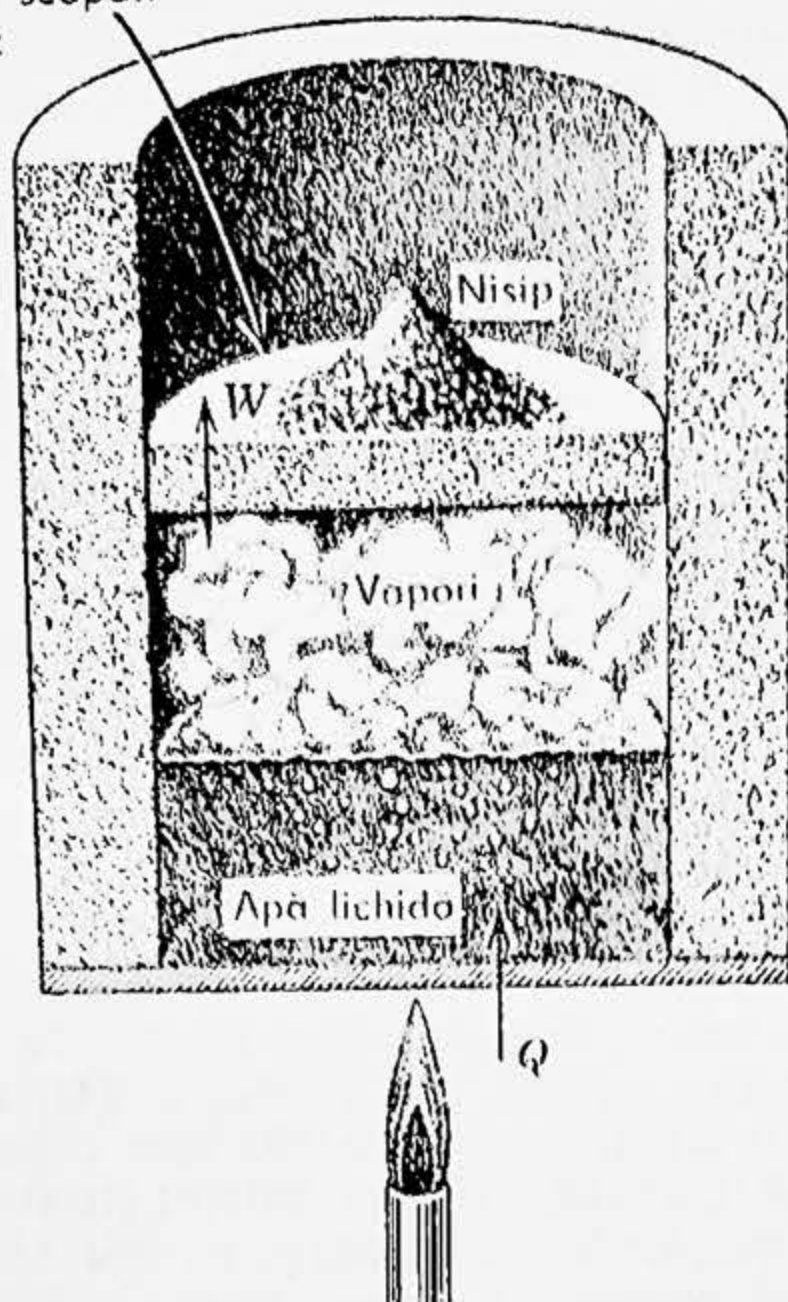


Figura 22-12. Apa care fierbe la presiune constantă (izobar). Presiunea este menținută constantă cu ajutorul nisipului și a pistonului.

Un proces care are loc la presiune constantă se numește un proces izobar. De exemplu, apa este încălzită în boilerul unei mașini cu abur pînă la punctul său de fierbere și este vaporizată, apoi vaporii sînt supraîncălziți, toate procesele producîndu-se la o presiune constantă.

În figura 22-12 se arată un proces izobar. Sistemul este H_2O într-un vas cilindric. Un piston fără frecări și fără scăpări de gaz este încărcat cu nisip pentru a produce presiunea dorită asupra apei și a o menține automat. Căldura poate fi transferată de la mediul exterior înconjurător către sistem cu ajutorul unui bec Bunsen. Dacă procesul continuă suficient de mult timp, apa va fierbe și o parte va fi transformată în vaporii; presupunem că așa se întîmplă. Sistemul se poate destinde, foarte încet (cuasistatic) dar presiunea pe care el o exercită asupra pistonului este automat mereu aceeași, deoarece această presiune trebuie să fie egală cu presiunea constantă pe care pistonul o exercită asupra sistemului. Dacă blo-

căm pistonul astfel încît el să nu se poată mișca sau dacă adăugăm sau îndepărtăm o parte din nisip în timpul procesului de încălzire, procesul nu va mai fi izobar.

Să considerăm procesul de fierbere. Știm că substanțele își schimbă faza din lichid în vaporii la valori bine definite ale presiunii și temperaturii. Apa fierbe de exemplu la $100^\circ C$ și presiune atmosferică normală. Pentru ca un sistem să sufere o schimbare de fază trebuie ca o cantitate de căldură să fie comunicată sistemului sau evacuată din sistem, cu totul diferită de căldura necesară pentru a aduce temperatura sa la valoarea dorită. Să considerăm schimbarea de fază a unei mase m de lichid în vaporii care se produce la o temperatură și presiune constante. Fie V_l volumul lichidului și V_v volumul vaporilor. Lucrul mecanic efectuat de această substanță în destinderea de la V_l la V_v la presiune constantă este

$$W = p(V_v - V_l).$$

Fie L căldura de vaporizare, adică căldura necesară unității de masă pentru a transforma o substanță din lichid în vaporii la temperatură și

presiune constantă. Atunci căldura absorbită de masa m în timpul schimbării de stare este

$$Q = mL.$$

Din primul principiu al termodinamicii avem

$$\Delta U = Q - W$$

astfel încît

$$\Delta U = mL - p(V_0 - V_1)$$

pentru acest proces.

Exemplul 3. La presiunea atmosferică normală 1,00 g de apă avînd un volum de 1,00 cm³, se transformă în 1 671 cm³ de vapori după fierbere. Căldura de vaporizare a apei este de 539 cal/g la 1 atm. Prin urmare, dacă $m = 1,00$ g,

$$Q = mL = 539 \text{ cal.}$$

Această cantitate, care reprezintă căldura comunicată sistemului de către mediu, este pozitivă.

$$W = p(V_0 - V_1) = (1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2) (1\,671 - 1) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 169,5 \text{ J.}$$

Această cantitate, care reprezintă lucrul mecanic efectuat de către sistem asupra mediului, este pozitivă.

Deoarece 1 cal este egal cu 4,186 J, rezultă $W = 41$ cal.

Atunci

$$\Delta U = U_0 - U_1 = mL - p(V_0 - V_1) = (539 - 41) \text{ cal} = 498 \text{ cal.}$$

Această cantitate este pozitivă; energia internă a sistemului crește în timpul procesului. Prin urmare, din cei 539 cal necesari pentru a vaporiza 1 g de apă (la 100°C și 1 atm), 41 cal reprezintă lucrul mecanic exterior de destindere și 498 cal constituie energia internă comunicată sistemului. Această energie reprezintă lucrul mecanic intern efectuat împotriva (pentru învingerea) atracției puternice a moleculelor H₂O unele de către altele în starea lichidă.

Cum vă așteptați ca cei 80 cal necesari pentru a topi 1 g de gheață la 0°C și 1 atm să se împartă între lucrul mecanic extern și energia internă?

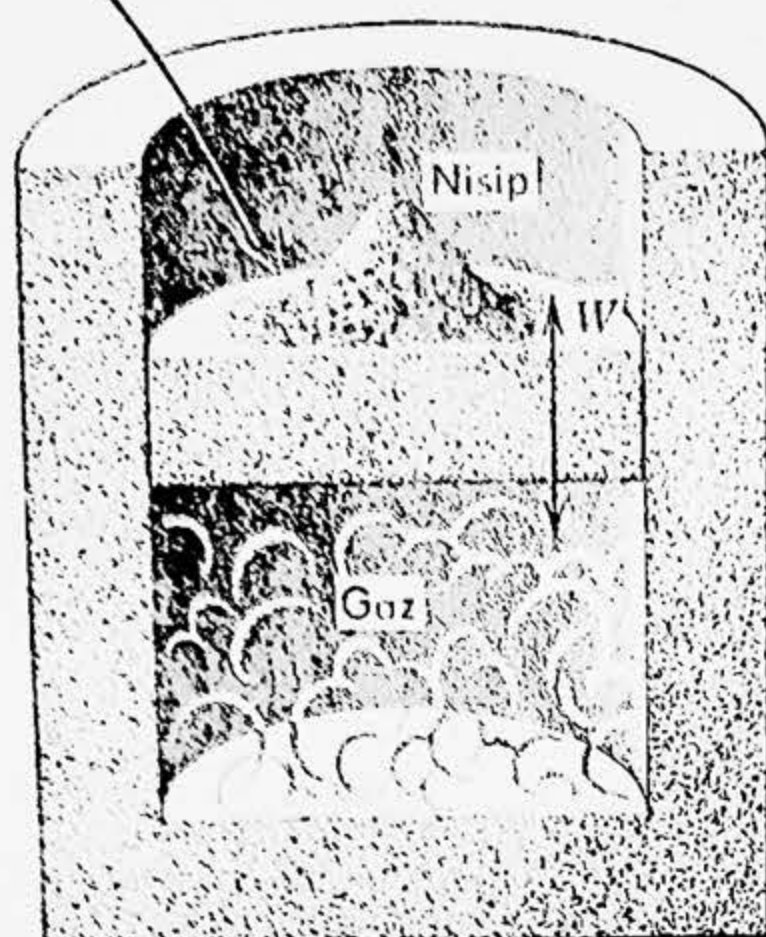
Un proces care are loc astfel încît nu are loc nici un transfer de căldură spre sistem sau dinspre sistem se numește *proces adiabatic*. Astfel de procese pot fi realizate experimental fie izolînd sistemul de mediul înconjurător cu ajutorul unui material termoizolator, fie efectuînd procesul repede. Deoarece transmisia căldurii se face încet, orice proces poate fi făcut practic adiabatic dacă el este efectuat suficient de repede.

Pentru un proces adiabatic Q este egal cu zero, astfel încît din primul principiu obținem

$$\Delta U = U_f - U_i = -W.$$

Prin urmare, energia internă a unui sistem crește exact cu cantitatea de lucru mecanic efectuat asupra sistemului într-un proces adiabatic. Dacă lucrul mecanic este efectuat de către sistem într-un proces adiabatic, energia internă a sistemului descrește exact cu cantitatea de lucru mecanic extern efectuat de sistem. O creștere a energiei interne duce în general la o creștere a temperaturii sistemului și invers, o descreștere a energiei interne duce în general la o coborîre a temperaturii sistemului.

Contact fără frecări
și fără scăpări
de gaz



Material
termoizolator

Figura 22-13. Într-un proces adiabatic nu există transfer de căldură către sistem sau de la sistem. Aici pereții sînt izolați și, cînd nisipul este îndepărtat sau adăugat, volumul gazului variază adiabatic.

lui. Un gaz care se destinde adiabatic efectuează lucru mecanic extern și energia sa internă descrește; un astfel de proces este folosit pentru a obține temperaturi joase. Creșterea temperaturii în timpul unei comprimări adiabatică a aerului este bine cunoscută de la încălzirea unei pompe de bicicletă.

În figura 22-13 se arată un proces adiabatic simplu. Sistemul este un gaz aflat într-un cilindru confecționat dintr-un material termoizolator. Căldura nu poate pătrunde în sistem dinspre mediul exterior sau să părăsească sistemul către mediul exterior. Avem iarăși o grămadă de nisip pe un piston fără frecări și fără scăpări de gaz. Singura interacțiune permisă între sistem și mediu se realizează prin efectuarea de lucru mecanic. Un astfel de proces se poate produce atunci cînd se adaugă sau se îndepărtează nisip de pe piston, astfel încît gazul poate fi comprimat sau se poate destinde.

Printre multe exemple din tehnică de procese adiabatic se numără destinderea aburului în cilindrul unei mașini cu abur, destinderea gazelor fierbinți într-un motor cu ardere internă și comprimarea aerului într-un motor Diesel sau într-un compresor de aer. Toate aceste procese se produc destul de repede astfel încît doar o foarte mică cantitate de căldură poate intra în sistem sau părăsi sistemul prin pereții săi în timpul aceluia interval scurt. Comprimările și rarefierile într-o undă sonoră sînt atît de rapide încît comportarea gazului prin care se propagă sunetul este adiabatică (exemplu 6, capitolul 23).

Motivul cel mai important, însă, pentru studiul proceselor adiabatic este faptul că mașinile ideale folosesc procese care sînt exact adiabatic. Aceste mașini ideale determină limitele teoretice ale funcționării și capacităților mașinilor reale. Vom examina mai amănunțit acestea în capitolul 25.

Un proces de mare interes teoretic este cel al *destinderii libere* (in vid). Acesta este un proces adiabatic în care nu se efectuează nici un

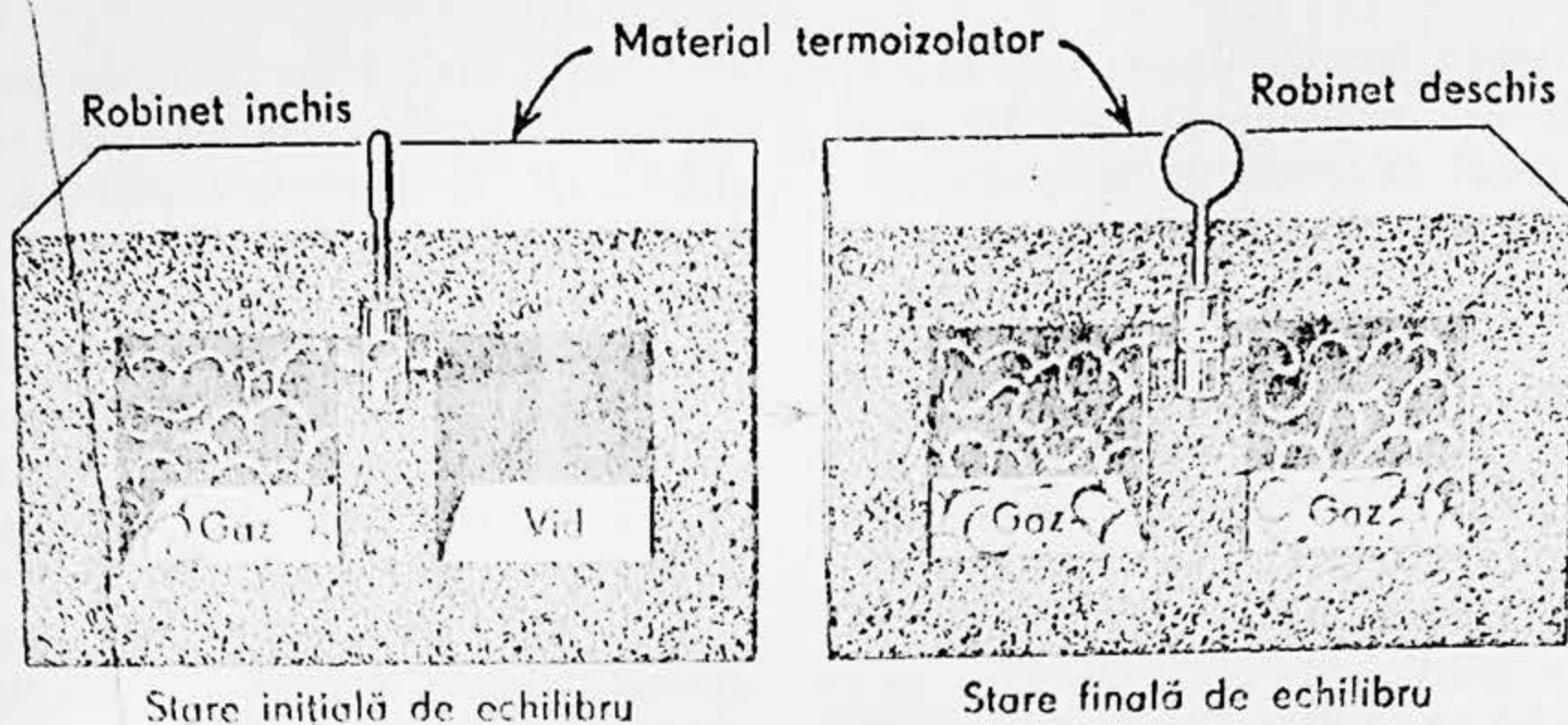


Figura 22-14. Destinderea liberă în vid. Nu există vreo variație a energiei interne U deoarece nu există nici transfer de căldură Q și nu se efectuează nici un lucru mecanic extern W .

lucru mecanic de către sistem sau asupra sistemului. Ceva de genul acesta se poate obține legând un vas care conține gaz cu un alt vas vidat, printr-un tub cu robinet, întregul sistem fiind închis într-un înveliș termoizolator (figura 22-14). Dacă robinetul este brusc deschis, gazul năvălește în vasul vidat și se destinde liber. Datorită izolării termice acest proces este adiabatic și deoarece pereții vaselor sînt rigizi nu se efectuează nici un lucru mecanic extern asupra sistemului. Prin urmare, în primul principiu avem $Q=0$ și $W=0$, astfel încît $U_i=U_f$ pentru acest proces. Energia internă inițială și cea finală sînt egale în destinderea liberă în vid.

Destinderea liberă în vid diferă de celelalte exemple pe care le-am dat prin aceea că nu există nici un mod de a o efectua foarte încet (cuasistatic). După ce deschidem robinetul nu mai avem nici un control asupra procesului. În stările intermediare presiunea, volumul și temperatura nu au valori unice caracteristice pentru sistemul ca un întreg, adică sistemul nu trece prin stări de echilibru, astfel încît nu putem reprezenta desfășurarea procesului printr-o curbă și o diagramă p - V . Putem reprezenta starea inițială și cea finală prin puncte într-o astfel de diagramă deoarece ele sînt stări de echilibru bine definite. Destinderea liberă în vid este un bun exemplu de proces ireversibil; vezi paragraful 25-2.

Intrebări

1. Să se dea exemple care să facă o distincție netă între temperatură și căldură.

2. (a) Să se arate cum conductibilitatea termică și calorimetria ar putea fi explicate de teoria caloricului. (b)

Să se enumere cîteva fenomene termice care nu pot fi explicate cu ajutorul teoriei caloricului.

3. Poate fi considerată căldura o formă de energie înmagazinată (sau potențială)? Ar contrazice o astfel de

interpretare conceptul de căldură ca energie în procesele de transfer datorate unei diferențe de temperatură?

4. Să se aplice ecuația (22-1) fierberii apei.

5. Încetează să comenteze căldura unei substanțe fără a produce o creștere a temperaturii acelei substanțe? Dacă este așa, contrazice această concepție de căldură ca energie într-un proces cu schimb de căldură datorită unei diferențe de temperatură?

6. Să se explice faptul că prezența unei cantități mari de apă în vecinătate, cum ar fi o Mare sau un Ocean, tinde să modereze extremele de temperatură ale climatului pe uscat.

7. Teoria arată că coeficientul de dilatare liniară (vezi paragraful 21-8) este proporțional cu capacitatea calorică C_p . Să se arate că aceasta era de așteptat. (Indicație: capacitatea calorică măsoară viteza de variație a energiei de vibrație cu temperatura.)

8. Să se dea un exemplu de proces în care nu se face nici un schimb de căldură către sistem sau dinspre sistem, și totuși temperatura sistemului variază.

9. Atât conductibilitatea termică cât și propagarea undelor implică un transfer de energie. Există vreodată deosebire principială între aceste două fenomene?

10. Atunci când un corp cald încălzește pe unul rece, sunt variațiile lor de temperatură egale ca mărime? Să se dea exemple. Se poate spune atunci că temperatura se transmite de la un corp la altul?

11. Care este legătura între perceperea unui corp drept cald sau rece și capacitatea sa calorică? Dar între aceasta și conductibilitatea sa termică?

12. Un bloc de lemn și un bloc de metal sunt la aceeași temperatură. Dacă blocurile sunt reci, metalul îi simțim mai rece decât lemnul; dacă blocurile sunt calde, metalul îi simțim

mai cald decât lemnul. Să se explice aceste observații. La ce temperatură blocurile vor fi percepute la fel de calde sau la fel de reci?

13. Într-o zi de iarnă temperatura pe suprafața interioară a unui perete este mult mai mică decât temperatura camerei și temperatura pe suprafața exterioară este mult mai mare decât temperatura din afară. Să se explice.

14. Ce cerințe are impuse pentru conductivitatea termică, căldura specifică și coeficientul de dilatare ale unui material care trebuie folosit pentru vase de buclărie?

15. În ce mod un transfer staționar de căldură este analog cu fluxul unui fluid incompresibil?

16. Este echivalentul mecanic al căldurii, J , o mărime fizică sau pur și simplu un factor de conversiune pentru a transforma energia din unități calorice în unități mecanice, și reciproc?

17. Se conservă temperatura unui sistem izolat (fără interacție cu mediul)?

18. Se poate distinge faptul că energia internă a unui corp a fost câștigată prin absorbție de căldură sau că a fost câștigată prin efectuare de lucru mecanic?

19. Dacă presiunea și volumul unui sistem sunt date, este temperatura determinată întotdeauna în mod unic?

20. Efectuează un gaz vreun lucru mecanic atunci când se destinde adiabatic? Dacă este așa, care este sursa de energie necesară pentru a efectua acest lucru mecanic?

21. O cantitate de gaz ocupă un volum inițial V_0 la o presiune p_0 și la o temperatură T_0 . El se destinde până la un volum V : (a) la temperatura constantă și, (b) la presiune constantă. În care caz gazul efectuează mai mult lucru mecanic?

22. Să se discute procesul de înghețare a apei din punctul de vedere

al primului principiu al termodinamicii. Reamintim că gheața ocupă un volum mai mare decât o masă egală de apă.

23. Un termos conține cafea. Termosul este scuturat (agitat) puternic.

Probleme

1. Într-o experiență Joule, o masă de 6,00 kg cade de la o înălțime de 50,0 m și rotește o roată cu palete care agită 0,600 kg apă. Apa se află inițial la 15°C. Cu cât va crește temperatura sa?

2. Să se calculeze creșterea posibilă de temperatură pentru apa care cade în cascada Niagara de la o înălțime de 49,5 m. Ce factori tind să împiedice această creștere posibilă a temperaturii?

3. Un atlet energetic disipează întreaga energie a unei mese de 4000 kcal/zi. Dacă el ar cheltui această căldură cu viteză constantă, cât ar fi această putere calorică în comparație cu puterea unui bec de 100 W?

4. Un bloc de gheață la 0°C, a cărui masă este inițial de 50,0 kg, alunecă de-a lungul unei suprafețe orizontale pornind cu o viteză 5,38 m/s și ajungând în repaus după parcurgerea a 28,3 m. Să se calculeze masa gheții topite în urma frecării dintre bloc și suprafață. Să se enumere ipotezele care trebuie făcute pentru a obține răspunsul.

5. Să se calculeze căldura specifică a unui metal din următoarele date: un vas confecționat din acest metal cântărește 3,62 kg și conține în plus 13,55 kg apă, o piesă de 1,81 kg de metal, inițial la o temperatură de 176,4°C este introdusă în apă; apa și vasul au inițial o temperatură de 15,6°C iar temperatura finală a întregului sistem este de 18,3°C.

Să considerăm cafeaua drept sistem.

(a) Va crește temperatura sa? (b) I s-a transmis căldură? (c) S-a efectuat lucru mecanic asupra sa? (d) S-a schimbat energia sa internă?

6. Un termometru cu masa de 55 g și căldura specifică 0,20 kcal/kg·grd indică 15,0°C. El este apoi introdus în 300 g de apă și ajunge la aceeași temperatură finală ca și apa. Dacă termometrul indică 44,4°C și este exact, care era temperatura apei înainte de introducerea termometrului, dacă se neglijează alte pierderi de căldură?

7. Conte Rumford a cântărit un obiect de metal aflat la temperatură joasă și apoi la temperatură înaltă pentru a vedea dacă conținutul său de „caloric” crește. El a ajuns la concluzia că (pentru aur) „caloricul” nu cântărește mai mult decât 10^{-8} din greutatea probei. (a) Va crește masa unei probe în timpul încălzirii, conform teoriilor moderne? (b) Dacă este așa, cu ce ordin de mărime? (c) Era Rumford sigur în respingerea caloricului pe această bază, privind retrospectiv?

8. Căldura specifică medie a cuprului este 0,090 cal/g·grd în intervalul de temperatură de la 0 la 1000°C. Dacă 1,00 kg de cupru este încălzit de la 0 la 1000°C, cu cât crește masa sa?

9. Un „calorimetru cu flux” este folosit pentru a măsura căldura specifică a unui lichid. Căldura este transmisă cu o „viteză” cunoscută unui curent de lichid în timp ce acesta trece printr-un calorimetru cu o viteză cunoscută. Atunci o măsurare a diferenței de temperatură între punctul de intrare a curentului și punctul de ieșire a curentului de lichid, ne permite să calculăm căldura specifică a lichidului.

Un lichid cu densitatea de $0,85 \text{ g/cm}^3$ curge printr-un calorimetru cu o „viteză” de $8,0 \text{ cm}^3/\text{s}$. Căldura este transmisă cu ajutorul unui încălzitor electric de 250 W și o diferență de temperatură de 15°C se stabilește în condițiile staționare între punctele de intrare și ieșire a curentului de lichid. Să se afle căldura specifică a lichidului.

10. Cu ajutorul unui încălzitor electric este transferată energie cu o „viteză” constantă unei substanțe aflate într-un vas izolat termic. Temperatura substanței este măsurată în funcție de timp. Din această informație să se arate cum putem deduce modul în care capacitatea calorică a corpului depinde de temperatură.

11. Să presupunem că s-a găsit că căldura specifică a unei substanțe variază cu temperatura după o lege parabolică, adică

$$c = A + BT^2,$$

unde A și B sînt constante, iar T este temperatura în scara Celsius. Să se compare căldura specifică medie a substanței în intervalul de temperatură de la $T=0$ pînă la $T=T$ cu căldura specifică din punctul mijlociu $T/2$.

12. Căldura specifică a argintului, măsurată la presiunea atmosferică normală variază cu temperatura între 50 K și 100 K după legea empirică

$$c_p = 0,076 T - 0,00026 T^2 - 0,15,$$

unde c_p este în $\text{cal/mol}\cdot\text{K}$ și T este temperatura în scara Kelvin. Să se calculeze cantitatea de căldură necesară pentru a mări temperatura a 216 g de argint de la 50 K la 100 K .

13. Pentru găurirea unui orificiu într-un bloc de alamă cu masa de 453 g se aplică o putere de $0,40 \text{ CP}$ timp de $2,0 \text{ min}$. (a) Cîtă căldură este generată? (b) Care este creșterea temperaturii alamei dacă 75% din căldura generată încălzește alama? (c) Ce se întîmplă cu cei 25%?

14. Un glonte de plumb cu masa de $2,0 \text{ g}$ mișcîndu-se cu o viteză de 200 m/s înțepenește într-un bloc de lemn cu masa de $2,0 \text{ kg}$ al unui pendul balistic. Să se calculeze creșterea de temperatură a glontelui, presupunînd că întreaga cantitate de căldură generată contribuie la mărirea temperaturii glontelui.

15. Să considerăm bara arătată în figura 22-4. Să presupunem că $L=25 \text{ cm}$, $A=1,0 \text{ cm}^2$ și materialul este cupru. Dacă $T_2=125^\circ\text{C}$, $T_1=0^\circ\text{C}$ și se atinge o stare de echilibru, să se afle: (a) gradientul de temperatură, (b) viteza de transmisie a căldurii și (c) temperatura într-un punct de pe tije aflat la 10 cm distanță de capătul cald.

16. Să se arate că într-o placă compusă din materiale diferite gradientul de temperatură în fiecare porțiune este invers proporțional cu conductivitatea termică.

17. Să presupunem că conductivitatea termică a cuprului este de două ori mai mare decît conductivitatea termică a aluminiului și de patru ori mai mare decît cea a alamei. Trei tije confecționate din cupru, aluminiu și respectiv alamă sînt fiecare de 15 cm lungime și $2,5 \text{ cm}$ în diametru. Aceste tije sînt așezate cap la cap cu aluminiul la mijloc între celelalte două. Capătul liber al tije de cupru și al celei de alamă este menținut la 100°C respectiv 0°C . Să se afle temperaturile de echilibru ale joncțiunii cupru-aluminiu și joncțiunii aluminiu-alamă.

18. Presupunînd că k este constant, să se arate că viteza radială de transmisie a căldurii într-o substanță aflată între două sfere concentrice este dată de

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(T_1 - T_2) 4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

unde sfera interioară are o rază r_1 și temperatura T_1 iar sfera exterioară are o rază r_2 și temperatura T_2 .

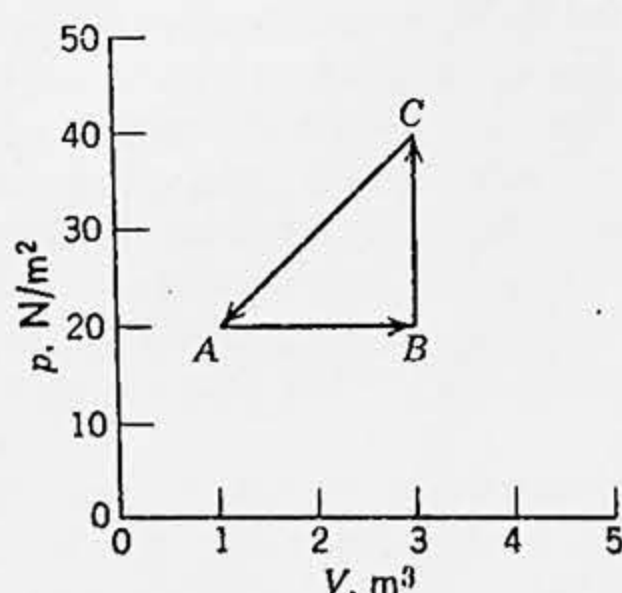
19. Căldura generată prin radioactivitate în interiorul Pământului este evacuată în afară prin oceane. Pentru un calcul aproximativ, să presupunem că gradientul mediu de temperatură în interiorul Pământului solid de sub ocean este de 0,07 grd/m și că conductivitatea termică medie este $2 \cdot 10^{-4}$ kcal/m·s·grd. Să se determine viteza de transmisie a căldurii pe metru pătrat. Presupunând că aceasta este aproximativ viteza pentru întreaga suprafață a Pământului, să se determine câtă căldură este transmisă în acest mod prin suprafața terestră în fiecare zi.

20. Presupunând că k este constant, să se arate că viteza radială de transmisie a căldurii într-o substanță între doi cilindri coaxiali este dată de

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(T_1 - T_2) 2\pi Lk}{\ln(r_2/r_1)}$$

unde cilindrul interior are raza r_1 și temperatura T_1 , iar cilindrul exterior are raza r_2 și temperatura T_2 , fiecare cilindru avînd o lungime L .

21. O sîrmă lungă de tungsten dintr-un încălzitor dezvoltă 3,0 kW/m și are un diametru de $5,0 \cdot 10^{-4}$ m. Ea este cufundată de-a lungul axei unui cilindru ceramic de diametru 0,12 m. Dezvoltînd puterea de mai sus, sîrma se încălzește pînă la 1500°C; exteriorul cilindrului are temperatura de 20°C.



(a)

	Q	W	ΔU
$A \rightarrow B$			+
$B \rightarrow C$	+		
$C \rightarrow A$			

(b)

Figura 22-16.

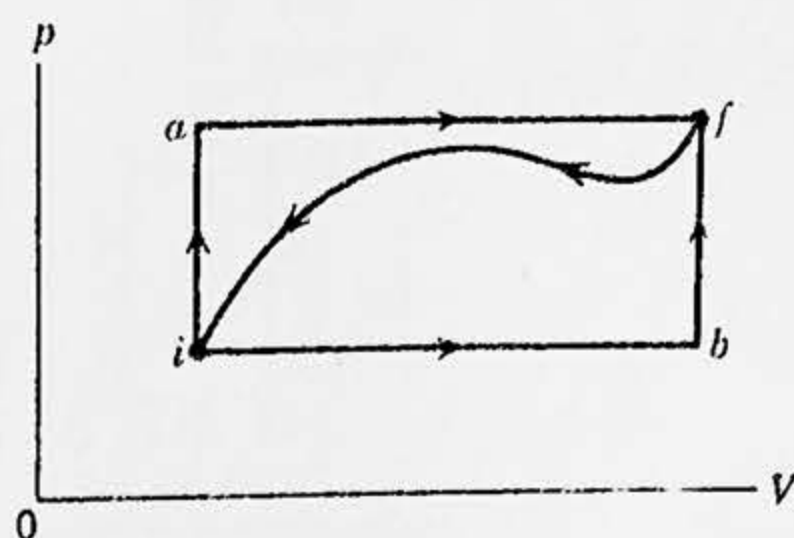


Figura 22-15.

Să se afle conductivitatea termică a ceramicii; se va folosi rezultatul dat în problema 20.

22. Să se determine valoarea lui J — echivalentul mecanic al căldurii — din următoarele date: 2000 cal sînt furnizate unui sistem sub formă de căldură; sistemul efectuează un lucru mecanic exterior de 3350 J în acest timp; creșterea de energie internă în decursul procesului este de 5030 J.

23. Cînd un sistem a trecut de la starea i la starea f de-a lungul drumului iaf s-a găsit că $Q=50$ cal și $W=-20$ cal. De-a lungul drumului ibf , $Q=36$ cal (fig. 22-15). (a) care este W efectuat de-a lungul drumului ibf ? (b) Dacă $W=-13$ cal pentru drumul de întoarcere curbat fi , care este Q pentru acest drum? (c) Să considerăm $U_i=10$ cal. Care este U_f ? (d) Dacă $U_b=22$ cal, care este Q pentru procesul ib ? Pentru procesul bf ?

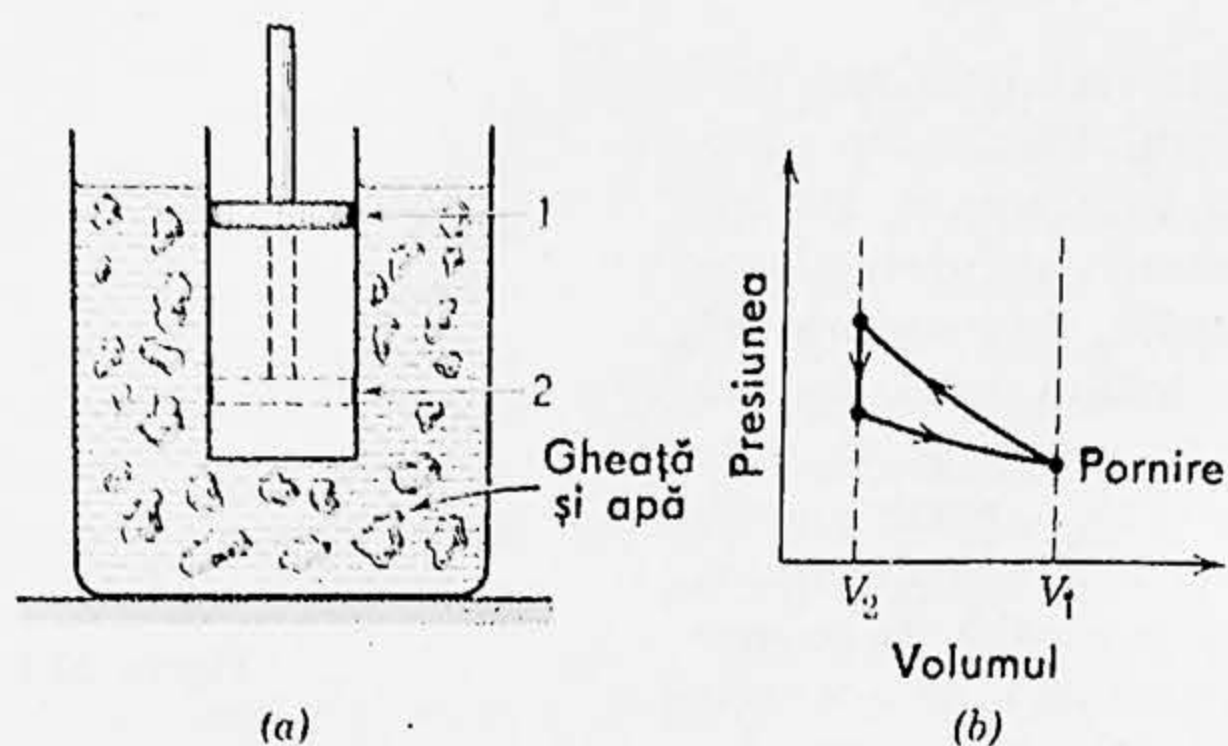


Figura 22-17.

24. Un sistem termodinamic trece de la o stare inițială A la o altă stare B și înapoi iarăși la A , prin starea intermediară C , așa cum se arată prin drumul $A-B-C-A$ în diagrama $p-V$ din figura 22-16, a . (a) Să se completeze tabela din figura 22-16, b punând semnele adecvate $+$ sau $-$ pentru semnele mărimilor termodinamice implicate în fiecare proces. (b) Să se calculeze valoarea numerică a lucrului mecanic efectuat de către sistem pentru ciclul complet $A-B-C-A$.

25. Figura 22-17, a prezintă un cilindru conținând gaz și închis cu un piston mobil. Cilindrul este cufundat într-un amestec de gheață și apă. Pistonul este împins *iute* în jos de la poziția (1) până la poziția (2). Pistonul este ținut în poziția (2) până când gazul ajunge din nou la 0°C și apoi este ri-

dicat *încet* înapoi în poziția (1). Figura 22-17, b reprezintă o diagramă $p-V$ a procesului. Dacă 100 g de gheață s-au topit în timpul ciclului, cât lucru mecanic a fost efectuat *asupra* gazului?

26. O bilă de oțel este lăsată să cadă pe o podea de beton de la o înălțime de 10 m . La prima ricoșare ea urcă până la o înălțime de $0,50\text{ m}$. Se consideră că întreaga energie mecanică macroscopică pierdută prin ciocnirea cu podeaua trece în bilă. Căldura specifică a fierului este de $0,12\text{ cal/g}\cdot\text{grd}$. În timpul ciocnirii: (a) s-a transmis căldură bilei? (b) A fost efectuat lucru mecanic asupra ei? (c) A variat energia sa internă? Dacă este așa, cu cât? (d) Cu cât a urcat temperatura bilei după prima ciocnire?

Teoria cinetică a gazelor, (I)

23-1. Introducere

Termodinamica se ocupă numai cu variabilele macroscopice, cum sînt presiunea, temperatura și volumul. Legile ei fundamentale, exprimate prin astfel de mărimi nu ne spun nimic despre faptul că materia este constituită din atomi. *Mecanica statistică* însă, care se ocupă cu același domeniu al științei ca și termodinamica, presupune existența atomilor. Legile ei fundamentale sînt legile mecanicii, care se aplică atomilor ce constituie sistemul.

Nici un calculator electronic existent n-ar putea rezolva problema aplicării legilor mecanicii separat fiecărui atom dintr-un gaz, de exemplu. Dacă ar exista vreunul, rezultatele unor astfel de calcule ar fi prea voluminoase pentru a putea fi utile. Din fericire, istoria amănunțită a atomilor individuali într-un gaz nu este importantă dacă vrem să calculăm numai comportarea macroscopică a gazului. Aplicăm atunci legile mecanicii *în mod statistic* și aflăm că sîntem în stare să exprimăm toate variabilele termodinamice ca anumite medii ale unor proprietăți atomice. De exemplu, presiunea exercitată de un gaz asupra pereților vasului care-l conține este intensitatea („viteza”) medie, pe unitatea de suprafață, cu care atomii de gaz transferă impuls către perete prin ciocnire cu el. Numărul atomilor dintr-un sistem macroscopic este de obicei atît de mare încît astfel de medii sînt într-adevăr cantități foarte net definite.

Putem aplica legile mecanicii în mod statistic ansamblelor de atomi la două nivele diferite. La nivelul numit *teorie cinetică* procedăm într-un mod destul de fizic, folosind o tehnică matematică de mediere relativ simplă. În acest capitol vom folosi aceste metode pentru a aprofunda înțelegerea presiunii, temperaturii, căldurii specifice și energiei interne la nivel atomic. Teoria cinetică a fost dezvoltată de către Robert

Boyle (1627—1691), Daniel Bernoulli (1700—1782), James Joule (1818—1889), A. Kronig (1822—1879), Rudolph Clausius (1822—1888) și Clerk Maxwell (1831—1879), printre alții¹. În această carte vom aplica teoria cinetică numai la gaze, deoarece interacțiunile dintre atomii în gaze sînt mult mai slabe decît în lichide și solide; aceasta simplifică mult dificultățile matematice.

La celălalt nivel, putem aplica legile mecanicii în mod statistic folosind o tehnică mai formală și mai abstractă decît cea a teoriei cinetice. Această tratare, dezvoltată de J. Willard Gibbs (1839—1903) și de Ludwig Boltzmann (1844—1906) printre alții, se numește *mecanică statistică*, un termen care include teoria cinetică ca un subdomeniu. Folosind aceste metode se pot deduce legile termodinamicii, stabilind astfel această știință ca o ramură a mecanicii. Încununarea cea mai deplină a mecanicii statistice (*statistica cuantică*) implică aplicarea statistică a legilor mecanicii cuantice — nu a legilor mecanicii clasice — la sisteme constituite din mai mulți atomi².

23-2. Gazul ideal. O descriere macroscopică

Fie o masă \mathcal{M} de gaz conținută într-un vas de volum V . Densitatea ρ a gazului este \mathcal{M}/V și este clar că putem reduce pe ρ fie prin îndepărtarea unei cantități de gaz din vas (reducînd \mathcal{M}), fie utilizînd un vas mai mare (mărinđ V). Găsim din experiență că, la densități suficient de joase, toate gazele indiferent de compoziția lor chimică, tind să manifeste o anumită relație simplă între variabilele termodinamice p , V și T . Aceasta ne sugerează conceptul de *gaz ideal* (sau perfect), unul care să aibă aceeași comportare simplă în toate condițiile. În acest paragraf dăm o definiție macroscopică sau termodinamică a unui gaz ideal. În paragraful 23-3 vom defini gazul ideal din punct de vedere microscopic, cel al teoriei cinetice, și vom vedea ce putem afla comparînd cele două teorii.

Dîndu-se o masă \mathcal{M} de gaz într-o stare de echilibru termic, putem măsura presiunea sa p , temperatura sa T și volumul său V . Pentru valori suficient de mici ale densității experiența arată că: (1) pentru o masă dată de gaz menținută la o temperatură constantă, presiunea este invers proporțională cu volumul (legea lui Boyle și Mariotte) și (2) pentru o masă dată de gaz menținută la presiune constantă, volumul este direct proporțional cu temperatura (legea lui Gay-Lussac). Putem rezuma aceste două rezultate experimentale prin relația

$$\frac{pV}{T} = \text{const (pentru o masă fixă de gaz).} \quad (23-1)$$

¹ Vezi „John James Waterston și teoria cinetică a gazelor”, de S. G. Brush, în *American Scientist*, Iunie 1961, pentru un aspect interesant al istoricului teoriei cinetice.

² Vezi *Fizica moleculară și căldura*, de Philip M. Morse, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1962, pentru o tratare mai completă a termodinamicii, teoriei cinetice și (în special) a mecanicii statistice, mai adecvată decît o putem da aici.

Volumul ocupat de un gaz (real sau ideal), la o presiune dată și la o temperatură dată, este proporțional cu masa sa. În modul acesta, constanta din ecuația (23-1) trebuie să fie de asemenea proporțională cu masa gazului. În paragraful 22-2 (vezi figura 22-2) am văzut ce simplificare mare apare în studiul căldurilor specifice ale solidelor dacă comparăm probe de solid care conțin același număr de molecule, în locul probelor care au aceeași masă (în grame). Am făcut aceasta folosind molul ca unitate de masă. Să facem la fel și acum.

Vom scrie de aceea constanta din ecuația (23-1) sub forma μR , unde μ este masa gazului exprimată în moli (numărul de moli) și R este o constantă care trebuie determinată pentru fiecare gaz pe cale experimentală. Prevederea noastră că va apare o simplificare dacă vom compara gazele în cantități molare, este justificată întrucât experiența arată că, la densități suficient de mici, R are aceeași valoare pentru toate gazele, și anume

$$R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} = 1,986 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}.$$

R se numește *constantă universală a gazelor*. Putem scrie acum ecuația (23-1) astfel

$$pV = \mu RT \quad (23-2)$$

și definim un gaz ideal (sau perfect) ca unul care se supune acestei relații în toate condițiile. În realitate nu există un astfel de gaz ideal. Dar el rămâne un concept util și simplu legat de realitate prin faptul că toate gazele reale se apropie de gazul ideal în comportarea lor, dacă densitatea este suficient de mică. Ecuația (23-2) se numește *ecuația de stare* a unui gaz ideal.

Dacă balonul unui termometru cu gaz (ideal) la volum constant l-am putea umple cu un gaz ideal am vedea din ecuația (23-2) că am putea defini temperatura cu ajutorul presiunii indicate de termometru, adică

$$T = 273,16 \text{ K} \frac{p}{p_{tr}} \text{ (gaz ideal)}.$$

Aici p_{tr} este presiunea gazului în punctul triplu la care temperatura T_{tr} este 273,16 K prin definiție. În practică, trebuie să umplem termometrul nostru cu un gaz real și să măsurăm temperatura prin extrapolare spre densitate nulă, folosind ecuația (21-4):

$$T = 273,16 \text{ K} \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{p}{p_{tr}} \text{ (gaz real)}.$$

Exemplul 1. Un cilindru conține oxigen la temperatura de 20°C și la o presiune de 15 atm într-un volum de 100 l. Un piston este introdus în cilindru micșorând volumul ocupat de gaz până la 80 l și mărirând temperatura până la 25°C. Presupunând că oxigenul se comportă ca un gaz ideal în aceste condiții, care este atunci presiunea gazului?

Din ecuația (23-1), deoarece masa gazului a rămas neschimbată, putem scrie

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Condițiile inițiale sînt

$$p_i = 15 \text{ atm}, T_i = 293 \text{ K}, V_i = 100 \text{ l.}$$

Condițiile finale sînt

$$p_f = ?, T_f = 298 \text{ K}, V_f = 80 \text{ l.}$$

Prin urmare

$$p_f = \frac{T_f}{T_i} \frac{p_i V_i}{V_f} = \frac{298 \text{ K}}{293 \text{ K}} \cdot \frac{15 \text{ atm} \cdot 100 \text{ l}}{80 \text{ l}} = 19 \text{ atm}$$

Exemplul 2. Să se calculeze lucrul mecanic per mol efectuat de un gaz ideal care se destinde izoterm, adică la temperatură constantă de la un volum inițial V_i pînă la un volum final V_f .

Lucrul mecanic efectuat poate fi reprezentat astfel

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV.$$

Din legea gazelor ideale avem

$$p = \frac{\mu RT}{V}$$

astfel încît lucrul mecanic per mol, W/μ , este

$$\frac{W}{\mu} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{RT}{V} dV.$$

Temperatura este constantă astfel încît

$$\frac{W}{\mu} = RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

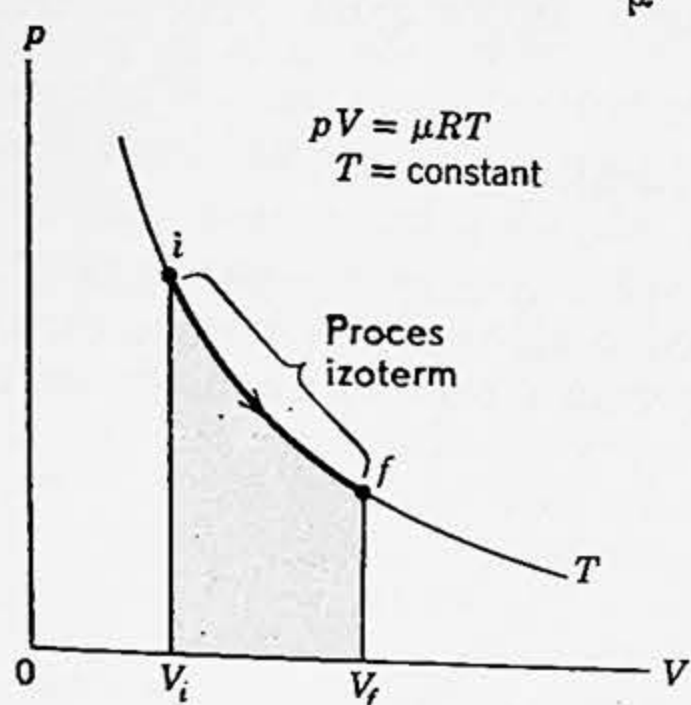


Figura 23-1. Exemplul 2. Aria umbrată reprezintă lucrul mecanic efectuat de μ moli de gaz prin destindere de la V_i pînă la V_f , temperatura fiind menținută constantă.

este lucrul mecanic per mol efectuat de un gaz ideal într-o destindere izotermă la temperatura T de la un volum inițial V_i pînă la un volum final V_f .

Observăm că, dacă gazul se destinde, astfel încît $V_f > V_i$, lucrul mecanic efectuat de gaz este pozitiv; dacă gazul este comprimat, astfel încît $V_f < V_i$, lucrul mecanic efectuat de către gaz este negativ. Aceasta concordă cu convenția de semne adoptată pentru W în primul principiu al termodinamicii. Lucrul mecanic efectuat este reprezentat de aria hașurată din figura 23-1. Linia plină este o izotermă, adică o curbă care ne dă relația dintre p și V la o temperatură constantă.

Cum putem menține în practică la temperatura constantă un gaz care se destinde sau se contractă?

23-3. Gazul ideal. Definiția microscopică

Din punct de vedere microscopic definim un gaz ideal făcând ipotezele de mai jos. Vom avea apoi ca sarcină să aplicăm legile mecanicii clasice în mod statistic atomilor de gaz și să arătăm că definiția noastră microscopică concordă cu definiția macroscopică din paragraful precedent.

1. *Gazul constă din particule numite molecule.* În funcție de gaz, fiecare moleculă constă dintr-un atom sau dintr-un grup de atomi. Dacă gazul este un element chimic sau un compus chimic și se află într-o stare stabilă, considerăm că toate moleculele sale sînt identice.

2. *Moleculele se află într-o mișcare dezordonată aleatoare (întîmplătoare) și verifică legile lui Newton ale mișcării.* Moleculele se mișcă în toate direcțiile și cu diferite viteze. În calculul proprietăților mișcării, presupunem că mecanica newtoniană este valabilă la nivel microscopic. Ca și în cazul tuturor ipotezele noastre, această ipoteză va rămîne valabilă sau va cădea după cum faptele experimentale prezise de ea sînt sau nu corecte.

3. *Numărul total de molecule este mare.* Direcția și viteza mișcării oricărei molecule se poate schimba brusc prin ciocnire cu peretele sau cu o altă moleculă. Fiecare moleculă particulară va urma o traiectorie în zig-zag, datorită acestor ciocniri. Cu toate acestea, deoarece există așa de multe molecule, presupunem că numărul rezultat mare de ciocniri menține distribuția globală a vitezelor moleculare și caracterul aleator al mișcării.

4. *Volumul moleculelor constituie o fracțiune mică, neglijabilă, din volumul ocupat de gaz.* Deși sînt multe molecule, ele sînt extrem de mici. Știm că volumul ocupat de un gaz poate fi variat între limite largi destul de ușor și că atunci cînd un gaz se condensează volumul ocupat de lichid poate fi de mii de ori mai mic decît volumul ocupat de gaz. Prin urmare ipoteza noastră este plauzibilă. Mai tîrziu vom cerceta dimensiunile reale ale moleculelor și vom vedea dacă trebuie să modificăm această ipoteză.

5. *Asupra moleculelor nu acționează forțe apreciabile decît în timpul unei ciocniri.* În măsura în care aceasta este adevărat, o moleculă se mișcă cu viteză constantă între două ciocniri. Deoarece am presupus că moleculele sînt mici, distanța medie dintre molecule este mare în comparație cu dimensiunile unei molecule. Prin urmare, presupunem că raza de acțiune a forțelor moleculare este comparabilă cu dimensiunile moleculare.

6. *Ciocnirile sînt elastice și durează un timp neglijabil.* Ciocnirile dintre molecule și de pereții vasului conservă impulsul și (presupunem) energia cinetică. Deoarece timpul de ciocnire este neglijabil în comparație cu timpul dintre două ciocniri ale unei molecule, energia cinetică care este transformată în energie potențială în timpul ciocnirii este din nou disponibilă ca energie cinetică după un timp atît de scurt încît putem ignora cu totul acest schimb de energie.

23-4. Calculul cinetic al presiunii

Să calculăm presiunea unui gaz ideal în baza teoriei cinetice. Pentru a simplifica lucrurile, considerăm un gaz într-un vas cubic ai cărui pereți sînt perfect elastici. Fie l lungimea fiecărei muchii. Să notăm cu A_1 și A_2 fețele normale pe axa x , fiecare de arie l^2 , (figura 23-2). Să considerăm o moleculă care are o viteză \vec{v} . Putem descompune pe \vec{v} în componentele v_x , v_y și v_z pe direcțiile muchiilor. Dacă această particulă se ciocnește cu A_1 ea va fi reflectată cu componenta x a vitezei avînd sens invers. Nu va exista nici un efect asupra lui v_y sau v_z , astfel încît variația impulsului particulei va fi

$$\text{impulsul final} - \text{impulsul inițial} = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x,$$

perpendiculară pe A_1 . Prin urmare impulsul transmis lui A_1 va fi $2mv_x$, deoarece impulsul total se conservă.

Să presupunem că această particulă ajunge la A_2 fără să lovească vreo altă particulă în drumul său. Timpul necesar pentru a traversa cubul va fi l/v_x . În A_2 particula își va schimba iarăși sensul componente pe axa x a vitezei și se va întoarce la A_1 . Presupunînd că particula nu suferă ciocniri, drumul dus-întors va dura un timp $2l/v_x$. Prin urmare, numărul ciocnirilor pe unitatea de timp care au loc între această particulă și A_1 este $v_x/2l$, astfel încît „viteza” cu care ea transmite impuls lui A_1 este

$$2mv_x \frac{v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l}.$$

Pentru a obține forța totală exercitată asupra lui A_1 , adică „viteza” cu care este transmis impulsul lui A_1 de către toate moleculele de gaz, trebuie să însumăm pe mv_x^2/l pentru toate particulele. Atunci, pentru a afla presiunea vom împărți această forță la aria lui A_1 anume l^2 .

Dacă m este masa fiecărei molecule, avem

$$p = \frac{m}{l^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots),$$

unde v_{x1} este componenta x a vitezei particulei 1, v_{x2} este cea a particulei 2 etc. Dacă N este numărul total de particule din vas și n este numărul pe unitatea de volum, atunci $N/l^3 = n$ sau $l^3 = N/n$. Prin urmare

$$p = mn \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots}{N}.$$

Dar mn este pur și simplu masa unității de volum, adică densitatea ρ .

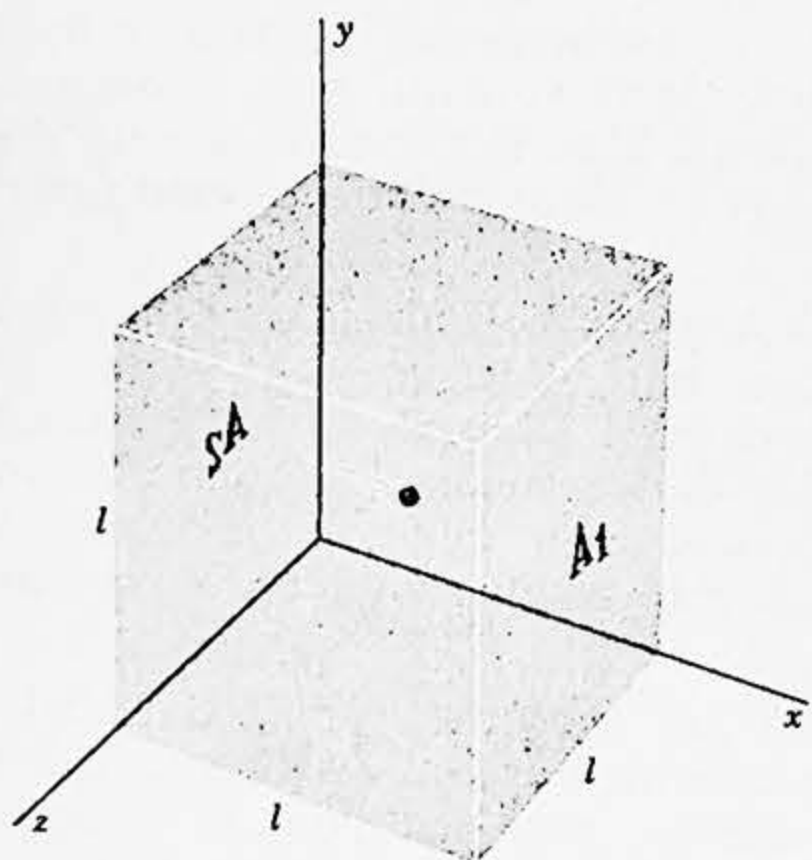


Figura 23-2. Un vas cubic de latură l care conține un gaz ideal. Este arătată o moleculă care se mișcă spre A_1 .

Cantitatea $(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots)/N$ este valoarea medie a lui v_x^2 pentru toate particulele din vas. Să o notăm cu $\overline{v_x^2}$. Atunci

$$p = \rho \overline{v_x^2}.$$

Pentru oricare particulă $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Deoarece avem multe particule și deoarece ele se mișcă cu totul dezordonat, valorile medii ale lui v_x^2, v_y^2 și v_z^2 sînt egale și valoarea fiecăreia este exact o treime din valoarea medie a lui v^2 . Nu există nici o preferință printre molecule pentru mișcarea de-a lungul vreunui din cele trei axe. Prin urmare, $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, astfel încît

$$p = \rho \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}. \quad (23-3)$$

Deși am dedus acest rezultat neglijînd ciocnirile dintre particule, rezultatul este adevărat chiar dacă ținem seama și de ciocniri. Datorită schimbului de viteză, într-o ciocnire elastică între particule identice, va exista întotdeauna o moleculară care se va ciocni cu A_2 cu impulsul mv_x , corespunzător moleculei care a părăsit pe A_1 cu același impuls. De asemenea, timpul petrecut în timpul ciocnirilor este neglijabil în comparație cu timpul petrecut între ciocniri. Prin urmare, neglijarea ciocnirilor este pur și simplu un procedeu convenabil de calcul. Analog, am fi putut alege un vas de orice formă — cubul doar simplifică calculul. Deși am calculat presiunea exercitată numai asupra feței A_1 , din legea lui Pascal, rezultă că presiunea este aceeași pe toate fețele și peste tot în interior¹.

Rădăcina pătrată din $\overline{v^2}$ se numește *viteză pătratică medie* a moleculelor și este un fel de viteză moleculară medie². Folosind ecuația (23-3), putem calcula această viteză pătratică medie din valorile măsurate ale presiunii și densității gazului. Astfel

$$v_{pm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \quad (23-4)$$

În ecuația (23-3) legăm o mărime macroscopică (presiunea p) de o valoare medie a unei mărimi microscopice (adică de $\overline{v^2}$ sau v_{pm}^2). Valorile medii pot fi luate însă pe intervale scurte sau pe intervale lungi, pe regiuni mici de spațiu sau pe regiuni mari de spațiu. Valoarea medie calculată pe o regiune mică și pe un interval scurt poate depinde de timpul și de regiunea alese, astfel încît valorile obținute în acest mod pot fluctua. Aceasta s-ar putea întîmpla într-un gaz de densitate foarte mică, de exemplu. Putem însă neglija fluctuațiile dacă numărul particulelor din sistem este suficient de mare.

Exemplul 3. Să se calculeze viteza pătratică medie a moleculelor de hidrogen la 0,00°C și 1,00 atm presiune, presupunînd că hidrogenul este un gaz ideal.

¹ Neglijăm greutatea gazului, — un efect neglijabil dacă gazul nu are o extindere prea mare ca în atmosferă. (Vezi paragraful 17-3 și problema 42).

² Vom considera aceasta mai tîrziu în paragraful 24-2 în care discutăm distribuția moleculelor după viteze.

În aceste condiții hidrogenul are o densitate ρ de $8,99 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$. Atunci, deoarece $p = 1,00 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$,

$$v_{pm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1840 \text{ m/s.}$$

Aceasta este de ordinul a 6 000 km/oră.

Tabela 23-1 dă rezultatele unor calcule analoge pentru unele gaze la 0°C .

Tabela 23-1

Gazul	v_{pm} (la 0°C), m/s	Masa molară ¹⁾ g/mol	Energia cinetică de translație pe mol (la 0°C) $\frac{1}{2} M v_{pm}^2$ J/mol
O ₂	461	32	3 400
N ₂	493	28	3 390
Aer	485	28,8	3 280
CO	493	28	3 390
H ₂	1 838	2,02	3 370
He	1 311	4,0	3 430
CO ₂	393	44	3 400
H ₂ O	615	18	3 400
Ne	584	20,1	3 420

¹⁾ Masa moleculară și molul sînt definite la pagina 580. Vom discuta ultima coloană din această tabelă în paragraful următor.

Aceste viteze moleculare sînt de același ordin de mărime ca viteza sunetului la aceeași temperatură. De exemplu, în aer la 0°C , $v_{pm} = 485 \text{ m/s}$ iar viteza sunetului este 331 m/s ; în hidrogen, $v_{pm} = 1838 \text{ m/s}$, iar viteza sunetului 1286 m/s ; în oxigen, $v_{pm} = 461 \text{ m/s}$ iar viteza sunetului 317 m/s . Aceste rezultate erau de așteptat în baza modelului nostru de gaz; vezi problema 34. Noi vizualizăm propagarea undelor sonore ca o mișcare dirijată a moleculelor, în ansamblu, suprapusă peste mișcarea lor dezordonată. Prin urmare, energia unei sonore este transportată ca energie cinetică de la o moleculă la cea vecină cu care ea se ciocnește. Moleculele înseși, în ciuda vitezelor lor mari, nu se mișcă prea departe în timpul unei perioade de vibrație a sunetului; ele sînt restrînse la un spațiu destul de mic datorită efectelor unui număr mare de ciocniri¹. Cu toate acestea, energia unei sonore este comunicată de la o moleculă la cea vecină cu acea viteză mare deși nu ne așteptăm ca viteza sunetului să fie *exact* egală cu v_{pm} , o chestiune care va fi lămurită în exemplul 6.

¹ Aceasta explică de ce trece un anumit timp de la deschiderea unei sticle cu amoniac într-un capăt al camerei și sesizarea mirosului la celălalt capăt al camerei. Deși vitezele moleculare sînt mari, numărul mare de ciocniri împiedică avansarea moleculelor de amoniac. Ele difuzează prin aer cu viteze care sînt destul de mici în comparație cu vitezele moleculare.

Exemplul 4. Presupunând că viteza sunetului într-un gaz este aceeași ca și viteza pătratică medie a moleculelor, să se arate cum depinde de temperatură viteza sunetului într-un gaz ideal.

Densitatea unui gaz este

$$\rho = \frac{\delta m}{V} = \frac{\mu M}{V}$$

în care δm este masa gazului, M masa molară (g/mol) și μ este numărul de moli (masa în moli). Combinând aceasta cu legea gazelor ideale

$$pV = \mu RT$$

obținem

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

Obținem din ecuația (23-4)

$$v_{pm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

astfel încât viteza sunetului v_1 la o temperatură T_1 este legată de viteza sunetului v_2 în același gaz la o temperatură T_2 prin relația

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

De exemplu, dacă viteza sunetului la 273 K este 332 m/s în aer, viteza sa în aer la 300 K va fi

$$\sqrt{\frac{300}{273}} \cdot 332 \text{ m/s} = 348 \text{ m/s.}$$

Se va schimba rezultatul nostru dacă viteza sunetului ar fi proporțională și nu egală cu viteza pătratică a moleculelor de gaz?

23-5. Interpretarea cinetică a temperaturii

Dacă înmulțim fiecare membru al ecuației (23-3) cu volumul V , obținem

$$pV = \frac{1}{3} \rho V \bar{v}^2,$$

unde ρV este pur și simplu masa totală m a gazului, ρ fiind densitatea. Putem scrie de asemenea masa gazului sub forma μM , unde μ este numărul de moli iar M este masa molară. Făcând această substituție, obținem

$$pV = \frac{1}{3} \mu M \bar{v}^2.$$

Cantitatea $\frac{1}{3} \mu M \bar{v}^2$ este egală cu două treimi din energia cinetică totală

de translație a moleculelor adică $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \mu M \overline{v^2} \right)^{1)}$. Putem scrie atunci

$$pV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \mu M \overline{v^2} \right).$$

Ecuția de stare a unui gaz ideal este $pV = \mu RT$.

Combinând aceste două expresii, obținem $\frac{1}{2} M \overline{v^2} = \frac{3}{2} RT$. (23-5)

Adică, *energia cinetică totală de translație pentru un mol de molecule ale unui gaz ideal este proporțională cu temperatura*. Putem spune că acest rezultat, ecuația (23-5), este necesar pentru a pune în concordanță teoria cinetică cu ecuația de stare a gazului ideal, sau putem considera ecuația (23-5) ca o definiție a temperaturii gazului în baza teoriei cinetice sau a unei teorii microscopice. În fiecare caz, căpătăm o înțelegere mai adâncă în semnificația temperaturii gazelor.

Temperatura unui gaz este legată de energia cinetică totală de translație, măsurată față de centrul de masă al gazului. Energia cinetică asociată cu mișcarea centrului de masă al gazului nu are vreo legătură cu temperatura gazului. În paragraful 23-3 am presupus mișcarea dezordonată ca o parte a definiției noastre statistice a unui gaz ideal și în paragraful 23-4 am calculat pe $\overline{v^2}$ pe această bază. Pentru o distribuție aleatoare a vitezelor moleculare după direcție, centrul de masă va fi în repaus, astfel încât trebuie să folosim un sistem de referință în care centrul de masă al gazului să fie în repaus. Pentru toate celelalte repere moleculele vor avea, fiecare, viteze mai mari cu cantitatea \vec{u} (viteza centrului de masă în acel reper) față de vitezele în raport cu sistemul centrului de masă; prin urmare, mișcările nu vor mai fi aleatoare și vom obține valori diferite pentru $\overline{v^2}$. Temperatura unui gaz dintr-un vas nu crește dacă punem vasul într-un tren în mișcare!

Să împărțim ambii membri ai ecuației (23-5) la numărul lui Avogadro N_0 , care (vezi pag. 580, nota de subsol) reprezintă numărul moleculelor dintr-un mol de gaz. Atunci $M/N_0 (=m)$ este masa unei molecule individuale și avem

$$\frac{1}{2} (M/N_0) \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} (R/N_0) T.$$

Dar $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$ este energia cinetică medie de translație pe moleculă. Raportul R/N_0 , pe care îl notăm cu k , este *constanta lui Boltzmann* care joacă rolul constantei gazelor pentru o moleculă. Avem

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (23-6)$$

¹ Dacă N este numărul total de molecule și m este masa fiecărei molecule, atunci $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \dots = \frac{1}{2} m N \left[\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots}{N} \right] = \frac{1}{2} m N \overline{v^2}$ în care $mN (= \mu M)$ masa totală a gazului.

în care¹

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Vom reveni la constanta Boltzmann în capitolul 24.

În ultima coloană din tabela 23-1 se dau valorile calculate pentru $\frac{1}{2} M \bar{v}_{pm}^2$. După cum prezice ecuația (23-5), această cantitate (energia cinetică de translație pe mol) are aproximativ aceeași valoare pentru toate gazele la aceleași temperaturi, 0°C în acest caz. Din ecuația (23-6) conchidem că la aceeași temperatură T , raportul vitezelor pătratice medii ale moleculelor a două gaze diferite este egal cu rădăcina pătrată din raportul invers al maselor lor. Adică, din

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m_1 \bar{v}_1^2}{2} = \frac{2}{3k} \frac{m_2 \bar{v}_2^2}{2}$$

obținem

$$\sqrt{\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{v}_2^2}} = \frac{v_{1pm}}{v_{2pm}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (23-7)$$

Putem aplica ecuația (23-7) la difuzia a două gaze diferite aflate într-un vas cu pereți poroși așezat într-un spațiu vidat. Gazul mai ușor, ale cărui molecule se mișcă mai rapid în medie, vor evada mai repede din vas decât moleculele mai grele. Raportul dintre numărul moleculelor din cele două gaze care au trecut prin pereții poroși într-un interval de timp scurt, este egal cu rădăcina pătrată din raportul invers al maselor lor, $\sqrt{m_2/m_1}$. Acest proces de difuzie constituie o metodă de separare a uraniului ^{235}U fisionabil (0,7% abundență) dintr-o probă normală de uraniu care conține în cea mai mare parte uraniul ^{238}U nefisionabil (99,3% abundență). Cităm din raportul lui Smyth.

În 1896 lordul Rayleigh a arătat că un amestec de gaze de diferite mase atomice ar putea fi separat parțial, lăsându-l să difuzeze printr-o barieră poroasă într-un spațiu vidat. Datorită vitezei lor medii mai înalte, moleculele gazului ușor vor difuza prin barieră mai repede astfel încât gazul care a trecut prin barieră (care a „difuzat”) va fi îmbogățit în componentul mai ușor, iar gazul rezidual care nu a trecut prin barieră va fi sărăcit în componentul mai ușor. Gazul cel mai mult îmbogățit în componentul ușor este așa-numitul gaz „difuzat instantaneu”; el reprezintă partea care difuzează înainte ca sărăcirea gazului rezidual să devină apreciabilă... În ipoteza că vitezele de difuzie sînt invers proporționale cu rădăcinile pătrate din masele moleculare², factorul de separație pentru partea difuzată instantaneu, numit „factor de separație ideal” α , este dat de

$$\alpha = \sqrt{M_2/M_1}$$

unde M_1 este masa molară a gazului mai ușor și M_2 este masa molară a gazului mai greu. Aplicînd această formulă în cazul uraniului, putem ilustra ordinul de

¹ Vezi nota de subsol de la pag. 580.

² Observăm că raportul m_2/m_1 al maselor a două molecule de gaze diferite este același ca raportul M_2/M_1 al maselor lor molare, deoarece masele molare se referă la același număr de molecule. Compară cu ecuația (23-7).

mărime în problema separării. Deoarece uraniul însuși nu este un gaz, trebuie folosite unele combinații gazoase ale uraniului. Singurul compus evident potrivit este hexafluorura de uraniu, U_6F_{12} . Deoarece fluorul are un singur izotop, cele două hexafluoruri de uraniu mai importante sînt $^{235}U_6F_{12}$ și $^{238}U_6F_{12}$; masele lor molare sînt 349 g/mol și 352 g/mol. Astfel, dacă o fracțiune mică dintr-o cantitate de hexafluorură de uraniu este lăsată să difuzeze printr-o barieră poroasă, gazul difuzat va fi îmbogățit în $^{235}U_6F_{12}$ cu un factor

$$\alpha = \sqrt{\frac{352}{349}} = 1,0043 \dots$$

Pentru a separa izotopii uraniului trebuie folosite mai multe trepte succesive de difuzie (adică o cascadă)... Studiile lui Cohen și ale altora arată că cea mai bună aranjare a curgerii pentru treptele succesive este aceea în care o jumătate de gaz pompat în fiecare treaptă difuzează prin barieră, cealaltă jumătate (sărăcită) fiind îndreptată spre intrarea în treapta următoare mai joasă... Dacă dorim să obținem $^{235}U_6F_{12}$ de 99% puritate, și dacă folosim o cascadă în care fiecare treaptă are un factor de îmbogățire total (global) rezonabil, atunci se constată că sînt necesare aproximativ 4000 trepte... Majoritatea materialului care pînă la urmă iese din cascadă a fost reciclat de mai multe ori. Calculele arată că pentru o uzină reală de separare a uraniului ar putea fi necesar, pentru a-l forța să treacă prin barierele primei trepte, un volum de 100 000 ori mai mare decît volumul gazului care ajunge la capătul cascadei (adică sub forma produsului dorit $^{235}U_6F_{12}$).

23-6. Forțele intermoleculare

Forțele dintre molecule sînt de origine electromagnetică. Toate moleculele conțin sarcini electrice aflate în mișcare. Aceste molecule sînt neutre din punct de vedere electric, în sensul că sarcina negativă a electronilor este egală în modul și opusă ca semn cu sarcina nucleelor. Aceasta nu înseamnă însă că moleculele nu interacționează electric. De exemplu, atunci cînd două molecule se apropie una de alta, sarcinile de pe fiecare moleculă sînt perturbate și deviate ușor de la pozițiile lor obișnuite astfel încît distanța medie dintre sarcinile opuse în cele două molecule este ceva mai mică decît cea dintre sarcinile de același semn. Prin urmare, rezultă o forță intermoleculară atractivă. Această rearanjare internă are loc numai atunci cînd moleculele sînt destul de apropiate între ele, astfel încît aceste forțe acționează numai pe distanțe scurte; ele sînt forțe cu rază de acțiune mică. Dacă moleculele se apropie foarte mult între ele, astfel încît sarcinile lor exterioare încep să se suprapună, forța intermoleculară devine repulsivă. Moleculele se resping între ele deoarece nu există nici o posibilitate pentru o moleculă de a se rearanja intern pentru a împiedica repulsia electronilor exteriori adiacenți. Această repulsie de contact este aceea care explică caracterul ciocnirilor moleculare în gaze, de tipul ciocnirii unor bile de biliard. Dacă n-ar fi această repulsie, moleculele s-ar mișca recitliniu una prin alta fără a fi deviate (reflectate) prin ciocnire.

Să presupunem că moleculele sînt aproximativ sferic simetrice. Atunci putem descrie forțele intermoleculare grafic, reprezentînd energia potențială mutuală a două molecule, U , ca o funcție de distanță r dintre centrele lor. Forța F care acționează asupra fiecărei molecule este legată de energia potențială U prin relația $F = -dU/dr$. În figura 23-3, a este reprezentată o curbă tipică $U(r)$. Ne putem ima-

gina aici că o moleculă este fixă în O. Atunci cealaltă moleculă va fi respinsă de O atunci când panta lui U este negativă și va fi atrasă de O atunci când panta este pozitivă. În r_0 între molecule nu acționează nici o forță; panta este acolo nulă. În figura 23-3, b este reprezentată forța reciprocă $F(r)$ care corespunde acestei funcții a energiei potențiale. Linia E din figura 23-3, a reprezintă energia mecanică totală a moleculelor care se ciocnesc. Intersecția lui $E_p(r)$ cu această linie dă un „punct de întoarcere” al mișcării (vezi paragraful 8-5). Distanța dintre centrele celor două molecule în punctul de întoarcere reprezintă distanța de maximă apropiere. Distanța de separație la care energia potențială mutuală este nulă, poate fi luată ca distanța aproximativă de apropiere maximă într-o ciocnire și deci ca diametru al moleculei. Pentru molecule simple diametrul este de aproximativ $2,5 \cdot 10^{-10}$ m. Forțele dintre molecule practic încetează la aproximativ 10^{-9} m sau patru diametre distanță, astfel încît forțele moleculare au o rază de acțiune foarte scurtă. Distanța r_0 la care potențialul este minim (punctul de echilibru) este de aproximativ $3,5 \cdot 10^{-10}$ m pentru moleculele simple. Desigur, diferitele molecule au dimensiuni diferite și aranjamente interne diferite ale sarcinilor, astfel încît forțele intermoleculare variază de la o moleculă la alta. Cu toate acestea, ele manifestă totdeauna comportarea calitativă indicată în figuri.¹

În starea solidă moleculele vibrează în jurul poziției de echilibru r_0 , energia lor totală E fiind negativă, adică situată sub axa orizontală din figura 23-3, a. Moleculele nu au suficientă energie pentru a evada din groapa de potențial (adică pentru a se elibera de forța de legătură atractivă). Centrele de vibrație O sînt mai mult sau mai puțin fixe într-un solid. Într-un lichid moleculele au o energie de vibrație mai mare în jurul centrelor care sînt libere să se miște dar care rămîn aproximativ la aceeași distanță unele de altele. Aceste molecule au energia cinetică maximă în stare gazoasă. Într-un gaz distanța medie dintre molecule este mult mai mare decît raza efectivă de acțiune a forțelor intermoleculare și moleculele se mișcă rectiliniu între ciocniri. Clerk Maxwell discută relația dintre modelul teo-

¹ Vezi „Forțele intermoleculare”, de B. V. Derjaguin, *Scientific American*, July 1960, pentru o discuție a măsurării atracțiilor moleculare între corpuri macroscopice.

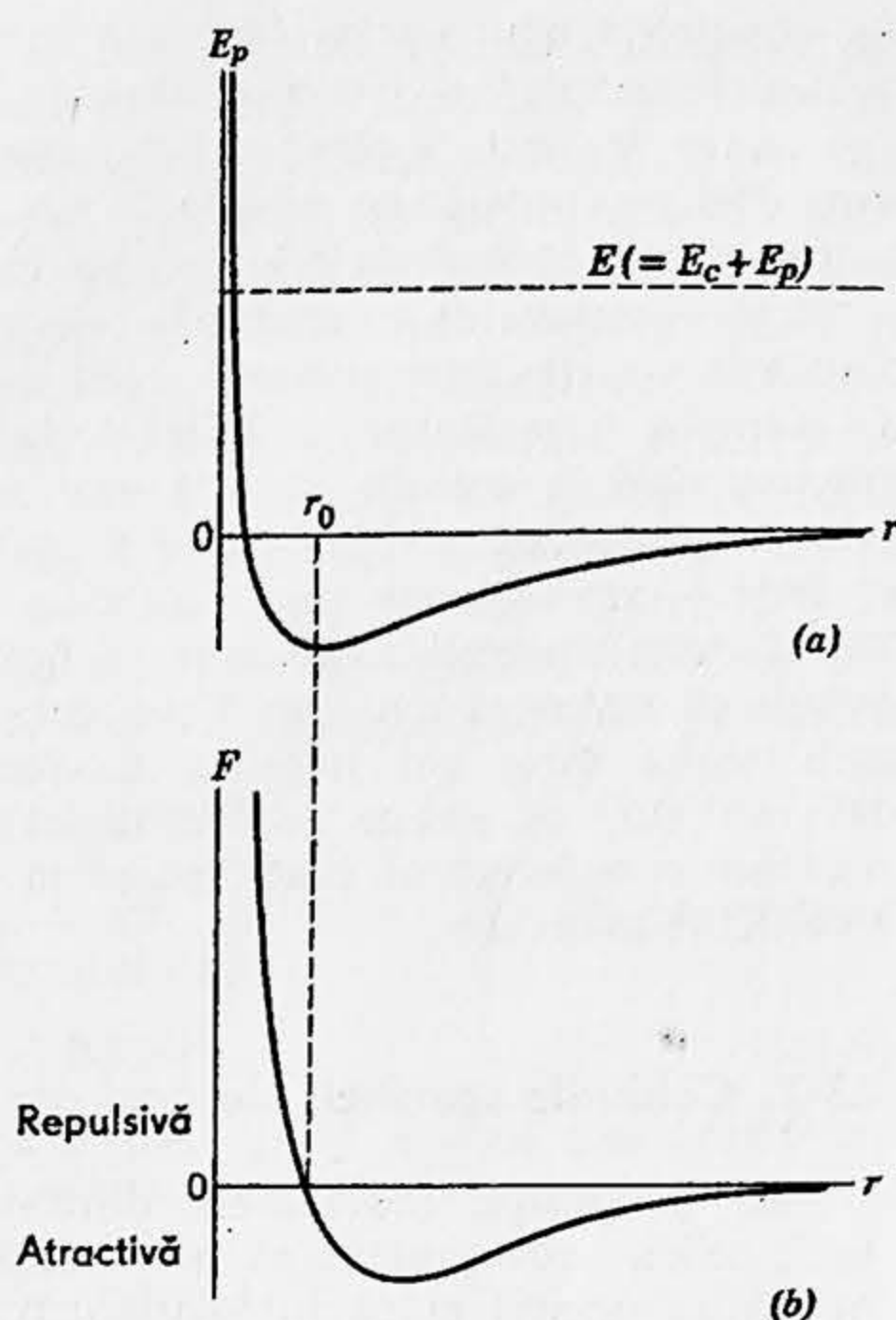


Figura 23-3. (a) Energia potențială mutuală a două molecule în funcție de distanța dintre ele. E reprezintă energia lor mecanică totală ($=E_c + E_p$). (b) Forța mutuală, $-dE_p/dr$ care corespunde acestei energii potențiale. E_p este minim pentru r_0 pentru care $F=0$.

riei cinetice a unui gaz și forțele intermoleculare astfel: „În loc de a spune că particulele sînt tari, sferice și elastice, putem, dacă dorim, să spunem că particulele sînt centre de forță a căror acțiune este insensibilă cu excepția unei mici distanțe cînd ea apare brusc ca o forță repulsivă de intensitate foarte mare. Este evident că fiecare ipoteză duce la aceleași rezultate“.

Este interesant de comparat forțele intermoleculare măsurate cu forța gravitațională de atracție între molecule. Dacă alegem o distanță de separație de $4 \cdot 10^{-10}$ m, de exemplu, forța dintre doi atomi de heliu va fi de aproximativ $6 \cdot 10^{-13}$ N. Forța gravitațională la această distanță este de aproximativ $7 \cdot 10^{-42}$ N, mai mică decît forța intermoleculară cu un factor de 10^{29} ! Acesta este un rezultat tipic care arată că forțele gravitaționale sînt neglijabile în comparație cu forțele intermoleculare. Deși forțele intermoleculare apar ca forțe mici față de standardele obișnuite, nu trebuie să uităm că masa unei molecule este atît de mică (aproximativ 10^{-26} kg) încît aceste forțe pot imprima accelerații instantanee de ordinul de mărime 10^{15} m/s² (10^{14} g). Aceste accelerații pot dura doar un timp foarte scurt, desigur, deoarece o moleculă se poate îndepărta foarte repede dincolo de raza de acțiune a celeilalte molecule.

23-7. Căldurile specifice ale unui gaz ideal

Ne imaginăm moleculele dintr-un gaz ideal ca niște sfere elastice tari; adică presupunem că nu există forțe între molecule exceptînd momentul ciocnirii și că moleculele nu sînt deformate prin ciocniri. Dacă este așa, atunci nu există energie potențială internă și energia internă a unui gaz ideal este în întregime cinetică. Am mai găsit deja că energia cinetică medie de translație per moleculă este $\frac{3}{2}kT$, astfel încît energia internă U a unui gaz ideal care conține N molecule este¹:

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \mu RT. \quad (23-8)$$

Această prevedere a teoriei cinetice spune că *energia internă a unui gaz ideal este proporțională cu temperatura absolută (Kelvin) și depinde numai de temperatură*, fiind independentă de presiune și volum. Cu acest rezultat putem obține acum informații asupra căldurilor specifice ale unui gaz ideal.

Căldura specifică a unei substanțe este căldura necesară unității de masă pentru o variație a temperaturii egală cu un grad. O unitate convenabilă pentru masă este molul. Căldura specifică corespunzătoare se numește căldura molară și este reprezentată prin litera C . Numai două tipuri de călduri molare sînt importante pentru gaze și anume căldura molară la volum constant C_v și căldura molară la presiune constantă C_p .

Fie un anumit număr de moli de gaz ideal conținuți într-un cilindru cu piston ca în figura 23-4, a. Cilindrul este așezat pe un rezervor de căldură a cărui temperatură poate fi mărită sau micșorată după dorință,

¹ Vom vedea în paragraful 23-8 că acest rezultat se aplică numai gazelor monoatomice pentru care energiile de rotație și vibrație nu sînt posibile. Numai în acest caz putem egala pe U cu energia cinetică de translație.

astfel încît putem transmite căldură sistemului sau evacua căldură, după dorință. Gazul are o presiune p astfel încît forța exercitată de el în sus asupra pistonului (fără frecări) echilibrează greutatea pistonului și greutatea nisipului. Starea sistemului este reprezentată prin punctul a în diagrama p — V din figura 23-4, d ; această diagramă prezintă două linii izoterme, toate punctele de pe una din ele corespund temperaturii T și toate punctele de pe cealaltă corespund temperaturii (mai mari) $T + \Delta T$.

Să mărim acum temperatura sistemului cu ΔT , măbind încet temperatura rezervorului. În timpul cît facem aceasta, să adăugăm nisip pe piston astfel încît volumul V să nu varieze. Acest proces la volum constant (izocor) duce sistemul de la starea inițială din figura 23-4, a la starea finală din figura 23-4, c . În mod corespunzător, el trece din punctul a în punctul c din figura 23-4, d . Să aplicăm primul principiu al termodinamicii.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

acestui proces. Prin definiția lui C_v avem $\Delta Q = \mu C_v \Delta T$. De asemenea $\Delta W (= p \Delta V) = 0$, deoarece $\Delta V = 0$. În modul acesta

$$\Delta U = \mu C_v \Delta T. \quad (23-9)$$

Să readucem sistemul la starea sa inițială și să mărim din nou temperatura sa cu ΔT , lăsînd de data aceasta cantitatea de nisip neatinsă,

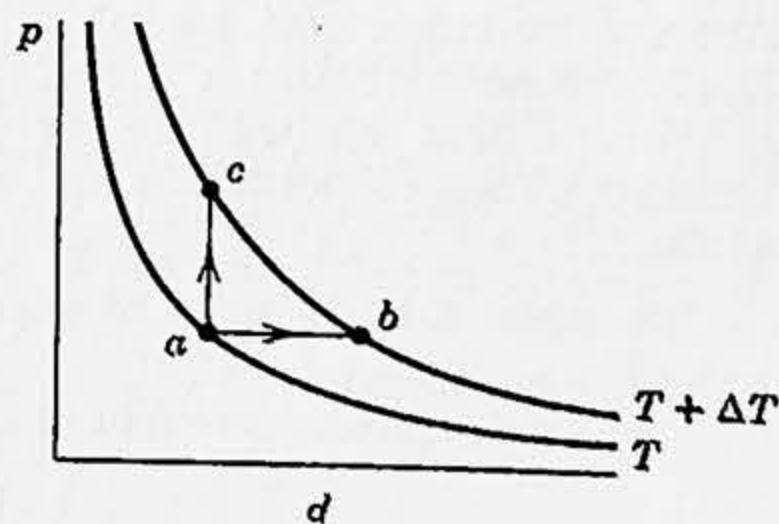
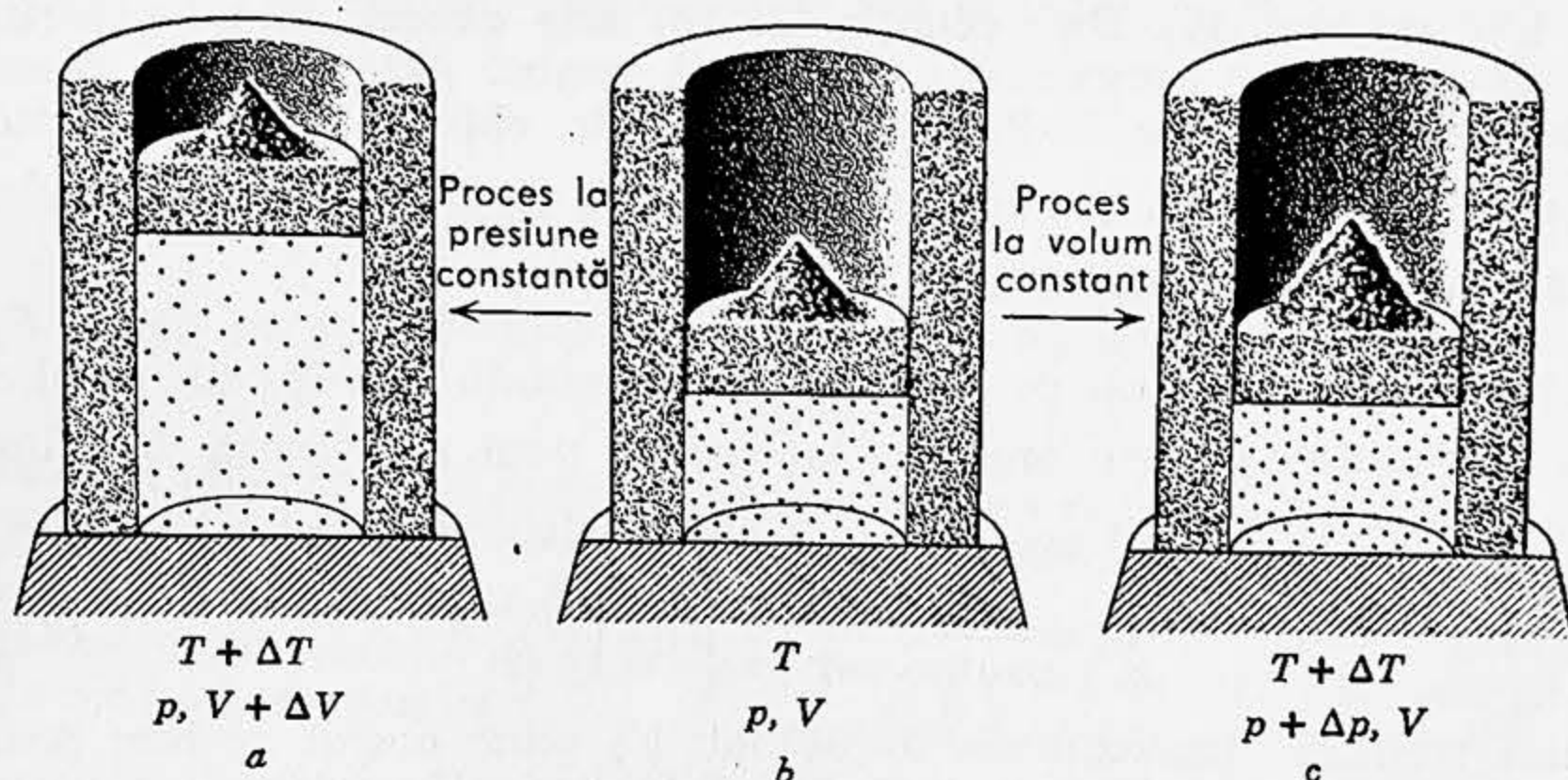


Figura 23-4. Temperatura unei mase date de gaz este mărită cu aceeași cantitate cu ajutorul unui proces la presiune constantă ($a \rightarrow b$) și cu ajutorul unui proces la volum constant ($a \rightarrow c$).

astfel încât presiunea p să nu varieze. Acest proces la presiune constantă (izobar) duce sistemul de la starea inițială din figura 23-4, a la starea finală din figura 23-4, b . În mod corespunzător, el trece din punctul a în punctul b în figura 23-4, d . Să aplicăm primul principiu acestui proces. Prin definiția lui C_p , avem $\Delta Q = \mu C_p \Delta T$. De asemenea, $\Delta W = p \Delta V$. Dar pentru un gaz ideal U depinde numai de temperatură. Deoarece procesele $a \rightarrow b$ și $a \rightarrow c$ din figura 23-4 implică aceeași variație ΔT de temperatură, ele trebuie să implice de asemenea aceeași variație ΔU a energiei interne, și anume cea dată de ecuație (23-9). În modul acesta, pentru procesul la presiune constantă primul principiu dă

$$\mu C_p \Delta T = \mu C_v \Delta T + p \Delta V.$$

Să aplicăm ecuația de stare $pV = \mu RT$ procesului izobar $a \rightarrow b$. Pentru p constant avem, luând diferențele:

$$p \Delta V = \mu R \Delta T.$$

Combinînd aceste ecuații, obținem

$$C_p - C_v = R. \quad (23-10)$$

Aceasta arată că căldura molară a unui gaz ideal la presiune constantă este totdeauna mai mare decît căldura molară la volum constant cu o cantitate egală cu constanta universală a gazelor R (8,31 J/mol. K sau 1,99 cal/mol. K). Deși ecuația (23-10) este exactă numai pentru un gaz ideal, ea este aproximativ adevărată pentru gaze reale la presiuni moderate (vezi tabela 23-2). Observăm că în obținerea acestui rezultat nu am folosit relația particulară $U = \frac{3}{2} \mu RT$, ci numai faptul că U depinde numai de temperatură.

Dacă putem calcula pe C_v , atunci ecuația (23-10) ne va da pe C_p și reciproc. Putem obține pe C_v combinînd ecuația (23-9) cu rezultatul teoriei cinetice pentru energia internă a unui gaz ideal, $U = \frac{3}{2} \mu RT$ (ecuația 23-8). În locul acesteia, la limita variațiilor infinitezimale,

$$C_v = \frac{dU}{\mu dT} = \frac{d}{\mu dT} \left[\frac{3}{2} \mu RT \right] = \frac{3}{2} R. \quad (23-11)$$

Acest rezultat (aproximativ 3 cal/mol. K) este destul de bun pentru gaze monoatomice. El este însă într-o discordanță serioasă cu valorile obținute pentru gazele biatomice și poliatomice (vezi tabela 23-2). Aceasta ne sugerează faptul că ecuația (23-8) nu este în general corectă. Deoarece acea relație a rezultat direct din modelul teoriei cinetice, tragem concluzia că trebuie să schimbăm modelul, dacă teoria cinetică trebuie să supraviețuiască ca o aproximație utilă a comportării gazelor reale.

Exemplul 5. Să se arate că pentru un gaz ideal care suferă un proces adiabatic $pV^\gamma = \text{const}$, unde $\gamma = C_p/C_v$.

Să aplicăm primul principiu al termodinamicii

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W.$$

Pentru un proces adiabatic $\Delta Q = 0$. Pe ΔW îl înlocuim cu $p\Delta V$. Deoarece gazul este presupus ideal, U depinde numai de temperatură și din ecuația (23-9) $\Delta U = \mu C_v \Delta T$. Cu aceste substituții avem

$$Q = \mu C_v \Delta T + p\Delta V$$

sau

$$\Delta T = - \frac{p\Delta V}{\mu C_v}$$

Pentru un gaz ideal $pV = \mu RT$, astfel încît, dacă p , V și T suferă variații mici,

$$p\Delta V + V\Delta p = \mu R\Delta T$$

sau

$$\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{\mu R}$$

Egalînd aceste două expresii și folosind ecuația (23-10) ($C_p - C_v = R$) obținem după o rearanjare a termenilor,

$$p\Delta V C_p + V\Delta p C_v = 0.$$

Împărțind cu pVC_v și reamintindu-ne că prin definiție $C_p/C_v = \gamma$, obținem

$$\frac{\Delta p}{p} + \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0.$$

În cazul limită al variațiilor infinit mici aceasta se reduce la

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

care (presupunînd pe γ constant) poate fi integrat astfel

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const}$$

sau

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (23-12)$$

Valoarea constantei este proporțională cu cantitatea de gaz. În figura 23-5 sînt comparate comportarea izotermă și cea adiabatică a unui gaz ideal.

Exemplul 6. Comprimările și rarefierile într-o undă sonoră sînt practic adiabatică la frecvențele audibile. Să se arate că într-un astfel de caz viteza sunetului într-un gaz ideal este dată de

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

În capitolul 20 am arătat că viteza sunetului este $v = \sqrt{B/\rho}$, unde ρ este densitatea gazului și B modulul de compresibilitate al gazului, $B = -V(\Delta p/\Delta V)$. Modulul B va depinde însă de condițiile care prevalează atunci cînd presiunea variază. Dacă variația de presiune are loc suficient de încet, astfel încît putem presupune că temperatura rămîne constantă, avem la limita variațiilor infinitezimale:

$$B_{\text{izot}} = -V \left(\frac{dp}{dv} \right)_{\text{izot}} \quad (23-13)$$

Într-un proces izoterm al unui gaz ideal avem

$$pV = \text{const}$$

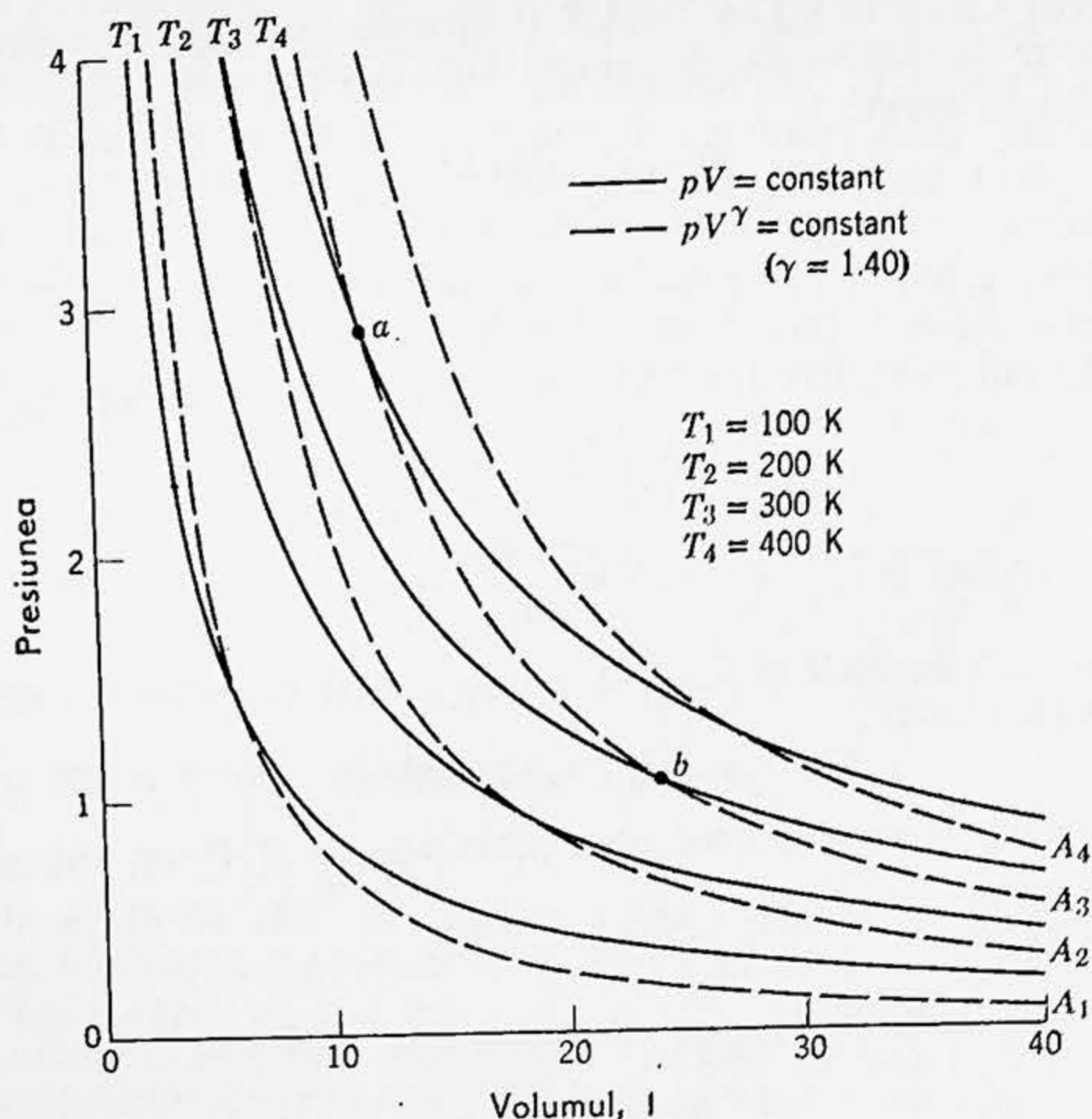


Figura 23-5. Curbele T_1 , T_2 și T_3 arată cum variază presiunea unui mol de gaz ideal odată cu variația volumului său, temperatura fiind menținută constantă (proces izoterm). Curbele A_1 , A_2 și A_3 arată cum variază presiunea unui gaz ideal atunci când volumul său variază, gazul neabsorbând și ncedind căldură (proces adiabatic). O creștere adiabatică a volumului (de exemplu mergînd de la a la b de-a lungul lui A_3) este întotdeauna însoțită de o descreștere a temperaturii, deoarece în a avem $T=400$ K, în timp ce în b avem $T=300$ K.

sau după derivare în raport cu V ,

$$p + V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{izot} = 0$$

Combinat cu ecuația (23-13) aceasta dă

$$B_{izot} = p.$$

Într-o undă sonoră însă variațiile sînt atît de rapide încît condițiile nu sînt izoterme ci apropiate de condiții adiabatic. Modulul de compresiune corespunzător este atunci

$$B_{adiab} = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{adiab} \quad (23-14)$$

Într-un proces adiabatic al unui gaz ideal

$$pV^\gamma = \text{const}$$

sau după derivare în raport cu V ,

$$p\gamma V^{\gamma-1} + V^{\gamma} \left(\frac{dp}{dV} \right)_{adlab} = 0.$$

Aceasta, combinată cu ecuația (23-14), dă

$$B_{adlab} = \gamma p$$

și pentru viteza sunetului

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (23-15)$$

Newton a dedus în 1710 o formulă pentru viteza sunetului în care a presupus condiții izoterme și nu adiabatică. El a obținut $v = \sqrt{p/\rho}$ în locul valorii corecte $\sqrt{\gamma p/\rho}$. Eroarea a fost relevată de Laplace în 1818. Trebuie să ne amintim că la acea dată, conceptul de energie nu era încă înțeles și știința termodinamicii nu exista încă. Modifică acest rezultat pe cel obținut în exemplul 4? Puteți explica acum de ce viteza sunetului într-un gaz nu este aceeași ca viteza pătratică medie a moleculelor de gaz.

23-8. Echipartiția energiei

O modificare a modelului teoriei cinetice destinată să explice căldurile specifice ale gazelor a fost pentru prima dată sugerată de către Clausius în 1857. Reamintim că în modelul nostru am presupus că o moleculă se comportă ca o sferă elastică tare și am tratat energia sa cinetică ca fiind doar de translație pură. Căldura specifică prezisă a fost satisfăcătoare pentru moleculele monoatomice. Mai departe, datorită succesului acestui model simplu în celelalte privințe în prezicerea comportării corecte a gazelor de toate felurile pe intervale largi de temperatură, avem convingerea că energia cinetică medie de translație este aceea care determină ceea ce măsurăm noi ca temperatură a unui gaz.

În cazul căldurilor specifice însă, avem de a face cu toate modurile posibile de absorbire a energiei și trebuie să ne întrebăm dacă o moleculă poate sau nu înmagazina energie internă într-o formă alta decât energia cinetică de translație. Aceasta ar fi sigur așa dacă am reprezenta o moleculă, nu ca o particulă rigidă, ci ca un obiect cu structură internă. Deoarece atunci o moleculă s-ar putea roti și vibra, tot atât de bine ca și mișca prin translație. Modurile de mișcare de rotație și de vibrație ar putea fi excitate în ciocniri și aceasta ar contribui la energia internă a gazului. Iată deci un model care ne permite să modificăm formula teoriei cinetice pentru energia internă a unui gaz.

Să găsim acum energia totală a unui sistem conținând un număr mare de astfel de molecule, în care fiecare moleculă este privită ca un obiect având structură internă. Energia va consta din energia cinetică de translație, cu termeni de tipul $\frac{1}{2}mv_x^2$; din energia cinetică de rotație, cu termeni de tipul $\frac{1}{2}I\omega_x^2$; din energie cinetică de vibrație a atomilor

țile nu sînt
corespunzător

(23-14)

într-o moleculă cu termeni de tipul $\frac{1}{2} \mu v^2$ (unde μ este masa redusă) și din energia potențială de vibrație a atomilor din moleculă cu termeni de tipul $\frac{1}{2} kx^2$. Deși există și alte feluri de contribuție la energie, cum ar fi cea magnetică, pentru gaze putem descrie energia totală destul de precis prin termeni de tipul celor de mai sus. Deși acești termeni au origini diferite, toți au aceeași formă matematică și anume o constantă pozitivă înmulțită cu pătratul unei mărimi care poate lua valori negative sau pozitive. Se poate arăta în baza mecanicii statistice că dacă numărul particulelor este mare și este valabilă mecanica lui Newton, toți acești termeni au aceeași valoare medie și această valoare medie depinde numai de temperatură. Cu alte cuvinte, energia disponibilă depinde numai de temperatură și se distribuie în părți egale pe fiecare mod independent în care moleculele pot absorbi energie. Această teoremă, enunțată aici fără demonstrație se numește *echipartiția energiei*, și a fost dedusă de Clerk Maxwell. Fiecare astfel de mod independent de absorbție de energie se numește *grad de libertate*.

Din ecuația (23-8) știm că energia cinetică de translație pentru un mol de molecule de gaz este $\frac{3}{2} RT$. Energia cinetică de translație pentru un mol este însă suma a trei termeni și anume $\frac{1}{2} M \overline{v_x^2}$, $\frac{1}{2} M \overline{v_y^2}$ și $\frac{1}{2} M \overline{v_z^2}$. Teorema echipartiției cere ca fiecare astfel de termen să contribuie cu aceeași cantitate la energia totală per mol sau cu $\frac{1}{2} RT$ pe grad de libertate.

În cazul gazelor monoatomice moleculele au numai mișcare de translație (nu au structură internă în teoria cinetică), astfel încît $U = \frac{3}{2} \mu RT$. Din ecuația (23-11) rezultă că $C_v = \frac{3}{2} RT \cong 3 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$. Atunci din ecuația (23-10), $C_p = \frac{5}{2} R$ și raportul căldurilor specifice este

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1,67.$$

Pentru un gaz biatomic ne putem imagina fiecare moleculă ca avînd forma unei haltere (două sfere legate printr-o tijă rigidă). O astfel de moleculă se poate roti în jurul oricăreia din cele trei axe perpendiculare între ele. Momentul de inerție în jurul axei de-a lungul tijei rigide ar putea fi neglijat însă în comparație cu momentele de inerție în jurul axelor perpendiculare pe tije, astfel încît energia de rotație ar consta numai din doi termeni¹, cum sînt $\frac{1}{2} I \omega_y^2$ și $\frac{1}{2} I \omega_z^2$. Fiecare grad de liber-

¹ Noi am exclus deja posibilitatea ca o moleculă monoatomică să se poată roti. În realitate, ea s-ar putea învîrți în jurul oricăreia din cele trei axe perpendiculare între ele dacă ar avea vreo extindere, cum este o sferă finită. Am adoptat deci implicit punctul material ca model al atomului. În consecință, pentru o moleculă biatomică am suprimat unul dintre gradele de libertate de rotație, deoarece două puncte materiale legate printr-o linie rigidă nu au mișcare în jurul axei de-a lungul acelei linii.

tate de rotație trebuie să contribuie, conform echipartiției, cu aceeași energie ca și fiecare grad de libertate de translație, astfel încît pentru un gaz biatomic care are atît mișcare de rotație cît și mișcare de translație,

$$U = 3 \mu \left(\frac{1}{2} RT \right) + 2 \mu \left(\frac{1}{2} RT \right) = \frac{5}{2} \mu RT$$

sau

$$C_v = \frac{dU}{\mu dT} = \frac{5}{2} R \cong 5 \text{ cal/mol} \cdot \text{K} \quad (20,8 \text{ J/mol} \cdot \text{K})$$

și

$$C_p = C_v + R = \frac{7}{2} R$$

sau

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,40.$$

Pentru gaze poliatomice fiecare moleculă conține trei sau mai multe sfere (atomi) legate laolaltă prin tije în modelul nostru, astfel încît molecula este capabilă să se rotească energetic în jurul fiecăreia din cele trei axe perpendiculare. În consecință, pentru un gaz poliatomic care are atît mișcare de rotație cît și mișcare de translație

$$U = 3 \mu \left(\frac{1}{2} RT \right) + 3 \mu \left(\frac{1}{2} RT \right) = 3 \mu RT,$$

sau

$$C_v = \frac{dU}{\mu dT} = 3 R = 6 \text{ cal/mol} \cdot \text{K} \quad (24,9 \text{ J/mol} \cdot \text{K})$$

și

$$C_p = 4 R$$

sau

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,33.$$

Să ne întoarcem acum la experiență pentru a verifica aceste idei. În tabela 23-2 indicăm căldurile molare determinate experimental pentru gazele obișnuite la 20°C și 1,0 atm. Observăm că pentru gazele monoatomice și biatomice valorile lui C_v , C_p și γ sînt apropiate de predicțiile gazului ideal. În unele gaze biatomice cum este clorul, și în majoritatea gazelor poliatomice, căldurile specifice sînt mai mari decît valorile prezise. Nici γ nu manifestă vreo regularitate simplă pentru gazele poliatomice. Aceasta ne spune că modelul nostru nu este încă suficient de apropiat de realitate.

Nu am considerat încă contribuții la energie din partea vibrațiilor atomilor din moleculele biatomice și poliatomice adică putem modifica modelul halterei și să unim sferele cu resorturi în locul tijei.

Acest nou model va îmbunătăți mult rezultatele noastre în unele cazuri. Dar în loc de a avea un model teoretic pentru toate gazele, cerem acum un model empiric care diferă de la gaz la gaz. Putem obține o imagine destul de bună a comportării moleculelor în acest mod și modelul empiric este de aceea util; dar atunci el încetează de a fi fundamental.

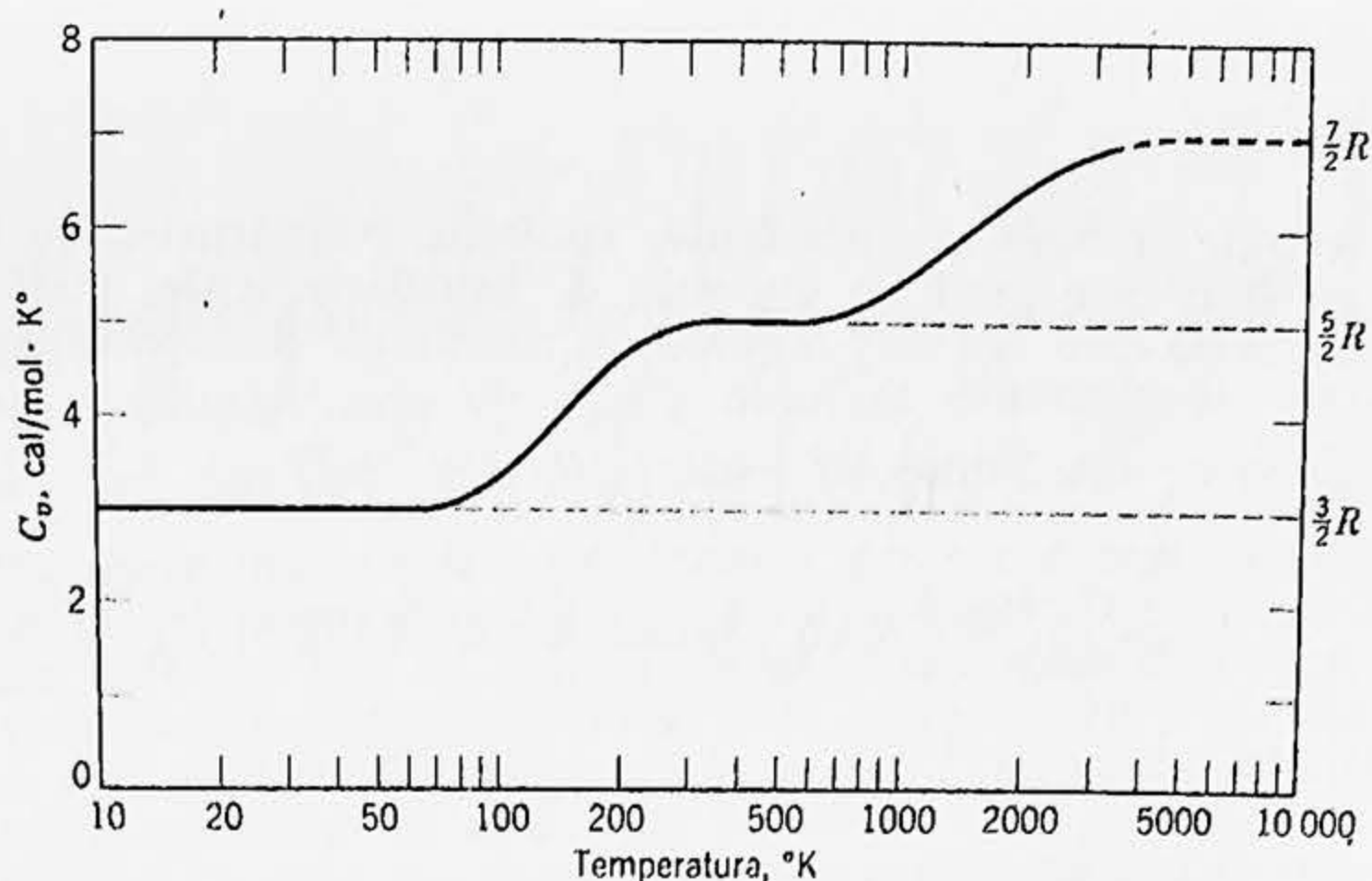


Figura 23-6. Variația căldurii molare C_v a hidrogenului cu temperatura. Observăm că T este desenat într-o scară logaritmică. Hidrogenul disociază înainte de atingerea temperaturii de 3 200 K. Curba punctată corespunde unei molecule biatomice care nu disociază înainte de atingerea temperaturii de 10 000 K.

Pentru a vedea aceasta mai clar, să considerăm figura 23-6 care arată variația căldurii molare a hidrogenului cu temperatura. Valoarea de 5 cal/mol·K, care este prezisă pentru molecule biatomice în modelul nostru, este caracteristică pentru hidrogen numai în intervalul de temperatură de la aproximativ 250 K pînă la 750 K. Deasupra lui 750 K, C_v crește continuu către 7 cal/mol·K, iar sub 250 K, C_v descrește continuu către 3 cal/mol·K. Alte gaze manifestă variații analoage ale căldurii molare cu temperatura.

Tipul de gaz	Gazul	C_p , cal/mol.K	C_v , cal/mol.K	$C_p - C_v$	$\gamma = C_p/C_v$
Monoatomic	He	4,97	2,98	1,99	1,67
	A	4,97	2,98	1,99	1,67
Biatomic	H ₂	6,87	4,88	1,99	1,41
	O ₂	7,03	5,03	2,00	1,40
	N ₂	6,95	4,96	1,99	1,40
	Cl ₂	8,29	6,15	2,14	1,35
Poliatomic	CO ₂	8,83	6,80	2,03	1,30
	SO ₂	9,65	7,50	2,15	1,29
	C ₂ H ₆	12,35	10,30	2,05	1,20
	NH ₃	8,80	6,65	2,15	1,31

Aici există o explicație posibilă. La temperaturi joase se pare că (vezi exemplul 7) molecula de hidrogen are numai energie de translație și din anumite motive nu se poate roti. Cînd temperatura crește rotația

devine posibilă astfel încît la temperaturi „obișnuite“ o moleculă de hidrogen acționează ca în modelul halterei. La temperaturi înalte, ciocnirile dintre molecule obligă atomii din moleculă să vibreze și molecula încetează de a se comporta ca un corp rigid. Alte gaze, datorită structurii lor moleculare diferite, pot manifesta aceste efecte la temperaturi diferite. Astfel o moleculă de clor vibrează la temperatura camerei.

Deși această descriere este în esență corectă și noi am obținut multă introspecție în comportarea moleculelor, această comportare contrazice teoria cinetică clasică. Deoarece teoria cinetică este bazată pe mecanica newtoniană aplicată unei colecții mari de particule, rezultă că și echipartiția energiei este o consecință necesară a acestei mecanici statistice clasice. Dar dacă *echipartiția energiei este valabilă, atunci indiferent de ce se întîmplă cu energia internă totală cînd temperatura variază, fiecare fracțiune de energie — de translație, de rotație și de vibrație — trebuie să se distribuie în mod egal în timpul variației*. Nu există nici un mecanism clasic pentru a schimba un mod de energie mecanică dintr-odată într-un astfel de sistem. Teoria cinetică cere ca căldurile specifice ale gazului să fie independente de temperatură.

Prin urmare, am ajuns la limita de valabilitate a mecanicii clasice cînd încercăm să explicăm structura atomului (sau moleculei). Așa cum principiile newtoniene nu mai sînt valabile la viteze foarte mari (aproprate de viteza luminii) tot astfel aici în regiunea unor dimensiuni foarte mici, ele încetează să mai fie valabile. Teoria relativității modifică ideile lui Newton pentru a explica comportarea sistemelor fizice în domeniul vitezelor mari. Fizica cuantică este aceea care modifică ideile newtoniene pentru a explica comportarea sistemelor fizice în regiunea dimensiunilor mici. Atît teoria relativității cît și mecanica cuantică sînt generalizări ale teoriei clasice în sensul că ele dau rezultatele newtoniene corecte în domeniile în care fizica newtoniană a descris precis observațiile experimentale. În următoarele două capitole ne vom restrînge atenția la aplicarea foarte fructuoasă a termodinamicii și teoriei cinetice la sisteme „clasice“.

Exemplul 7. Conform teoriei cuantice energia internă a unui atom (sau moleculă) este „cuantificată“, adică atomul nu poate avea valori continue ale energiei interne ci numai anumite valori discrete. Fîind excitat din starea sa de energie minimă, spre o stare mai înaltă, atomul poate restitui această energie emîtînd radiație a cărei energie este egală cu diferența de energie dintre starea de energie internă superioară și cea inferioară a atomului.

Atunci cînd doi atomi se ciocnesc, o parte din energia lor cinetică de translație poate fi transformată în energie internă a unuia sau ambilor atomi. Pentru un astfel de caz ciocnirea este neelastică, deoarece energia cinetică de translație nu se conservă. Într-un gaz, energia cinetică medie de translație a unui atom este $\frac{3}{2}kT$. Cînd temperatura crește cu o valoare pentru care $\frac{3}{2}kT$ este aproximativ egal cu o energie de excitație internă permisă a atomului, atunci un număr apreciabil de atomi pot absorbi destulă energie prin ciocniri neelastice pentru a urca în această stare de energie internă superioară. Putem detecta aceasta deoarece după un anumit interval de timp, va fi emisă o radiație corespunzătoare energiei absorbite.

(a) Să se calculeze energia cinetică medie de translație per moleculă într-un gaz aflat la temperatura camerei.

Avem, pentru $T=300\text{ K}$,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} kT &= \frac{3}{2} (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/moleculă} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K} = \\ &= 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J/moleculă} = 3,88 \cdot 10^{-2} \text{ eV/moleculă}.\end{aligned}$$

Aceasta reprezintă aproximativ $1/25$ eV per moleculă. Unele molecule vor avea energii mai mari iar altele energii mai mici decât această valoare medie.

(b) Prima stare excitată (internă) permisă a unui atom de hidrogen este cu $10,2\text{ eV}$ deasupra stării (fundamentale) celei mai coborâte. Ce temperatură este necesară pentru a excita un număr „mare” de atomi de hidrogen ca să emită o radiație cu această energie?

Cerem ca

$$\frac{3}{2} kT = 10,2 \text{ eV}$$

și avem din formula precedentă

$$\frac{3}{2} k(300 \text{ K}) = \frac{1}{25} \text{ eV}.$$

Prin urmare

$$T = 300 \text{ K} \cdot 10,2 / \left(\frac{1}{25} \right) \cong 7,5 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

În realitate, deoarece multe molecule au energii mult mai mari decât valoarea medie, o excitație apreciabilă poate avea loc la temperaturi ceva mai joase.

Putem acum aprecia de ce ipoteza teoriei cinetice că moleculele pot fi privite ca neavând structură internă și ciocnindu-se elastic între ele, este valabilă la temperaturi obișnuite. Numai la temperaturi destul de înalte, care să dea moleculelor o energie cinetică medie de translație comparabilă cu diferența de energie dintre starea cea mai joasă și prima stare excitată permisă a moleculei, structura internă a moleculei se va schimba și ciocnirile vor deveni neelastice. În adevăr, privind retrospectiv, putem spune că o primă dovadă a faptului că energia internă a unui atom este cuantificată, exista în experiențele cu ciocnirile din gaz și că germenii teoriei cuantice se găsesc în teoria cinetică a gazelor¹.

Întrebări

1. Discutând faptul că este imposibil de aplicat legile mecanicii în mod individual atomilor într-un sistem macroscopic, Mayer și Mayer afirmă: „Însăși complexitatea problemei (adică faptul că numărul atomilor este mare) este secretul soluției ei”. Să se discute această afirmație.

2. În teoria cinetică presupunem că există un număr mare de molecule în gaz. Gazele reale se comportă ca un gaz ideal la densități mici. Sînt aceste afirmații contradictorii? Dacă nu, ce concluzii puteți trage din ele?

3. Am presupus că pereții vasului sînt elastici pentru ciocnirile molecu-

¹ Vezi „Asupra studiului fenomenelor cuantice”, de Sir N. F. Mott în *Contemporary Physics*, august 1964.

lare. În realitate, pereții pot fi neelastici. În practică aceasta nu duce la nici o diferență atâta timp cât pereții se află la aceeași temperatură ca și gazul. Să se explice.

4. În cazul ciocnirilor neelastice macroscopice energia este pierdută prin frecarea internă care rezultă, ducând la o creștere a temperaturii datorită creșterii agitației moleculare interne. Există o pierdere a energiei mecanice în căldură într-o ciocnire neelastică între molecule?

5. Ce justificare există în neglijarea variației energiei potențiale gravitaționale a moleculelor într-un gaz?

6. Am presupus că forța exercitată de molecule asupra peretelui unui vas este continuă în timp. Cum justificați aceasta?

7. Viteza medie a moleculelor într-un gaz trebuie să fie nulă dacă gazul ca un întreg și vasul nu se află în mișcarea de translație. Explicați cum se face că viteza absolută medie nu este nulă.

8. Considerând mărimile care trebuie să se conserve într-o ciocnire elastică, să se arate că în general moleculele unui gaz nu pot avea aceleași viteze după o ciocnire așa cum au avut-o înainte de ciocnire. Este atunci posibil ca un gaz să conste din molecule care să aibă aceeași viteză absolută?

9. Să se justifice faptul, că presiunea unui gaz depinde de pătratul vitezei particulelor sale, explicând dependența presiunii de frecvența de ciocnire și de transferul de impuls al particulelor.

10. Temperatura cinetică a gazului din atmosfera superioară (vezi ecuația 23-5) este de ordinul lui 1 000 K,

dar este foarte frig acolo. Să se explice acest paradox.

11. De ce timpul permis pentru separarea prin difuzie trebuie să fie relativ scurt?

12. Să presupunem că vrem să obținem ^{235}U în loc de ^{238}U ca produs final al unui proces de difuzie. Vom folosi același proces? Dacă nu, explicați cum ar trebui modificat procesul de separare?

13. Puteți descrie un dispozitiv centrifugal pentru separarea gazelor? Este o centrifugă mai bună decât o cameră de difuzie pentru separarea gazelor?

14. Vă așteptați ca moleculele reale să fie sferic simetrice? Dacă nu, cum s-ar schimba funcția energiei potențiale din figura 23-3?

15. Explicați cum am putea menține un gaz la o temperatură constantă într-un proces termodinamic?

16. Să se explice de ce temperatura unui gaz scade într-o destindere adiabatică.

17. Dacă aerul cald urcă, de ce este mai rece în vârful unui munte decât în apropierea nivelului mării?

18. Un balon de cauciuc închis ermetic conține un gaz foarte ușor. Balonul este lăsat liber și urcă sus în atmosferă. Să se descrie și să se explice comportarea termică și mecanică a balonului.

19. Să se explice de ce căldura specifică la presiune constantă este mai mare decât căldura specifică la volum constant.

20. Este mai comod de excitat radiație din atomii de gaz prin folosirea unei descărcări electrice, decât prin metode termice. De ce?

Probleme

1. La 0°C și presiunea de 1,000 atm densitățile aerului, oxigenului și azo-

tului sînt respectiv: 1,293 kg/m^3 , 1,429 kg/m^3 , și 1,251 kg/m^3 . Să se cal-

culeze procentajul de azot din aer din aceste date, presupunând că numai aceste două gaze sînt prezente în aer.

2. Să presupunem că, așa cum s-a întîmplat și din punct de vedere istoric, cunoaștem legea lui Boyle și Mariotte

$$pV = \text{const.} \quad (T \text{ constant})$$

și legea lui Gay-Lussac

$$V/T = \text{const.} \quad (p \text{ constant})$$

separat. Să se arate cum pot fi combinate aceste două legi pentru a da legea

$$pV/T = \text{const.}$$

3. O bulă de aer cu un volum de 20 cm^3 se află pe fundul unui lac de 40 m adîncime unde temperatura este 4°C . Bula urcă la suprafața apei care se află la temperatura de 20°C . Se va lua temperatura gazului, egală cu cea a apei înconjurătoare. Să se afle volumul bulei în momentul cînd atinge suprafața.

4. Un mol de gaz ideal suferă o destindere izotermă. Să se afle căldura absorbită de gaz în funcție de volumul inițial, volumul final și temperatură.

5. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a comprima $1,00 \text{ mol}$ de oxigen de la un volum de $22,4 \text{ l}$ aflat la 0°C și o presiune de $1,00 \text{ atm}$ pînă la un volum de $16,8 \text{ l}$ la aceeași temperatură.

6. O cantitate de oxigen gazos avînd un volum de $1,0 \text{ l}$ la 40°C și o presiune de 760 torr se destinde pînă ce volumul său devine $1,5 \text{ l}$ și presiunea 800 torr . Să se afle masa oxigenului exprimată în moli (numărul de moli) și temperatura sa finală.

7. O anvelopă de automobil are un volum de $16,4 \text{ dm}^3$ și conține aer la o presiune manometrică de $1,65 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, cînd temperatura este de 0°C . Care va fi presiunea manometrică a aerului din anvelope dacă temperatura lui

crește pînă la 27°C , iar volumul pînă la $16,7 \text{ dm}^3$?

8. Un manometru cu mercur avînd cele două ramuri neegale este închis ermetic la aceeași presiune p_0 în cele două ramuri, ca în figura 23-7. Aria secțiunii transversale a ramurilor manometrului este de $1,0 \text{ cm}^2$. La temperatură constantă se introduce printr-un robinet de la baza manometrului o cantitate adițională de 10 cm^3 de mercur; nivelul în stînga crește cu $6,0 \text{ cm}$, iar nivelul din dreapta crește cu $4,0 \text{ cm}$. Să se afle presiunea p_0 .

9. Un tub subțire închis la ambele capete are o lungime de $1,0 \text{ m}$. El este așezat orizontal, avînd la mijloc 10 cm mercur și în cele două extremități egale avînd aer la presiunea atmosferică normală. Dacă acum tubul este ridicat în poziție verticală, cu cit se va deplasa mercurul din tub?

10. Masa unei molecule de hidrogen (H_2) este $3,32 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Dacă 10^{23} molecule de hidrogen lovesc pe secundă $2,0 \text{ cm}^2$ dintr-un perete sub un unghi de 45° față de normală, mișcîndu-se cu o viteză de 10^3 m/s , ce presiune vor exercita ele asupra peretelui?

11. (a) Să se determine valoarea medie a energiei cinetice a moleculelor unui gaz ideal la $0,0^\circ\text{C}$ și la 100°C . (b) Care este energia cinetică per mol de gaz ideal la aceste temperaturi?

12. (a) Să se calculeze viteza pătratică medie a unui atom de argon

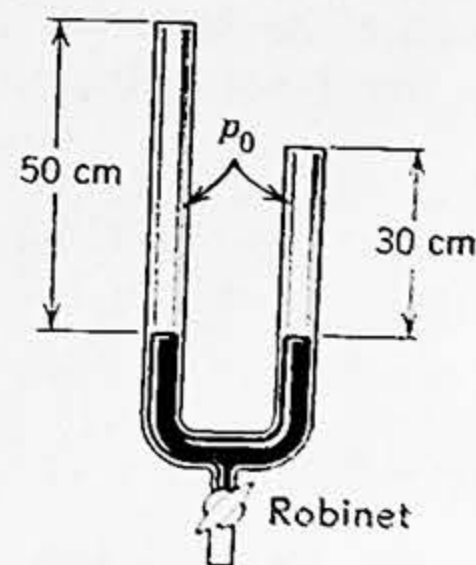


Figura 23-7.

la temperatura camerei (20°C). (b) La ce temperatură viteza pătratică medie va fi jumătate din această valoare? Dar de două ori această valoare?

13. (a) Să se calculeze temperatura la care viteza pătratică medie este egală cu viteza de evadare (cosmică) de pe suprafața Pământului pentru hidrogen. Pentru oxigen. (b) Să se calculeze același lucru pentru Lună, presupunând că gravitația la suprafața sa este de $0,164\text{ g}$. (c) Temperatura în atmosfera terestră superioară este de aproximativ 1000 K . Vă așteptați să găsiți mai mult hidrogen acolo? Mai mult oxigen?

14. La ce temperatură energia cinetică medie de translație a unei molecule este egală cu energia cinetică a unui electron accelerat din repaus de o diferență de potențial de 1 V (adică o energie de $1,0\text{ eV}$)?

15. Să se arate cum se pot afla vitezele pătratice medii ale moleculelor de heliu și argon la 40°C din cele ale moleculelor de oxigen (460 m/s la $0,00^{\circ}\text{C}$). Masa molară a oxigenului este 32 g/mol , a argonului 40 , a heliului 4 .

16. Să se calculeze numărul moleculelor dintr-un gaz conținut într-un volum de $1,00\text{ cm}^3$ la o presiune de $1,00 \cdot 10^{-3}\text{ atm}$ și o temperatură de 200 K .

17. Dacă moleculele de apă din $1,0\text{ g}$ de apă ar fi distribuite uniform pe suprafața Pământului, cât de multe molecule ar reveni atunci pe $1,0\text{ cm}^2$ de suprafață terestră?

18. O cantitate de oxigen gazos la 273 K și $1,00\text{ atm}$ presiune este închisă într-un vas cubic cu latura de 10 cm . Să se compare variația energiei potențiale gravitaționale a unei molecule de oxigen care cade pe înălțimea cutiei cu energia sa cinetică medie.

19. (a) Să considerăm un gaz ideal la 273 K și $1,0\text{ atm}$ presiune. Să ne imaginăm că moleculele sînt în cea mai mare parte distanțate regulat

aflîndu-se în centrele unor cuburi identice. Folosind numărul lui Avogadro și luînd diametrul unei molecule de $3,0 \cdot 10^{-8}\text{ cm}$ să se afle lungimea muchiei unui astfel de cub și să se compare această lungime cu diametrul unei molecule. (b) Să considerăm acum un mol de apă avînd un volum de 18 cm^3 . Să ne imaginăm din nou că moleculele sînt distanțate regulat în centrele unor cuburi identice. Să se afle lungimea muchiei unui astfel de cub și să se compare această lungime cu diametrul unei molecule.

20. La 273 K și $1,00 \cdot 10^{-2}\text{ atm}$, densitatea unui gaz este $1,24 \cdot 10^{-5}\text{ g/cm}^3$. (a) Să se afle v_{pm} a moleculelor de gaz. (b) Să se afle masa molară a gazului și să se identifice gazul.

21. Legea lui Avogadro afirmă că în aceleași condiții de temperatură și presiune, volume egale de gaz conțin același număr de molecule. Să se deducă această lege din teoria cinetică folosind ecuația (23-3) și ipoteza echipartiției energiei.

22. Legea lui Dalton afirmă că dacă mai multe gaze, care nu interacționează chimic între ele, se află împreună într-un vas, atunci presiunea exercitată de fiecare gaz component la temperatura dată este aceeași ca și presiunea pe care el ar exercita-o dacă ar ocupa singur întregul vas, și că presiunea totală este egală cu suma presiunilor parțiale ale gazelor componente. Să se deducă această lege din teoria cinetică, folosind ecuația (23-3).

23. Să se reprezinte și să se interpreteze din punct de vedere fizic: (a) variația densității gazului cu temperatura într-un proces izobar (presiune constantă) și (b) variația densității gazului cu presiunea într-un proces izoterm.

24. Să considerăm o masă dată de gaz ideal. Să se compare curbele care reprezintă procesele izobar, izocor și izoterm pe: (a) o diagramă p - V , (b) o diagramă p - T și (c) o diagramă V - T .

(d) Cum depind aceste curbe de masa gazului aer?

25. Masa unei molecule de gaz poate fi calculată din căldura specifică la volum constant. Luând $C_v = 0,075 \text{ kcal/mol}^\circ\text{K}$ pentru argon, să se calculeze: (a) masa unui atom de argon și (b) masa atomică a argonului.

26. Luând masa unui atom de heliu $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, să se calculeze căldura specifică la volum constant a heliului aeros.

27. Să se calculeze echivalentul mecanic al căldurii din valoarea lui R și din valorile lui C_v și γ pentru oxigen, din tabelul 23-2.

28. Următoarele date au rezultat din măsurători experimentale precise: 1,000 mol de gaz ocupă un volum de $2,041 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ la o presiune de $0,480 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ când temperatura sa este $200,0 \text{ K}$. Aceeași masă de gaz necesită $125,0 \text{ cal}$ pentru a-și crește temperatura de la $200,0 \text{ K}$ la $315,0 \text{ K}$ atunci când volumul este menținut constant. Raportul c_p/c_v al căldurilor sale specifice este $1,430$. (a) Folosind aceste date să se calculeze echivalentul mecanic al căldurii J . (b) Să se explice faptul că valoarea obținută a lui J diferă de valoarea acceptată cu trei cifre semnificative anume $4,19 \text{ J/cal}$.

29. Un mol de oxigen este încălzit la presiune constantă plecând de la $0,00^\circ\text{C}$. Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru a-i dubla volumul?

30. Zece grame de oxigen sînt încălzite la presiunea atmosferică constantă de la $27,0^\circ\text{C}$ la $127,0^\circ\text{C}$. Câtă căldură a fost transmisă oxigenului? Ce fracțiune din căldură este folosită pentru a mări energia internă a oxigenului?

31. Cum ați explica valoarea observată a lui $C_v = 7,50 \text{ cal/mol}^\circ\text{K}$ pentru SO_2 gazos la $15,0^\circ\text{C}$ și $1,00 \text{ atm}$?

32. Să se arate că viteza sunetului într-un gaz ideal nu depinde de presiune și densitate.

33. Să se arate că viteza sunetului în aer crește cu aproximativ $0,60 \text{ m/s}$ pentru fiecare creștere de temperatură de un grad Celsius în apropierea lui 0°C .

34. Viteza sunetului în diferite gaze la aceeași temperatură depinde de masa molară a gazelor. Să se arate că $v_1/v_2 = \sqrt{M_2/M_1}$ (T constant) unde v_1 este viteza sunetului în gazul de masă molară M_1 , iar v_2 este viteza sunetului în gazul de masă molară M_2 .

35. Aerul la $0,00^\circ\text{C}$ și $1,00 \text{ atm}$ presiune are o densitate de $1,291 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ și viteza sunetului în aer este de 332 m/s la acea temperatură. Să se calculeze raportul căldurilor specifice pentru aer.

36. (a) Un gaz ideal monoatomic, aflat inițial la 17°C , este comprimat brusc pînă la o zecime din volumul său inițial. Care va fi temperatura sa după comprimare? (b) Să se facă același calcul pentru un gaz biatomic.

37. Masa atomică a iodului este 127 . O undă staționară într-un tub umplut cu iod la 400 K are noduri distanțate cu $6,77 \text{ cm}$ când frecvența este de 1000 Hz . Este iodul gazos monoatomic sau este biatomic?

38. O mașină termică reversibilă lucrează cu $1,00 \text{ mol}$ de gaz ideal monoatomic după ciclul arătat în figura 23-8. Procesul 1—2 are loc la volum constant, procesul 2—3 este adiabatic, iar procesul 3—1 are loc la presiune

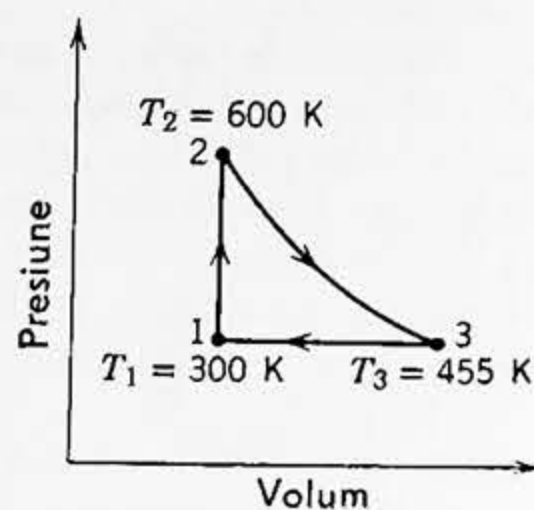


Figura 23-8.

constantă. (a) Să se calculeze valorile numerice aproximative pentru căldura ΔQ ; variația energiei interne ΔU și lucrul mecanic efectuat ΔW , pentru fiecare din cele trei procese pe întreg ciclul. (b) Dacă presiunea inițială în punctul 1 este de 1,00 atm, să se afle presiunea și volumele în punctele 2 și 3.

39. O masă de gaz ocupă un volum de 4,0 l la o presiune de 1,0 atm și o temperatură de 300 K. Ea este comprimată adiabatic pînă la un volum de 1,0 l. Să se determine; (a) presiunea finală și (b) temperatura finală, considerînd un gaz ideal pentru care $\gamma = 1,5$.

40. Un mol de gaz ideal se destinde adiabatic de la o temperatură inițială T_1 pînă la o temperatură finală T_2 . Să se arate că lucrul mecanic efectuat de gaz este $C_v (T_1 - T_2)$.

41. (a) Un litru de gaz cu $\gamma = 1,3$ se află la 273 K și presiunea de 1,0 atm. El este comprimat brusc pînă la jumătate din volumul său inițial. Să i se afle presiunea și temperatura finală. (b) Gazul este acum răcit pînă

la 0°C la presiune constantă. Care este volumul său final?

42. (a) Să se arate că variația presiunii în atmosfera terestră, presupusă izotermă, este dată de $p = p_0 e^{-Mgy/RT}$ unde M este masa molară a gazului. (Vezi exemplul 1, capitolul 17.) (b) Să se arate de asemenea că $n = n_0 e^{-Mgy/RT}$ unde n este numărul de molecule din unitatea de volum (concentrația moleculelor).

43. Un atom de hidrogen aflat în starea sa cea mai joasă (fundamentală) și mișcîndu-se cu o energie cinetică de 13 eV, se ciocnește frontal cu un alt atom de hidrogen care se află în repaus în starea sa fundamentală. (a) Să se folosească legile de conservare ale energiei și impulsului pentru a arăta că această ciocnire trebuie să fie elastică. Prima stare excitată permisă este cu aproximativ 10,2 eV deasupra stării fundamentale. (b) Să se arate că energia cinetică inițială minimă de care are nevoie atomul incident pentru a ridica unul din atomi pînă la prima stare excitată este de două ori mai mare decît diferența de energie dintre starea fundamentală și prima stare excitată.

Teoria cinetică a gazelor, (II)

24-1. Drumul liber mediu

Între ciocnirile succesive o moleculă de gaz se mișcă cu viteză constantă pe o linie dreaptă. Distanța medie între astfel de ciocniri succe-

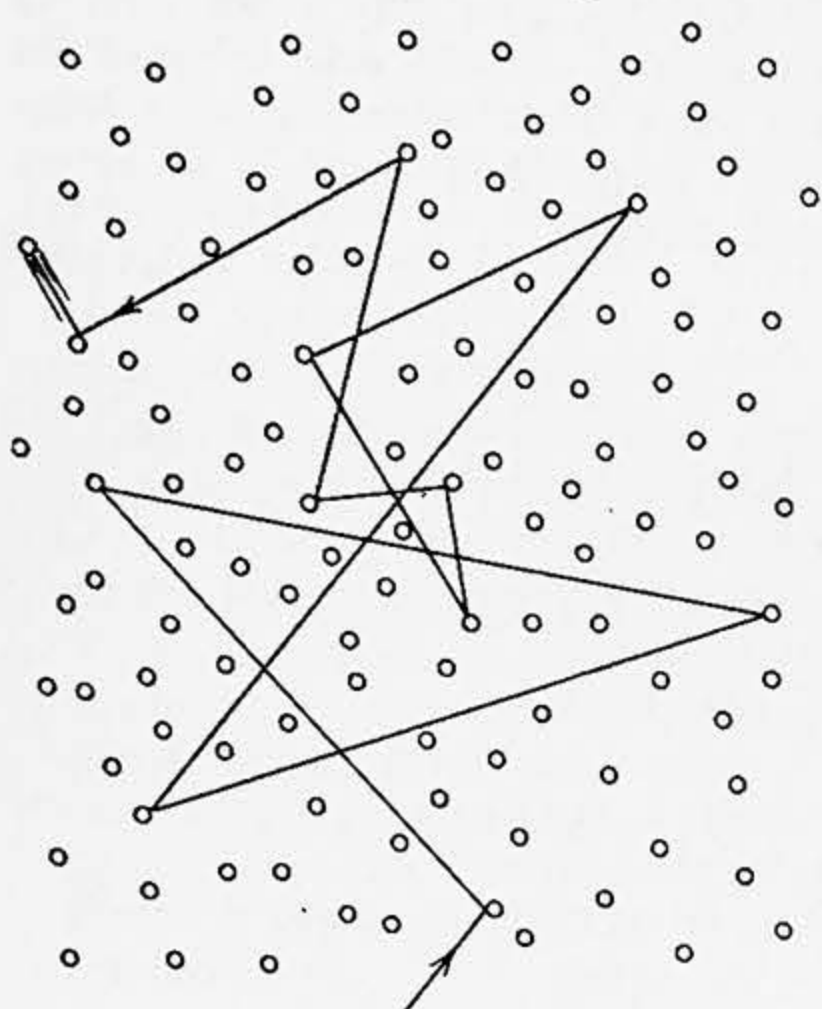
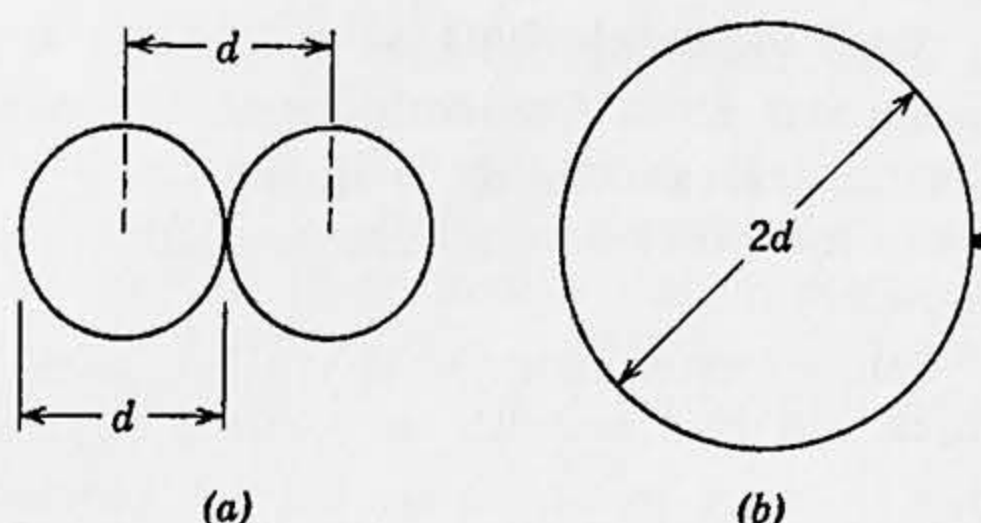


Figura 24-1. O moleculă care se mișcă prin gaz, ciocnindu-se cu alte molecule în drumul ei. Desigur, toate celelalte molecule se mișcă într-un mod analog.

sive se cheamă *drum liber mediu* (fig. 24-1). Dacă moleculele ar fi puncte, ele nu s-ar ciocni deloc și drumul liber mediu ar fi infinit. Moleculele nu sînt însă puncte și deci ciocnirile se produc. Dacă ele ar fi atît de numeroase încît să umple complet spațiul disponibil pentru ele, nelăsînd loc pentru mișcarea de translație, drumul liber mediu ar fi egal cu zero. În modul acesta, drumul liber mediu este legat de dimensiunile moleculelor și de numărul lor în unitatea de volum.

Să presupunem că moleculele de gaz sînt sfere de diametru d . Secțiunea transversală pentru o ciocnire este atunci πd^2 . Adică o ciocnire va avea loc atunci cînd centrele celor două molecule se apropie pînă la o distanță d unul de altul. O descriere echivalentă a ciocnirilor suferite de oricare moleculă este de a privi acea moleculă ca și cum ar avea

Figura 24-2. (a) Dacă o ciocnire se produce atunci când două molecule se apropie pînă la o distanță d una de alta, procesul poate fi tratat în același mod (b) Imaginîndu-ne că o moleculă ar avea un diametru efectiv $2d$, iar celelalte ar fi puncte materiale.



un diametru $2d$ iar toate celelalte molecule ca fiind particule punctiforme (vezi fig. 24-2).

Să ne imaginăm o moleculă tipică de diametru echivalent $2d$ care se mișcă cu viteza v într-un gaz format din particule punctiforme echivalente și să presupunem, pentru moment, că molecula și particulele punctiforme nu exercită forțe unele asupra altora. În timpul t molecula noastră va mătura un cilindru cu aria secțiunii transversale πd^2 și lungimea vt . Dacă n este numărul de molecule din unitatea de volum, cilindrul va conține $(\pi d^2 vt)n$ particule (vezi fig. 24-3). Deoarece molecula noastră și particulele punctiforme nu exercită forțe unele asupra celorlalte, acesta va fi numărul ciocnirilor suferite de moleculă în timpul t . Cilindrul din figura 24-3 va fi în realitate frînt, schimbîndu-și direcția după fiecare ciocnire.

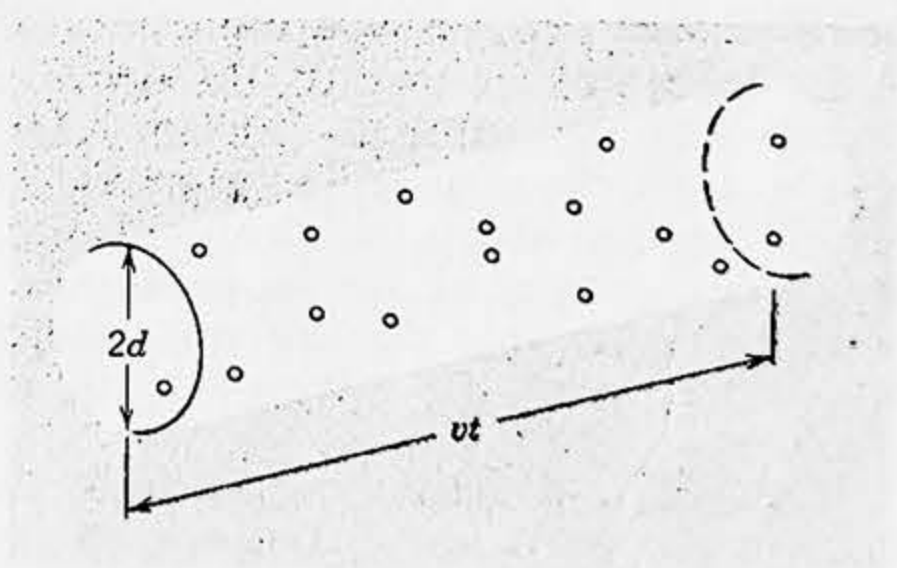
Drumul liber mediu \bar{l} este distanța medie între două ciocniri succesive. Prin urmare, \bar{l} este distanța totală vt parcursă în timpul t împărțită la numărul de ciocniri care au loc în acest timp,

$$\bar{l} = \frac{vt}{\pi d^2 nvt} = \frac{1}{\pi n d^2}.$$

Această ecuație se bazează pe imaginea unei molecule care lovește ținte fixe. În realitate molecula lovește ținte mobile. Frecvența de ciocnire crește din această cauză (vezi mai jos) și drumul liber mediu se reduce la

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2}. \quad (24-1)$$

Figura 24-3. O moleculă de diametru echivalent $2d$ mișcîndu-se cu viteza v descrie un cilindru avînd aria bazei πd^2 și lungimea vt într-un timp t . Ea suferă o ciocnire cu fiecare altă moleculă al cărei centru se află în interiorul acestui cilindru.



Dacă moleculele țintă se mișcă, cele două viteze v din prima ecuație de mai sus nu sînt egale. Cea de la numărător (\bar{v}) este viteza moleculară medie măsurată față de vas. Cea de la numitor (\bar{v}_{rel}) este viteza relativă medie față de celelalte molecule; această viteză relativă este aceea care determină frecvența de ciocnire.

Putem vedea calitativ că $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. Astfel două molecule de viteză v care se mișcă una spre cealaltă au o viteză relativă $2v (>v)$; două molecule de viteză v care se mișcă perpendicular în spre punctul de ciocnire au o viteză relativă $\sqrt{2}v$ (de asemenea $>v$); două molecule care se mișcă cu viteza v în aceeași direcție și sens au viteză relativă nulă ($<v$). În modul acesta moleculele care sosesc din întreaga emisferă anterioară și dintr-o fracțiune a emisferei posterioare au $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. Moleculele care sosesc din restul emisferei posterioare au $\bar{v}_{rel} < \bar{v}$ dar, deoarece numărul lor este mai mic, ele nu vor determina natura mediei peste ambele emisfere, ceea ce dă $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. Un calcul cantitativ, care ține seama de distribuția reală a moleculelor după viteze, dă $\bar{v}_{rel} = \sqrt{2}\bar{v}$.

Exemplul 1. Să calculăm valoarea drumului liber mediu și frecvența de ciocnire pentru moleculele de aer la 0°C și presiunea de 1 atm.

Luăm $2 \cdot 10^{-8}$ cm pentru diametrul molecular efectiv d . Pentru condițiile formulate, viteza medie a moleculelor de aer este de aproximativ $1 \cdot 10^5$ m/s și sînt aproximativ $3 \cdot 10^{19}$ molec/cm³. Drumul liber mediu este atunci

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} \cdot (3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}) (2 \cdot 10^{-8} \text{ cm})^2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

Aceasta reprezintă aproximativ 1 000 de diametre moleculare.

Frecvența de ciocnire corespunzătoare este

$$\frac{v}{\bar{l}} = (1 \cdot 10^5 \text{ cm/s}) / (2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}) = 5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

Astfel, în medie, fiecare moleculă suferă 5 miliarde de ciocniri pe secundă!

În atmosfera terestră am văzut că drumul liber mediu al moleculelor de aer la nivelul mării (760 torr) este $2 \cdot 10^{-5}$ cm. La 100 km deasupra Pământului ($4 \cdot 10^{-4}$ torr) drumul liber mediu este 2 mm. La 300 km (10^{-7} torr) el este de 150 m și încă mai sînt aproximativ 10^8 molec./cm³ în această regiune. Aceasta arată pregnant faptul că moleculele sînt în adevăr mici. La înălțimi și mai mari conceptul de drum liber mediu nu mai este valabil deoarece moleculele îndreptate în sus urmează traiectorii balistice și pot evada din atmosferă.

În laborator conceptul de drum liber mediu este util în situațiile ca cea din exemplul 1. Într-un vid de laborator, chiar modest, el își pierde întrucîtva sensul deoarece aproape toate ciocnirile au loc cu pereții vasului și nu cu alte molecule. Să considerăm o cutie cu muchia de 10 cm, conținind aer la presiunea de 10^{-7} torr. Drumul liber mediu (vezi mai sus) este de 150 m, astfel încît ciocnirile între molecule sînt într-adevăr rare. Și totuși această cutie conține aproximativ 10^{12} molecule!

Chiar într-o „cutie” finită însă, există anumite condiții în care particulele pot parcurge distanțe mari fără să lovească pereții. Într-un sin-

crotron tipic pentru protoni, folosit pentru a accelera protonii pînă la energii de ordinul 1 miliard de electroni-volți, protonii sînt constrînși de un cîmp magnetic să se miște pe o traiectorie circulară și pot parcurge *mai multe sute de mii de kilometri* în timpul procesului de accelerare. Considerațiile cu privire la drumul liber mediu sînt importante dacă protonii accelerați trebuie să nu sufere deloc ciocniri cu moleculele de aer rezidual. În acest caz, secțiunea efectivă a protonului este atît de mică față de cea a moleculelor de aer, încît dacă avem un vid de aproximativ 10^{-6} torr, nu există practic pierderi în fascicul datorită împrăstierii protonilor pe moleculele de gaz în interiorul camerei de vid.

24-2. Distribuția vitezelor moleculare

În capitolul 23 am discutat viteza pătratică medie a moleculelor din gaz. Vitezele moleculelor individuale variază însă într-un interval larg de valori; există o distribuție caracteristică a vitezelor moleculare pentru un gaz dat care depinde, după cum vom vedea mai jos, de temperatură. Chiar dacă toate moleculele din gaz ar avea aceeași viteză v , această situație n-ar persista prea mult timp deoarece vitezele moleculare ar fi schimbate prin ciocniri. Nu ne așteptăm totuși ca multe molecule să aibă viteze $\ll v_{pm}$ (adică aproape de zero) sau $\gg v_{pm}$ deoarece astfel de viteze extreme ar necesita o succesiune improbabilă de ciocniri preferențiale.

Clerk Maxwell a rezolvat primul problema distribuției celei mai probabile a vitezelor unui număr mare de molecule dintr-un gaz. Legea de distribuție a vitezelor moleculare dată de Maxwell pentru un gaz conținînd N molecule este¹:

$$N(v) = 4\pi N(m/2\pi kT)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}. \quad (24-2)$$

În această ecuație $N(v)dv$ este numărul de molecule din gaz care au viteze cuprinse între v și $v+dv$. T este temperatura absolută, k este constanta lui Boltzmann și m este masa unei molecule. Observăm că pentru un gaz dat distribuția de viteze depinde numai de temperatură. Aflăm pe N , numărul total de molecule din gaz, însumînd (adică integrînd) numărul de molecule existent în fiecare interval infinitezimal de viteze de la zero la infinit, adică

$$N = \int_0^{\infty} N(v)dv. \quad (24-3)$$

Unitatea de măsură a lui $N(v)$ este de exemplu molec./(m/s).

În figura 24-4 este reprezentată distribuția lui Maxwell a vitezelor pentru moleculele oxigenului la două temperaturi diferite. Numărul moleculelor care au viteze între v_1 și v_2 este egal cu aria de sub curbă între liniile verticale din v_1 și v_2 . După cum arată ecuația (24-3), aria de sub curba distribuției vitezelor, reprezentată de integrala din acea ecuație, este egală cu numărul total al moleculelor din gaz. La orice

¹ O deducere a ecuației (24-2) este dată în Tema suplimentară IV.

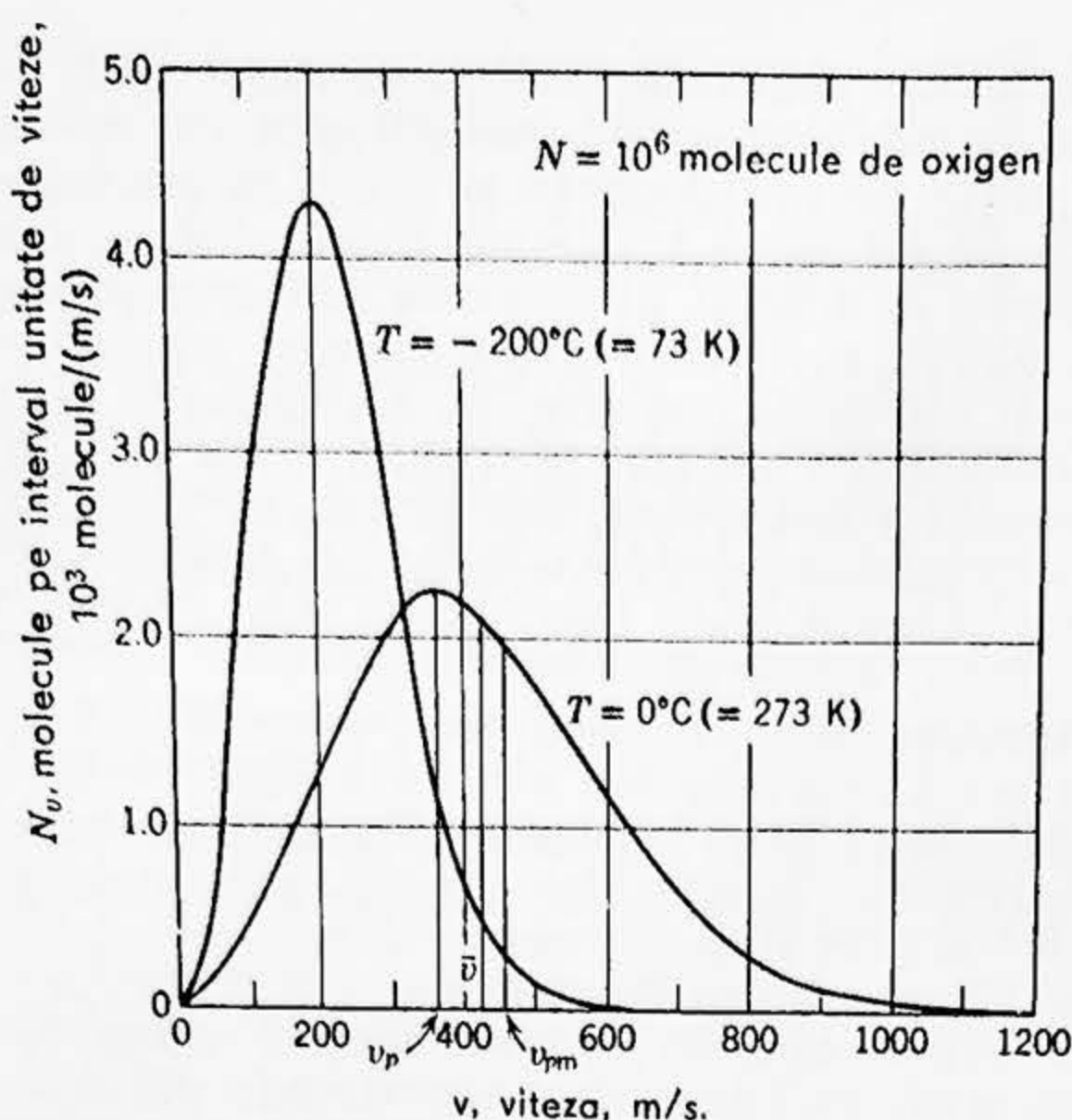


Figura 24-4. Distribuția lui Maxwell a vitezelor pentru 10^6 molecule de oxigen la două temperaturi diferite. Numărul moleculelor dintr-un anumit interval de viteze (de exemplu între 300 și 600 m/s) este dat de aria de sub această porțiune de curbă. Aria totală de sub fiecare curbă reprezintă numărul total de molecule (egal cu 10^6); această arie trebuie să fie aceeași pentru fiecare temperatură dată, ca în cazul de față, curbele se referă la un număr dat de molecule. Presiunea este mai mică decât cea atmosferică deoarece oxigenul este lichid la 1,0 atm și 73 K.

temperatură numărul moleculelor într-un interval dat de viteze¹ Δv crește odată cu creșterea vitezei până la un maxim (viteza cea mai probabilă sau de maximă probabilitate v_p) și apoi descrește tinzând asimptotic către zero. Curba de distribuție nu este simetrică în jurul vitezei celei mai probabile, deoarece viteza cea mai mică trebuie să fie zero în timp ce pentru viteza superioară pe care o poate atinge o moleculă nu există vreo limită clasică. În acest caz, viteza medie \bar{v} este ceva mai mare decât viteza cea mai probabilă. Viteza pătratică medie v_{pm} , fiind rădăcina pătrată din media sumei pătratelor vitezelor, este și mai mare.

Cînd temperatura crește, viteza pătratică medie v_{pm} (la fel ca și \bar{v} și v_p) crește, în concordanță cu interpretarea microscopică a temperaturii. Intervalul vitezelor tipice este acum mai mare, astfel încît distribuția se lărgeste. Deoarece aria de sub curba distribuției (care reprezintă numărul total de molecule de gaz) rămîne aceeași, distribuția trebuie să se turtească cu creșterea temperaturii. Prin urmare, numărul moleculelor care au viteze mai mari decât o anumită viteză dată crește odată cu creșterea temperaturii (vezi fig. 24-4). Aceasta explică multe fenomene, cum ar fi creșterea vitezei reacțiilor chimice odată cu creșterea temperaturii.

¹ Nu putem reprezenta „numărul de particule care au viteza v ” în funcție de v , deoarece există un număr finit de particule și un număr infinit de viteze posibile. Astfel, probabilitatea ca o particulă să aibă o viteză exact specificată, cum ar fi 279,343267... m/s, este exact zero. Putem însă împărți intervalul de viteze în sub-intervale și probabilitatea ca o particulă să aibă o viteză situată undeva într-un subinterval dat (cum ar fi de la 279 m/s pînă la 280 m/s) are o valoare nenulă bine definită.

Distribuția vitezelor moleculelor într-un lichid seamănă de asemenea cu curbele din figura 24-4. Aceasta explică de ce anumite molecule din lichid (cele rapide) pot evada prin suprafața lichidului (evapora) la temperaturi sub punctul normal de fierbere. Numai aceste molecule pot învinge atracția moleculelor de la suprafață și evada prin evaporare. Energia cinetică medie a moleculelor rămase scade în mod corespunzător, lăsând lichidul la o temperatură mai joasă. Aceasta explică de ce evaporarea este un proces de răcire.

Din ecuația (24-2) vedem că distribuția vitezelor moleculare depinde de masa moleculei cât și de temperatură. Cu cât masa este mai mică, cu atât proporția de molecule rapide, la orice temperatură dată, este mai mare. Astfel, este mai probabil ca hidrogenul să evadeze din atmosferă la altitudini mari decât oxigenul sau azotul. Luna poate avea doar o atmosferă rarefiată. Pentru ca moleculele din această atmosferă să nu aibă probabilitate mare de evadare din câmpul gravitațional al Lunii, chiar la temperaturile joase de acolo, ne așteptăm ca acolo să fie molecule sau atomi ale elementelor cele mai grele. Dovezile indică gazele inerte grele, cum este criptonul și xenonul, care au fost produse în mare măsură prin dezintegrarea radioactivă timpuriu, în istoria Lunii. Se crede că presiunea atmosferică de pe Lună este de aproximativ 10^{-13} din presiunea atmosferică terestră.

Exemplul 2. Vitezele a 10 particule în m/s sînt 0; 1,0; 2,0; 3,0; 3,0; 3,0; 4,0; 4,0; 5,0 și 6,0. Să se afle: (a) viteza medie, (b) viteza pătratică medie și (c) viteza cea mai probabilă a acestor particule.

(a) Viteza medie este

$$\bar{v} = \frac{0 + 1,0 + 2,0 + 3,0 + 3,0 + 3,0 + 4,0 + 4,0 + 5,0 + 6,0}{10} = 3,1 \text{ m/s.}$$

(b) Viteza pătratică medie, la pătrat, este

$$v^2 = \frac{0 + (1,0)^2 + (2,0)^2 + (3,0)^2 + (3,0)^2 + (3,0)^2 + (4,0)^2 + (4,0)^2 + (5,0)^2 + (6,0)^2}{10} = 12,5 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

și viteza pătratică medie este

$$v_{pm} = \sqrt{12,5 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 3,5 \text{ m/s.}$$

(c) Dintre cele zece particule, trei au vitezele de 3,0 m/s, două au vitezele de 4,0 m/s, și celelalte cinci au fiecare câte o viteză diferită. Prin urmare, viteza cea mai probabilă a unei particule, v_p , este

$$v_p = 3,0 \text{ m/s.}$$

Exemplul 3. Să se folosească ecuația (24-2) pentru a determina viteza medie \bar{v} , viteza pătratică medie v_{pm} și viteza cea mai probabilă v_p a moleculelor dintr-un gaz cu ajutorul parametrilor gazului.

Cantitatea $N(v)dv$ reprezintă numărul particulelor gazului care au o viteză cuprinsă între v și $v+dv$, $N(v)$ fiind dat de ecuația (24-2). Aflăm viteza medie \bar{v} pe calea obișnuită: înmulțim numărul de particule din fiecare interval de viteze cu o viteză v caracteristică acelui interval; sumăm aceste produse pe toate inter-

valele de viteză și împărțim la numărul total de particule. Înlocuind suma cu integrala, obținem

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} N(v) v dv / N.$$

Introducând ecuația (24-2) pentru $N(v)$ și integrând¹ obținem

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = 1,59 \sqrt{\frac{kT}{m}} \text{ (viteza medie).}$$

Pătratul vitezei pătratice medii este dat de

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} N(v) v^2 dv / N,$$

ceea ce dă

$$v_{pm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,73 \sqrt{\frac{kT}{m}} \text{ (viteza patratice medie).}$$

Viteza cea mai probabilă v_p este viteza la care $N(v)$ are o valoare maximă. Ea se obține din condiția ca

$$\frac{dN(v)}{dv} = 0.$$

Substituind ecuația (24-2) pentru $N(v)$, obținem, așa cum trebuie să arate studentul,

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1,41 \sqrt{\frac{kT}{m}} \text{ (viteza cea mai probabilă).}$$

În figura 24-4 sînt arătate v_p , \bar{v} și v_{pm} la 0°C pentru o distribuție a vitezelor moleculare ale oxigenului.

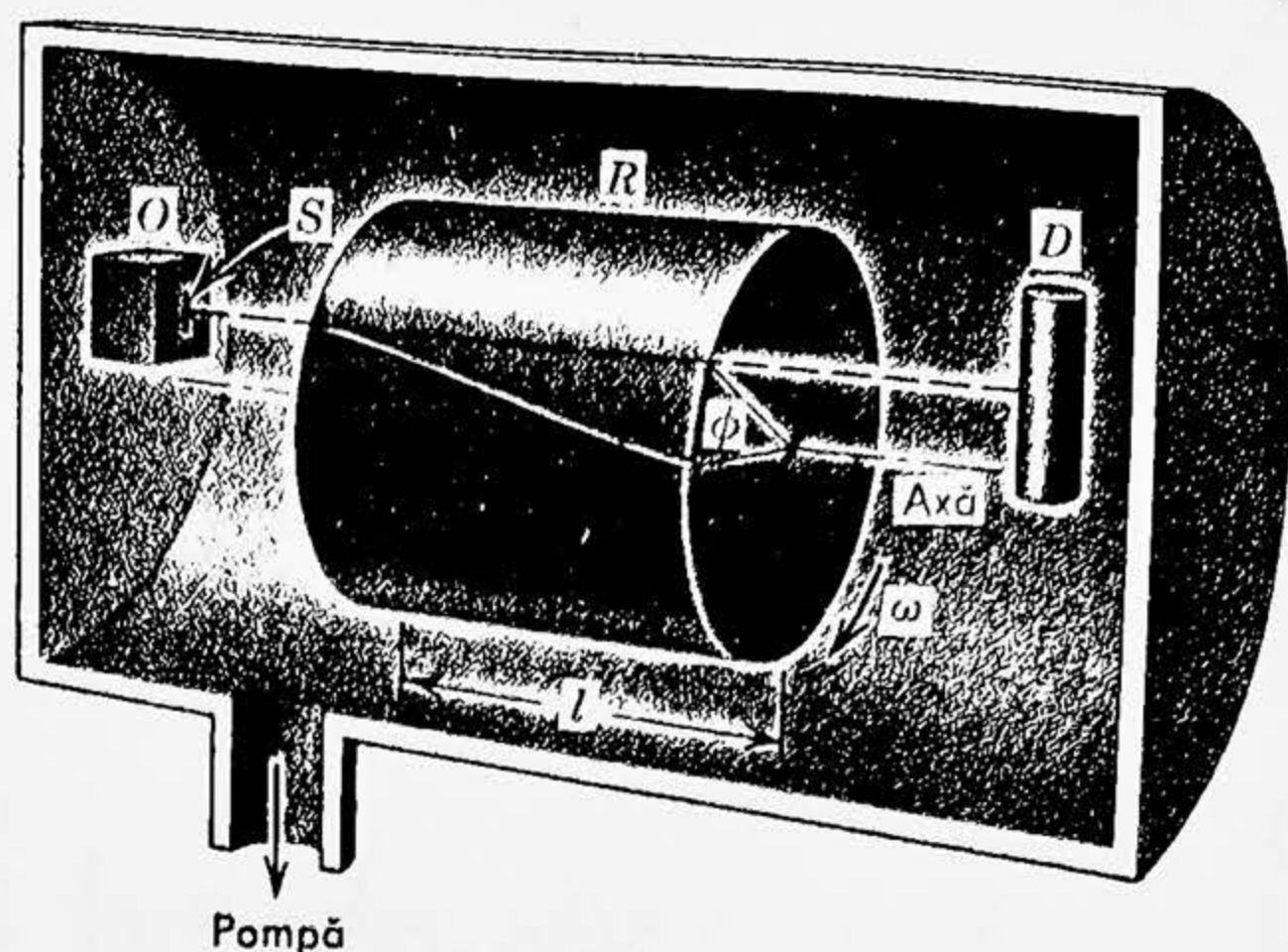
24-3. Confirmarea experimentală a distribuției lui Maxwell

Maxwell a dedus legea distribuției pentru vitezele moleculare (ecuația 24-2), în 1859. La acea dată, nu era posibil de verificat această lege printr-o măsurătoare directă și în adevăr abia în 1920, Stern a făcut prima încercare serioasă de acest fel. Tehnica s-a perfecționat în minile mai multor cercetători, dar abia în 1955 a fost realizată o verificare experimentală de mare precizie a acestei legi (pentru moleculele de gaz) de către Miller și Kusch.

¹ Fie $\lambda = m/2 kT$. Din tabelele de integrare, găsim

$$\int_0^{\infty} v^2 e^{-\lambda v^2} dv = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}; \int_0^{\infty} v^3 e^{-\lambda v^2} dv = \frac{1}{2 \lambda^2}; \int_0^{\infty} v^4 e^{-\lambda v^2} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}.$$

Figura 24-5. Aparatul folosit de Miller și Kusch pentru a verifica legea de distribuție a vitezelor a lui Maxwell. Mecanismul care rotește cilindrul nu este arătat. Interiorul aparatului este puternic vidat pentru a reduce ciocnirile moleculelor de taliiu din fasciculul emergent prin fanta S cu moleculele de gaz reziduale.



Aparatul lor este arătat în figura 24-5. Pereții cuptorului O erau încălziți, într-o serie de experiențe, până la o temperatură uniformă de 870 ± 4 K, în cuptor fiind introdusă o cantitate de taliiu. La această temperatură vaporii de taliiu, la o presiune de $3,2 \cdot 10^{-3}$ torr, umplu cuptorul. Unele molecule din vaporii de taliiu evadează prin fanta S în spațiul puternic vidat din afara cuptorului, căzând pe cilindrul în rotație R . În acest cilindru de lungime l sînt tăiate un număr de caneluri (șanțuri) elicoidale, în figura 24-5 fiind arătată numai una dintre ele. Pentru o viteză unghiulară ω dată a cilindrului, numai moleculele de o viteză v bine definită pot trece de-a lungul canelurilor fără a lovi pereții. Viteza v poate fi găsită din

$$\text{timpul de trecere prin canelură} = \frac{l}{v} = \frac{\Phi}{\omega},$$

sau

$$v = l\omega / \Phi \quad (24-4)$$

în care Φ (vezi fig. 24-5) este deplasarea unghiulară dintre punctul de intrare și punctul de ieșire ale șanțului elicoidal. În modul acesta cilindrul rotitor este un *selector de viteze*, viteza selectată fiind proporțională cu viteza unghiulară (controlabilă) ω , după cum arată ecuația (24-4). Intensitatea fasciculului este înregistrată de detectorul D ca o funcție de viteza selectată v . Figura 24-6 arată concordanța remarcabilă dintre teorie (linia plină) și experiența (triunghiurile și cerculețele) pentru vaporii de taliiu.

Distribuția vitezelor într-un fascicul (diferită de distribuția vitezelor din cuptor) nu este proporțională cu $v^2 e^{-mv^2/2kT}$, ca în ecuația (24-2), ci cu $v^3 e^{-mv^2/2kT}$. Să considerăm un grup de molecule din cuptor ale căror viteze sînt cuprinse într-un mic interval v_1 până la $v_1 + \Delta v$, unde v_1 este mai mic decît viteza cea mai probabilă v_p . Putem găsi totdeauna un alt interval egal de viteze Δv , de la v_2 pînă la $v_2 + \Delta v$, unde v_2 va fi mai mare decît v_p , astfel ales încît cele două intervale de viteză să conțină același număr de molecule. Dar mai multe molecule din ultimul interval decît din primul vor evada prin fanta S pentru a forma fasciculul, deoarece moleculele din ultimul interval „bombardează” fanta cu o frecvență mai mare, și anume cu factorul v_2/v_1 . Astfel, celelalte condiții fiind egale, moleculele mai

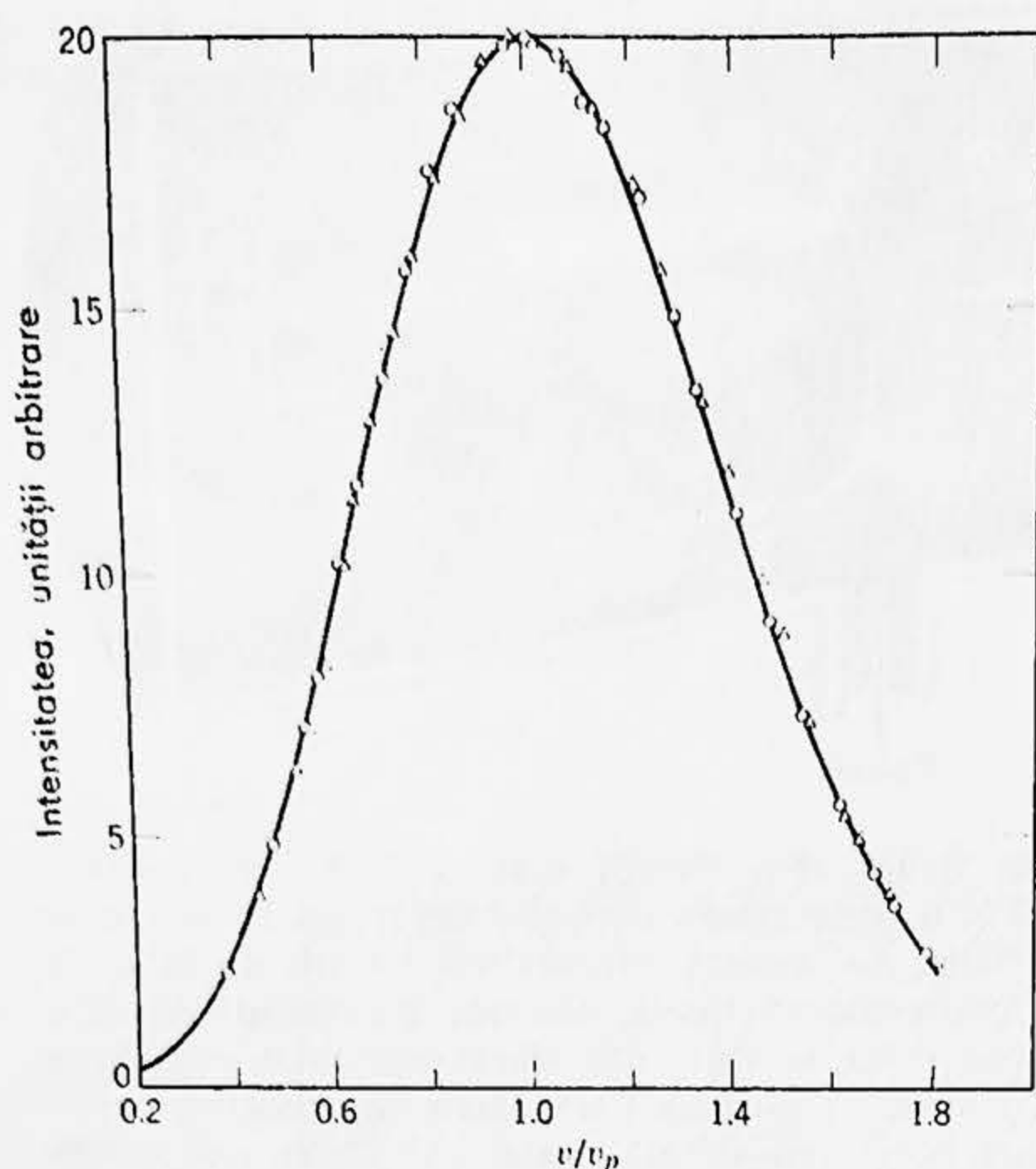


Figura 24-6. Linia plină reprezintă distribuția vitezelor moleculare după Maxwell. Cerculețele (o) sînt punctele experimentale pentru atomii de taliiu emiși dintr-un cuptor la 870 K; triunghiurile (Δ) corespund lui 944 K. Scara orizontală este dată în v/v_p unde v_p este viteza cea mai probabilă. Atunci cînd vitezele sînt reprezentate în acest mod, distribuțiile pentru diferite temperaturi vor cădea pe o aceeași curbă. La 870 K, $v_p = 376$ m/s și la 944 K, ea este de 395 m/s. Din Miller și Kusch *Physical Review*, 99, 1 314 (1955).

rapide sînt favorizate în evadarea din cuptor, exact în proporția vitezelor lor, și moleculele din fascicul au în distribuție factorul v^3 în locul lui v^2 . Acest efect a fost luat în considerare la calculul curbei teoretice din figura 24-6.

Rainwater și Havens (1946) au realizat de asemenea o verificare experimentală convingătoare a legii de distribuție a vitezelor a lui Maxwell folosind un „gaz” de neutroni. Neutronii erau produși (ca neutroni rapizi) în serii continue de impulsuri scurte într-un ciclotron și lăsați să cadă pe un bloc de parafină. Prin ciocniri repetate cu nucleele din bloc, neutronii erau încetiniți rapid și ajungeau în echilibru termic cu blocul, comportîndu-se ca un „gaz de neutroni” într-un vas. Vasul nu este însă închis ermetic, deoarece neutronii difuzează afară prin pereții blocului și se mișcă prin laborator. Este posibil de măsurat, cu mijloace electronice, timpul dintre generarea neutronilor în ciclotron și sosirea lor la un detector depărtat, după evadarea lor din blocul de parafină. În modul acesta, se poate măsura distribuția vitezelor într-un fascicul colimat de neutroni evadați și se poate compara cu predicția lui Maxwell. Concordanța dintre teorie și experiență este excelentă.

Deși distribuția lui Maxwell a vitezelor pentru gaze concordă remarcabil cu observațiile în condiții obișnuite, ea nu mai este valabilă la densități mari, cînd ipotezele fundamentale ale teoriei cinetice clasice nu mai sînt valabile. În aceste domenii trebuie să folosim distribuțiile de viteză bazate pe principiile fizicii cuantice, distribuțiile lui Fermi-Dirac și Bose-Einstein. Aceste distribuții cuantice concordă bine cu distribuția lui Maxwell în domeniul clasic (densitate mică) și concordă cu experiența acolo unde distribuția clasică nu este valabilă. Prin urmare există limite pentru aplicabilitatea distribuției lui Maxwell, așa cum de fapt există pentru orice teorie.

24-4. Mișcarea browniană

Accentul pus pe teoria atomică și moleculară în ultimul sfert al secolului al XIX-lea, a fost deplorat de unii savanți capabili. În ciuda multor concordanțe cantitative dintre teoria cinetică și comportarea gazelor, nu s-a obținut nici o dovadă a existenței separate (individuale) a atomilor și moleculelor, și nici nu a fost efectuată vreo observație care să poată demonstra în adevăr mișcarea continuă a moleculelor. Ernst Mach (1838—1916) nu vedea nici o posibilitate de a „gîndi lumea ca un mozaic, deoarece nu putem examina cărămizile sale individuale”. S-a stabilit destul de timpuriu în dezvoltarea teoriei cinetice că un atom trebuie să aibă aproximativ 10^{-7} cm sau 10^{-8} cm în diametru. Nimeni nu spera să vadă în realitate un atom sau să detecteze efectul unui singur atom.

Conducătorul celor care se opuneau teoriei atomice a fost Wilhelm Ostwald. El a fost un campion al principiului conservării energiei și considera energia ca ultima realitate. Ostwald argumenta că printr-o tratare termodinamică a unui proces noi cunoaștem tot ceea ce este esențial în acest proces și că alte ipoteze mecanice despre mecanismul reacțiilor sînt ipoteze nedovedite. El a abandonat teoriile atomice și moleculare și a luptat pentru a elibera știința „de concepția ipotetică care nu conduce la nici o concluzie verificabilă imediat experimental”. Alți fizicieni eminenți erau refractari la admiterea faptului că atomul este un fapt științific dovedit.

Ludwig Boltzmann a fost nevoit să protesteze împotriva acestei atitudini într-un articol din 1897, subliniind caracterul indispensabil al atomismului în științele naturii. Progresul științei este adesea ghidat de analogiile cu procesele din natură care au loc în mințile cercetătorilor. Teoria cinetică a fost o astfel de analogie mecanică. Ca majoritatea analogiilor, ea sugerează experiențe pentru a verifica valabilitatea imaginilor noastre mintale și conduce la noi cercetări și la o înțelegere mai clară.

Așa cum se întîmplă totdeauna în asemenea controverse în știință, decizia este dată de experiență. Cea mai veche și cea mai directă dovadă experimentală a realității atomilor a fost confirmarea teoriei cinetice a atomilor dată de studiile cantitative ale mișcării browniene. Aceste observații i-au convins atît pe Mach cît și pe Ostwald de valabilitatea teoriei cinetice și a descrierii atomice a materiei pe care ea se bazează. Teoria atomică a cîștigat o recunoaștere indiscutabilă în anii ulteriori cînd o mare varietate de experiențe au condus la aceleași valori pentru constantele atomice fundamentale.

Mișcarea browniană este denumită după numele botanistului englez Robert Brown, care a descoperit în 1827 că polenul, în suspensie în apă, manifestă o mișcare dezordonată continuă atunci cînd este urmărit la microscop. La început aceste mișcări erau considerate ca o formă a vieții, dar s-a aflat curînd că mici particule anorganice se comportă analog. Nu a existat nici o explicație cantitativă a acestui fenomen pînă la dezvoltarea teoriei cinetice. Abia în 1905 Albert Einstein a elaborat

o teorie a mișcării browniene¹. În *Notele sale Autobiografice*, Einstein scrie: „Scopul meu principal a fost de a găsi faptele care să garanteze cât mai mult posibil existența atomilor de dimensiuni bine definite. În toți acești cercetări am descoperit că, în concordanță cu teoria atomistică, trebuie să aibă loc o mișcare a particulelor microscopice în suspensie, vizibile observației, fără să știu că observații privind mișcarea browniană erau deja de mult cunoscute“.

Ipoteza fundamentală făcută de Einstein era că particulele în suspensie într-un lichid sau într-un gaz participă la mișcările termice ale mediului și că în medie energia cinetică de translație a fiecărei particule este $\frac{3}{2} kT$, în conformitate cu principiul echipartiției energiei. În acest fel, mișcarea browniană rezultă din șocurile primite din partea moleculelor de fluid și particulele în suspensie câștigă aceeași energie cinetică medie ca moleculele fluidului.

Particulele în suspensie sînt extrem de mari în comparație cu moleculele fluidului și sînt continuu bombardate din toate părțile de către aceste molecule. Dacă particulele sînt suficient de mari și numărul moleculelor este suficient de mare, un număr egal de molecule lovesc particula pe toate fețele în fiecare moment. Pentru particule mai mici, și molecule mai puține, numărul moleculelor care lovesc diferite fețe ale particulei în fiecare moment, fiind o chestiune de probabilitate, poate să nu fie egal; adică pot apărea fluctuații. Prin urmare, particula suferă în fiecare moment o forță neechilibrată care o obligă să se miște pe un drum sau altul. Particulele acționează de aceea exact ca niște molecule foarte mari într-un fluid și mișcările lor trebuie să fie calitativ aceleași ca mișcările moleculelor de fluid. Dacă numărul lui Avogadro ar fi infinit, atunci nu ar exista nici un dezechilibru statistic (fluctuații) și nici o mișcare browniană. Dacă numărul lui Avogadro ar fi foarte mic, mișcarea browniană ar fi foarte intensă. Prin urmare, am fi în stare să deducem valoare numărului lui Avogadro din observații efectuate asupra mișcării browniene. În această imagine este profund înrădăcinată ideea mișcării moleculare și micimea moleculelor. Mișcarea browniană oferă de aceea o dovadă experimentală izbitoare a ipotezelor teoriei cinetice.

Particulele în suspensie se află sub influența gravitației și s-ar depune pe fundul fluidului dacă n-ar exista bombardamentul molecular care se opune acestei tendințe. Deoarece particulele în suspensie se comportă ca molecule de gaz, nu sîntem surprinși aflînd că, la fel ca pentru moleculele din atmosferă, densitatea lor scade exponențial în funcție de înălțime în fluid. Ele formează o „atmosferă în miniatură“: vezi exemplul 1, capitolul 17; problema 42, capitolul 23 și problema 15 din acest capitol. Jean Perrin, un fizico-chimist francez, a confirmat această predicție în 1908, determinînd numărul particulelor mici de rășină în suspensie la diferite înălțimi într-o picătură de lichid (fig. 24-7, stînga). Din datele sale a dedus o valoare a numărului lui Avogadro

¹ Teoria lui Einstein a apărut într-un articol în același număr al revistei *Annalen der Physik*, care conținea celebrul său articol asupra teoriei relativității și de asemenea articolul său asupra teoriei efectului fotoelectric. Lucrarea sa asupra efectului fotoelectric a fost aceea pentru care el a primit Premiul Nobel în 1921.

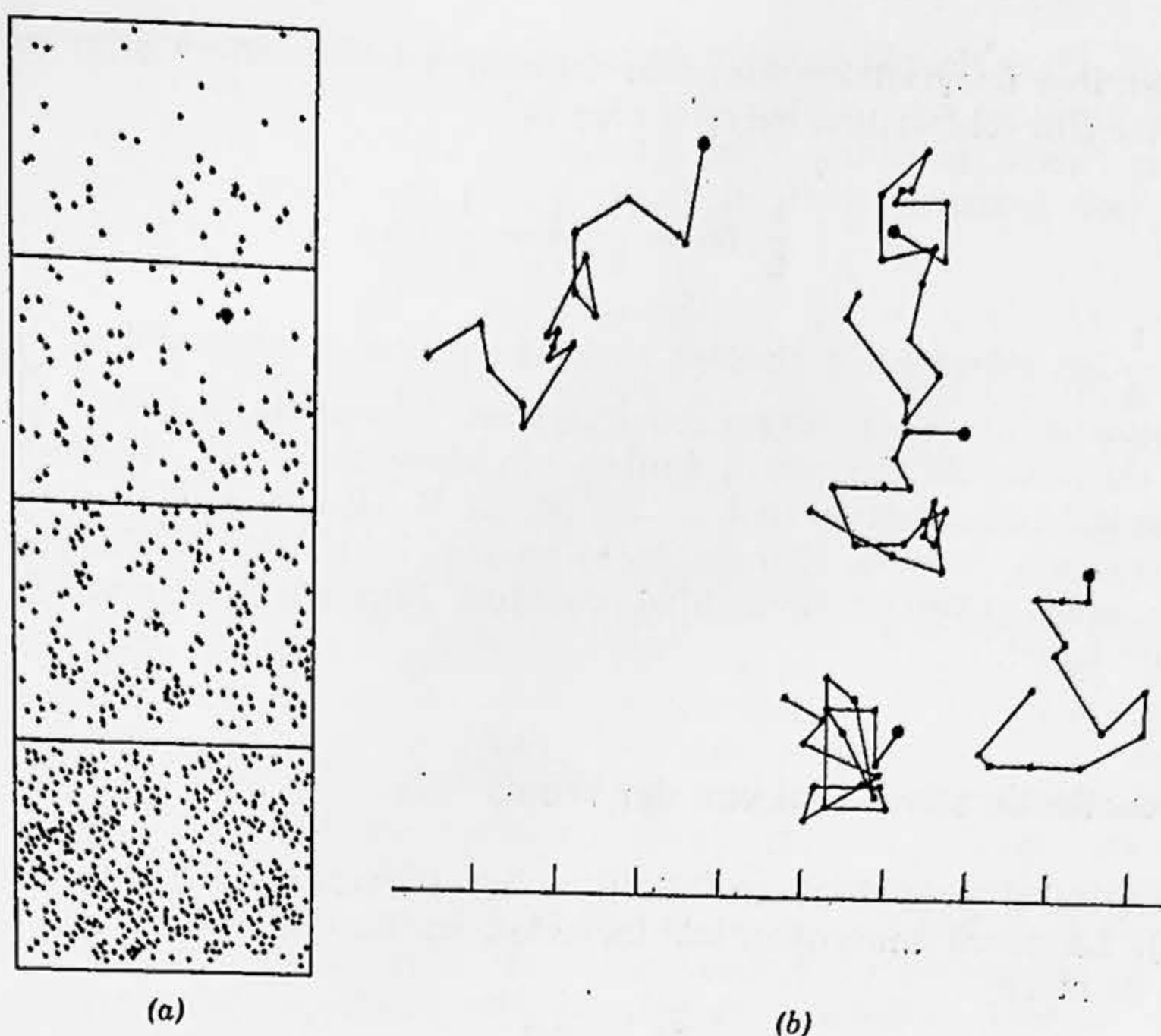


Figura 24-7. (a) O suspensie de particule de rășină conținută într-un vas de sticlă văzută la microscop de către Perrin în 1909. La început distribuția particulelor a fost uniformă, dar cu timpul ele s-au distribuit conform distribuției arătate. Particulele au un diametru de $0,6 \cdot 10^{-3}$ cm și liniile orizontale sînt la o distanță de $10 \cdot 10^{-3}$ cm unele de altele. (b) Desenul lui V. Henri din 1908 dintr-un studiu cinematografic al acestuia, a mișcării browniene. Henri a folosit un microscop cu o cameră de luat vederi care lua 20 cadre/s, fiecare expunere fiind de $1/320$ s. Liniile frînte, în zig-zag, arată poziția a cinci particule de rășină așa cum au fost înregistrate de cadrele succesive. Liniile nu reprezintă traiectoriile reale ale particulelor deoarece între două expuneri succesive particulele pot avea traiectorii neregulate asemănătoare. Scara de jos este împărțită în microni (10^{-4} cm).

$N_0 = 6 \cdot 10^{23}$ particule/mol. Perrin a făcut de asemenea măsurători ale deplasărilor particulelor browniene în timpul mai multor intervale de timp egale și a găsit că ele au distribuția statistică cerută de teoria cinetică și deplasarea pătratică medie prezisă de Einstein (fig. 24-7, dreapta).

Printre mai multe experiențe ulterioare este cea a lui Kappler din 1931, care a urmărit mișcarea browniană a unui obiect destul de mare, anume o mică oglindă (arie de $0,7 \text{ mm}^2$), fixată pe un fir fin de torsiune, cu un fascicul de lumină reflectat de oglindă pe un film fotografic mobil. Oglinda este montată într-o cameră cu gaz la presiune joasă (10^{-2} torr); înregistrarea de pe filmul mobil dă funcția $\theta(t)$ (deplasarea unghiulară în funcție de timp). Aceasta arată clar mișcarea browniană de rotație a oglinzii, care constă dintr-o serie de deplasări unghiulare produse de șocurile neechilibrate primite din partea moleculelor. Pe măsură ce presiunea gazului scade, are loc o descreștere treptată a intensității mișcării.

Din înregistrarea fotografică putem afla deplasarea unghiulară θ și viteza unghiulară ω . Principiul echipartiției energiei cere ca

$$\frac{1}{2} I \bar{\omega}^2 = \frac{1}{2} k \bar{\theta}^2 = \frac{1}{2} kT,$$

deoarece $\frac{1}{2} I \bar{\omega}^2$ este energia cinetică medie de rotație a sistemului și $\frac{1}{2} k \bar{\theta}^2$ este energia potențială medie a sistemului. Aici I este momentul de inerție al sistemului și k constanta de torsiune a firului. Din observațiile sale, Kappler a putut calcula constanta lui Boltzmann k și din relația $N_0 = R/k$ el a putut obține numărul lui Avogadro. Valorile obținute de el au fost $k = 1,36 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \pm 3\%$ (valoarea acceptată astăzi $1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ fiind cuprinsă între limitele erorilor sale) și $N_0 = 6,1 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

24-5. Ecuația de stare a lui van der Waals

În capitolul precedent am discutat comportarea unui gaz ideal (sau perfect). La scară macroscopică legitatea sa fundamentală este dată de ecuația de stare

$$pV = \mu RT.$$

Din această ecuație și din principiile termodinamicii se poate arăta că energia internă U a unui gaz depinde numai de temperatură. Gazele reale se supun acestor relații destul de bine la densități mici, dar comportarea lor poate deveni sensibil diferită când densitatea crește. Nu putem neglija aceste abateri de la comportarea ideală într-o lucrare științifică de precizie. De exemplu, pentru a stabili scara termodinamică Kelvin în laborator, trebuie să știm cum să facem corecțiile necesare la scara unui termometru cu gaz la volum constant. Trebuie să cunoaștem de aceea comportarea gazelor reale destul de precis. Poate și mai important este faptul că comportarea gazelor reale ne dă informații asupra naturii forțelor intermoleculare și asupra structurii moleculelor.

Teoria cinetică ne dă o descriere microscopică a comportării unui gaz ideal. Am indicat deja felul cum ipotezele teoriei cinetice devin inaplicabile la un gaz real. În anumite condiții nu mai putem justifica neglijarea faptului că moleculele ocupă o fracțiune din volumul disponibil gazului și că raza de acțiune a forțelor moleculare este mai mare decât dimensiunea moleculei. La densități mari nu putem ignora aceste efecte.

J. D. van der Waals (1837—1923) a dedus o ecuație modificată de stare care ia în considerație acești factori într-un mod simplu. Să ne imaginăm că moleculele sînt sfere tari de diametru d . Diametrul unei astfel de sfere ar corespunde distanței dintre centrele moleculelor în momentul cînd intră în joc puternice forțe de ciocnire. În timpul mișcării sale, centrul unei molecule nu se poate apropia cu o distanță mai mică decît $d/2$ de un perete sau cu o distanță mai mică de d de centrul unei alte molecule. Prin urmare, volumul real disponibil pentru o moleculă este

mai mic decât volumul vasului care conține gazul. Cu cât mai mic anume — depinde de cât de multe molecule există acolo. Să notăm cu v volumul pe mol (volumul molar), V/μ . Atunci „volumul liber” pe mol va fi mai mic decât acesta cu „covolumul” b . Prin urmare, vom modifica ecuația de stare de la relația ideală $p v = RT$ la

$$p(v-b) = RT$$

pentru a ține seama de aceasta. Datorită reducerii volumului, numărul ciocnirilor cu pereții va crește, măbind astfel presiunea; această relație a fost pentru prima dată dedusă de Clausius.

Putem de asemenea ține seama de efectul forțelor de atracție dintre molecule într-un mod simplu. Să ne imaginăm un plan care trece printr-un gaz și să considerăm la un moment forțele intermoleculare care acționează prin el. Fiecare moleculă din stînga, de exemplu, va atrage și va fi atrasă de un număr mic n de molecule din dreapta planului. Să comparăm acum această situație cu una analoagă în toate privințele cu excepția faptului că numărul moleculelor din unitatea de volum este dublată. Acum fiecare moleculă individuală din stînga va interacționa în medie cu $2n$ molecule din dreapta, deoarece raza de acțiune a forțelor moleculare este aceeași și vor intra în această rază de acțiune un număr dublu de molecule. Deoarece există de asemenea un număr dublu de molecule în stînga față de cîte erau înainte, care se atrag în acest mod, este clar că numărul perechilor atractive de o parte și de alta a planului crește de 4 ori. De aceea, efectul acestor forțe variază cu pătratul numărului de particule din unitatea de volum sau invers proporțional cu pătratul volumului molar, adică ca $(1/v)^2$. Datorită acestor forțe de legătură moleculare, gazul va ocupa pentru o presiune externă dată, un volum mai mic decât volumul pe care l-ar ocupa un gaz ideal în care nu există astfel de forțe atractive. Sau, în mod echivalent, gazul acționează ca și cum ar fi supus unei presiuni suplimentare față de presiunea aplicată din exterior. Această presiune excedentară este proporțională cu $(1/v)^2$ sau egală cu a/v^2 unde a este o constantă. Astfel, obținem ecuația de stare a lui van der Waals a unui gaz

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT. \quad (24-5)$$

Valorile lui a și b urmează a fi găsite din experiență și din acest punct de vedere ecuația este empirică. Trebuie să înțelegem că aceste corecții la ecuația de stare a gazului ideal sînt cele mai simple și că eșecul ecuației van der Waals într-un caz particular este o dovadă că ipotezele noastre sînt prea simplificate pentru acest caz. Nu se cunoaște nici o formulă simplă care să se aplice tuturor gazelor în toate condițiile.

Am văzut că gazele reale nu se supun exact legii gazelor ideale. Discuția noastră sugerează de asemenea faptul că pentru gaze reale energia internă U depinde atît de volum cît și de temperatură. În adevăr, dacă există forțe atractive (cu rază de acțiune mare) între molecule, energia potențială crește odată cu creșterea distanței medii dintre molecule. Prin urmare, ne așteptăm ca energia internă a majorității gazelor reale să crească ușor cu volumul la temperaturi obișnuite și în adevăr acesta este cazul. Desigur, ciocnirile pot fi privite ca fiind determinate

de forțele repulsive. Dacă moleculele se mișcă rapid astfel încât suferă multe ciocniri, energia potențială a forțelor repulsive (raza de acțiune scurtă) poate fi mai importantă decât cea a forțelor atractive și energia internă ar putea descrește cu creșterea volumului. Aceasta este adevărat pentru hidrogen și heliu la temperaturi obișnuite. În orice caz însă, energia internă U nu este funcție doar de temperatură, ci depinde și de volum. Dependența energiei interne a unui gaz de volum poate fi deja dedusă din rezultatele observate asupra experienței de destindere liberă în vid, discutată în capitolul 22.

Exemplul 4. Să se compare pe diagrama presiune-volum comportarea unui gaz ideal la temperatura constantă și comportarea unui gaz van der Waals.

În figura 24-8, *a* sînt reprezentate izotermele (curbele pentru T constant) conform legii $pV = RT$. Figura 24-8, *b* arată izotermele conform legii

$$(p + a/v^2)(v - b) = RT.$$

Izotermele gazului ideal sînt ramuri ale unei hiperbole echilatre, $pV = \text{const.}$ Pentru gazul van der Waals presiunea variază cu volumul după legea

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad (24-6)$$

Cînd volumul molar v descrește de la valori mari, presiunea crește, însă termenul a/v^2 care micșorează presiunea, urcă repede astfel încît la o temperatură T suficient de joasă presiunea trece printr-un maxim în *A*. Cînd v descrește mai departe, termenul $RT/(v - b)$ urcă mai rapid astfel încît presiunea trece printr-un minim în *B* și apoi crește rapid nelimitat atunci cînd v tinde către valoarea b . Pentru temperaturi înalte, maximile și minimile sînt mai puțin pronunțate și mai apropiate de punctul de inflexiune care se află între ele. La așa-numita temperatură critică ($T = T_{cr}$), ele coincid într-un punct de inflexiune numit punct critic. Pentru temperaturi mult mai înalte decât temperatura critică T_{cr} , izotermele van

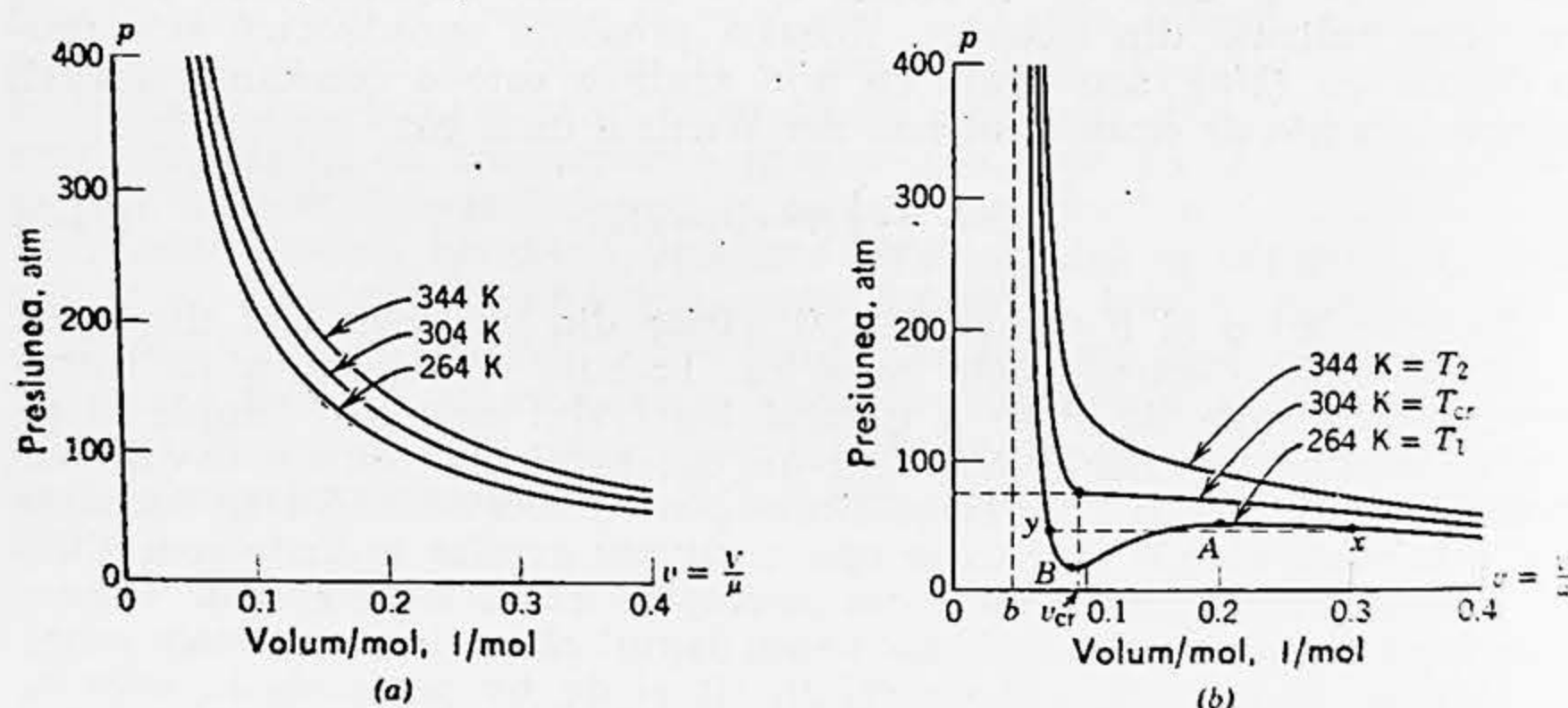


Figura 24-8. (a) Izotermele unui gaz ideal. (b) Izotermele unui gaz van der Waals. Am presupus $a = 3,59 \text{ l}^2 \cdot \text{atm/mol}^2$ și $b = 0,0427 \text{ l/mol}$ în ecuația (24-4). Aceste valori dau cea mai bună potrivire a ecuației la datele p - V - T pentru gazul real CO_2 . T_{cr} ($= 304 \text{ K}$) este temperatura critică.

der Waals nu au punct de inflexiune și tind către comportarea de tip hiperbolă echilateră a izotermelor gazului ideal. Pentru dioxidul de carbon temperatura critică este 304 K și presiunea în punctul critic este 72,9 atm.

Putem obține presiunea p_{cr} , volumul molar v_{cr} și temperatura T_{cr} din punctul critic într-un mod foarte general din condițiile ca tangenta la izotermă să fie orizontală, $dp/dv=0$ când $T=const.$ și ca punctul să fie un punct de inflexiune, $d^2p/dv^2=0$ când $T=const.$ Obținem

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \quad (T=const.)$$

și

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0 \quad (T=const.)$$

Aceasta ne dă

$$v_{cr} = 3b$$

și

$$T_{cr} = \frac{8a}{27bR}$$

Introducând acestea în ecuația (24-6) obținem

$$p_{cr} = \frac{a}{27b^2}$$

Izotermele indică comportarea experimentală reală a lichidelor și gazelor. Maximile și minimile de pe izoterme sub temperatura critică nu se observă de obicei experimental. Într-un anumit punct x gazul începe să se condenseze. Când volumul descrește, presiunea rămâne constantă (linia punctată) până în punctul y când întregul gaz este transformat în lichid. Dincolo de y , când volumul descrește, este comprimat un lichid, cu creșterea abruptă corespunzătoare a presiunii necesară pentru a produce chiar variații mici de volum. Porțiunile xA și By ale izotermelor pot fi obținute experimental folosind gaze și lichide foarte pure. Le numim vapori suprasaturanți și lichide suprarăcite și ele se găsesc în stări metastabile. Porțiunea AB nu poate fi reprodusă experimental și este instabilă.

Constantele a și b din ecuația van der Waals pot fi calculate din valorile experimentale ale parametrilor critici. Termenul a/v^2 se numește *presiune internă*. Unele valori pentru aer prezintă interes. Pentru aer la 0°C și presiunea externă p de 1,00 atm, presiunea internă este 0,0028 atm; la 0°C și presiunea externă p de 100 atm, presiunea internă este 26 atm. Pentru aer la -75°C valorile corespunzătoare ale presiunii interne sînt 0,0056 atm și 84,5 atm. Când un gaz se destinde sub presiune și efectuează lucru mecanic împotriva forțelor din afară care-l comprimă, el trebuie să efectueze lucru mecanic și împotriva acestor forțe interne. Pentru aer la -75°C și 100 atm, lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor interne este aproape la fel de mare ca cel efectuat împotriva forțelor externe. Există însă o distincție importantă între lucrul mecanic intern și cel extern. În cazul lucrului mecanic extern energia este transferată de la corp către un corp din afară; în cazul lucrului mecanic intern nu are loc decît un transfer al energiei de un tip în energie de alt tip în interiorul corpului, de exemplu din energie poten-

țială în energie cinetică. Constanta b variază de la gaz la gaz, dar ea este de obicei de ordinul lui $30 \text{ cm}^3/\text{mol}$. Prin urmare covolumul este de aproximativ $0,15\%$ din volumul liber disponibil pentru un gaz în condiții standard.

Deși formula lui van der Waals este un ghid calitativ bun, datele experimentale cantitative nu pot fi ajustate peste tot cu niște valori constante pentru a și b . Motivul este acela că modelul pe care se bazează formula este totuși o suprasimplificare. În loc de a presupune că moleculele au totdeauna un diametru bine definit, de exemplu, trebuie să folosim forța intermoleculară reală (fig. 23-3). În acest mod se poate face o corecție mai precisă la legea gazelor ideale. Van der Waals știa că aceasta ar fi necesar pentru cercetări cantitative precise.

Întrebări

1. Să considerăm cazul în care drumul liber mediu este mai mare decât cel mai lung segment de dreaptă ce poate fi trasat în vas. Reprezintă aceasta un vid perfect pentru o moleculă din acel vas?

2. Să se dea o explicație calitativă legăturii dintre drumul liber mediu al moleculelor de amoniac din aer și timpul necesar pentru a sesiza mirosul de amoniac atunci când o sticlă este deschisă într-un colț al camerei.

3. Doi pereți opuși ai unui vas cu gaz sînt menținuți la temperaturi diferite. Să se descrie mecanismul conducției de căldură prin gaz.

4. Un gaz poate transmite numai acele unde sonore a căror lungime de undă este mare în comparație cu drumul liber mediu. Puteți explica aceasta? Unde ar putea apare această limitare?

5. Dacă moleculele nu sînt sferice, ce semnificație se poate da lui d din ecuația (24-1) pentru drumul liber mediu? În care gaze moleculele ar acționa cel mai apropiat ca sfere rigide?

6. Să presupunem că ne dispensăm de ipoteza ciocnirilor elastice în teoria cinetică și considerăm moleculele ca centre de forță acționînd de la distanță. Va avea conceptul de drum liber mediu vreun sens în aceste circumstanțe?

7. Deoarece forța reală dintre molecule depinde de distanța dintre ele, forțele pot produce deviații chiar dacă moleculele sînt departe de „contactul” uneia cu alta. Mai mult, deviația produsă ar depinde de timpul cît acționează aceste forțe și deci de viteza relativă a moleculelor. (a) Vă așteptați atunci ca drumul liber mediu măsurat să depindă de temperatură, chiar dacă densitatea rămîne constantă? (b) Dacă este așa, vă așteptați ca \bar{l} să crească sau să descrească cu temperatura? (c) Cum ar intra această dependență în ecuația (24-1)?

8. Să se justifice calitativ afirmația că într-un amestec de molecule de diferite tipuri în echilibru complet, fiecare tip de moleculă are aceeași distribuție maxwelliană a vitezelor pe care ar avea-o dacă celelalte tipuri de molecule nu ar fi prezente.

9. Distribuția maxwelliană a vitezelor pentru moleculele dintr-un gaz este arătată în figura 24-4. Cum vă așteptați să arate distribuția maxwelliană a vitezelor ca vectori? Care ar fi vectorul viteză mediu?

10. Frațiunea de molecule care au vitezele într-un interval dat Δv de viteze pătratice medii descrește atunci cînd temperatura gazului crește. Să se explice de ce?

11. (a) Într-un gaz în echilibru termic jumătate din molecule vor avea viteze mai mari decât v_p ? decât \bar{v} ? decât v_{pm} ? (b) Care viteză v_p , \bar{v} sau v_{pm} corespunde moleculei care are energia cinetică medie?

12. Sistemul de fante din figura 24-5 selectează numai acele molecule care se mișcă în sensul pozitiv al axei x . Distrugă aceasta valabilitatea experienței ca o măsură a distribuției vitezelor moleculelor care se mișcă în toate direcțiile?

13. De ce Rainwater și Havens au ales parafina ca material, în cercetarea distribuției vitezelor neutronilor (pag. 638), pentru a aduce neutronii rapizi cât mai repede în echilibru termic?

14. Să se dea exemple de mișcare browniană în fenomene fizice.

15. Am definit pe n ca fiind numărul de molecule pe unitatea de volum într-un gaz (concentrația moleculară).

Probleme

1. Drumul liber mediu al moleculelor de azot la 0°C și 1 atm este $0,80 \cdot 10^{-5}$ cm. La această temperatură și presiune, există $2,7 \cdot 10^{19}$ molec./cm³. Care este diametrul molecular?

2. Vidul cel mai bun obținut pînă astăzi în laborator este de 10^{-10} torr. Cite molecule de gaz rămîn într-un centimetru cub la 20°C în acest „vid“?

3. În cosmotronul de la Brookhaven National Laboratory (Laboratorul Național de la Brookhaven) protonii se mișcă pe o traiectorie circulară cu un diametru de 22,5 m într-o cameră la o presiune de 10^{-6} torr.

(a) Să se evalueze numărul de molecule de gaz dintr-un centimetru cub la această presiune.

(b) Care este drumul liber mediu al moleculelor de gaz în aceste con-

diții. Dacă definim pe n pentru un volum foarte mic de gaz, de exemplu egal cu de 10 ori volumul unui atom, atunci n va fluctua în timp într-un interval care se întinde de la zero pînă la o anumită valoare maximă. Cum putem atunci justifica afirmația că n are o valoare definită în fiecare punct din gaz?

16. Să se arate că atunci cînd volumul molar al unui gaz crește, ecuația van der Waals tinde către ecuația de stare a unui gaz ideal.

17. Covolumul b din ecuația van der Waals se ia adesea egal cu de patru ori volumul real al moleculelor de gaz înseși. Ce factor ar trebui luat în considerație pentru a obține un astfel de rezultat?

18. Ținînd minte că energia internă a unui corp constă din energia cinetică și energia potențială a particulelor sale, cum am putea face o distincție între energia internă a unui corp și temperatura sa?

diții dacă diametrul molecular este $2,0 \cdot 10^{-8}$ cm?

4. La ce frecvență lungimea de undă a sunetului va fi de ordinul de mărime al drumului liber mediu în oxigen, la presiunea de 1 atm și temperatura 0°C ? Se va lua diametrul moleculei de oxigen de $3,00 \cdot 10^{-8}$ cm.

5. Pentru un gaz în care toate moleculele se mișcă cu aceeași viteză v , să se arate că $\bar{v}_{rms} = \frac{4}{3}v$ în loc

de $\sqrt{2}v$ (care este rezultatul ce se obține atunci cînd considerăm distribuția reală a vitezelor moleculare). Vezi pagina 632.

6. La 2500 km deasupra suprafeței Pămîntului densitatea este aproximativ 1 molec./cm³. Ce drum liber mediu este prezis de ecuația (24-1) și

care este semnificația sa în aceste condiții?

7. Drumul liber mediu al unei molecule este \bar{l} . Să se arate că probabilitatea ca o moleculă să parcurgă cel puțin o distanță x înainte de a suferi următoarea ciocnire este $e^{-x/\bar{l}}$.

8. Drumul liber mediu \bar{l} al moleculelor unui gaz poate fi determinat prin măsurători (de exemplu din măsurătorile viscozității gazului). La 20°C și presiune de 750 torr astfel de măsurători dau valorile lui \bar{l}_{Ar} (argon) $\rightarrow 9,9 \cdot 10^{-8}$ cm și \bar{l}_{N_2} (azot) $\rightarrow 27,5 \cdot 10^{-8}$ cm. (a) Să se afle raportul dintre diametrele efective ale argonului și azotului. (b) Care ar fi valoarea drumului liber mediu al argonului la 20°C și 150 torr? (c) Care ar fi valoarea drumului liber mediu al argonului la -40°C și 750 torr?

9. O moleculă de hidrogen (diametrul 10^{-8} cm) se deplasează dintr-un cuptor ($T=4000$ K) cu o viteză egală cu viteza pătratică medie într-o cameră conținând atomi de argon rece (diametrul $3 \cdot 10^{-8}$ cm) la o densitate de $4 \cdot 10^{19}$ atomi/cm³. (a) Care este viteza moleculei de hidrogen? (b) Într-o ciocnire dintre o moleculă și un atom de argon, care va fi distanța minimă dintre centrele lor, considerindu-le sferice? (c) Care este numărul inițial de ciocniri pe unitatea de timp suferite de molecula de hidrogen?

10. Se dă următorul grup de particule (N_i reprezintă numărul particulelor care au viteza v_i):

N_i	v_i (cm/s)
2	1,00
4	2,00
6	3,00
8	4,00
2	5,00

- (a) Să se calculeze viteza medie v .
(b) Să se calculeze viteza pătratică

medie v_{pm} . (c) Dintre cele cinci viteze indicate, care este viteza cea mai probabilă v_p pentru întregul grup?

11. Să considerăm distribuția vitezelor arătată în figura 24-9. (a) Să se aranjeze v_{pm} , \bar{v} și v_p în ordinea creșterii vitezelor. (b) Cum se compară aceasta cu distribuția maxwelliană?

12. În aparatul lui Miller și Kusch (figura 24-5) lungimea l a cilindrului rotativ era de 20,4 cm și unghiul Φ de $2\pi/74,7$ radiani. Ce viteză de rotație corespunde unei viteze selectate v de 200 m/s?

13. Să se calculeze viteza pătratică medie a particulelor de fum de masă $5,0 \cdot 10^{-14}$ g în aer la 0°C și presiunea de 1 atm.

14. Particule de masă $6,2 \cdot 10^{-14}$ g sînt în suspensie într-un lichid la 27°C și au o viteză pătratică medie măsurată de 1,4 cm/s. Să se calculeze numărul lui Avogadro din teorema echipartiției și din aceste date.

15. Particulele coloidale dintr-o soluție sînt împinse de jos în sus de lichidul în care se află în suspensie. Fie ρ' densitatea lichidului și ρ densitatea particulelor. Dacă V este volumul unei particule, să se arate că numărul particulelor din unitatea de volum în lichid variază cu înălțimea astfel:

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{N_0}{RT} V(\rho - \rho')gh \right].$$

Această ecuație a fost verificată de Perrin în studiile sale asupra mișcării browniene.

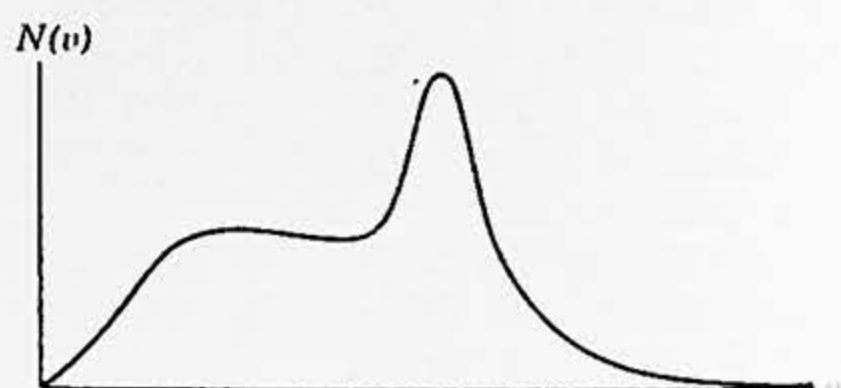


Figura 24-9.

16. Viteza medie a moleculelor de hidrogen la 0°C este 1694 m/s . Să se calculeze viteza medie a particulelor coloidale de „masă molară” $3,2 \cdot 10^6\text{ g/mol}$.

17. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat într-o destindere izotermă a unui mol de gaz van der Waals de la un volum specific v_1 pînă la un volum specific v_f .

18. Constanta a din ecuația van der Waals este $0,37\text{ N}\cdot\text{m}^4/\text{mol}^2$ pentru CO_2 și $0,025\text{ N}\cdot\text{m}^4/\text{mol}^2$ pentru hidrogen. Să se calculeze presiunile interne pentru aceste gaze pentru valori ale raportului v/v_0 (unde $v_0=22,4\text{ l/mol}$) de 1; 0,01 și 0,001.

19. (a) Constanta b din ecuația van der Waals este de $43\text{ cm}^3/\text{mol}$ pentru CO_2 . Folosind valoarea lui a de la problema precedentă, să se calculeze

presiunea la 0°C pentru un volum specific de $0,55\text{ l/mol}$, presupunînd că ecuația van der Waals este valabilă. (b) Care este presiunea în aceleași condiții, presupunînd că CO_2 se comportă ca un gaz ideal?

20. Constanta van der Waals b pentru oxigen este de $32\text{ cm}^3/\text{mol}$. Considerînd că b este de patru ori mai mare decît volumul real al unui mol de molecule O_2 de tipul „bilelor de biliard”, să se calculeze diametrul unei molecule O_2 .

21. Constantele a și b din ecuația van der Waals sînt diferite pentru substanțe diferite. Să se arate însă că dacă luăm pe v_{cr} , p_{cr} și T_{cr} ca unități pentru volumul specific, presiune și temperatură, ecuația van der Waals devine identică pentru toate substanțele.

Entropia și al doilea principiu al termodinamicii

25-1. Introducere

Primul principiu al termodinamicii afirmă faptul că energia se conservă. Cu toate acestea, putem imagina multe procese termodinamice în care se conservă energia, dar care nu se produc în realitate niciodată. De exemplu când un corp cald și un corp rece sînt puse în contact, niciodată nu se va întîmpla ca corpul cald să devină și mai cald, iar cel rece să devină și mai rece. Sau un lac nu va îngheța niciodată brusc într-o zi de vară caldă cedînd căldură mediului înconjurător. *Și totuși, nici unul din aceste procese nu contrazice primul principiu al termodinamicii.* Tot astfel, primul principiu nu restrînge posibilitatea de a transforma lucrul mecanic în căldură sau căldura în lucru mecanic, cu excepția restricției ca energia să se conserve în aceste procese. Și totuși, în practică, deși putem transforma o cantitate dată de lucru mecanic complet în căldură, nu am fost niciodată în stare să găsim un mod de a transforma o cantitate dată de căldură complet în lucru mecanic. Al doilea principiu al termodinamicii se ocupă de problema dacă procesele, presupuse compatibile cu primul principiu, se produc sau nu în natură. Deși ideile conținute în al doilea principiu pot părea subtile sau abstracte, ele se dovedesc a fi extrem de practice în aplicații.

25-2. Procesele reversibile și ireversibile

Să considerăm un sistem tipic în echilibru termodinamic să zicem o masă m de gaz real conținută într-un cilindru cu piston de volum V , gazul avînd o presiune p și o temperatură T . Într-o stare de echilibru

aceste variabile termodinamice rămân constante în timp. Să presupunem că cilindrul ai cărui pereți sînt niște izolatori ideali de căldură, dar a cărui bază este un conductor ideal de căldură, este așezat pe un rezervor mare de căldură menținut la aceeași temperatură T , ca în figura 22-9. Să trecem acum sistemul într-o altă stare de echilibru în care temperatura T este aceeași, însă volumul V se reduce la jumătate. Dintre numeroasele căi în care am putea face aceasta, vom discuta două cazuri extreme.

I. Împingem (coborîm) pistonul foarte rapid; și așteptăm apoi să se restabilească echilibrul cu rezervorul. În timpul acestui proces gazul este turbulent și presiunea și temperatura sa nu sînt bine definite; nu putem reprezenta procesul printr-o linie continuă într-o diagramă p - V deoarece n-am ști ce valoare a presiunii (sau temperaturii) să asociem volumului dat. Sistemul trece dintr-o stare de echilibru i în altă stare de echilibru f printr-o serie de stări de neechilibru (fig. 25-1, a).

II. Împingem (coborîm) pistonul (presupus fără frecări) extrem de lent — de exemplu adăugînd nisip deasupra pistonului — astfel încît presiunea, volumul și temperatura gazului să fie în fiecare moment cantități bine definite. Mai întîi lăsăm să cadă cîteva grăunțe de nisip pe piston. Aceasta va reduce volumul sistemului foarte puțin și temperatura va tinde să crească; sistemul se va depărta de echilibru, dar foarte puțin. O cantitate mică de căldură va fi transmisă rezervorului și într-un timp scurt sistemul va atinge o nouă stare de echilibru, temperatura sa fiind iarăși egală cu cea a rezervorului. Apoi lăsăm să cadă iarăși cîteva grăunțe de nisip pe piston, reducînd volumul mai departe. Așteptăm din nou să se stabilească o nouă stare de echilibru, și așa mai departe. Repetînd acest procedeu vom reduce pînă la urmă volumul la jumătate. În decursul întregului proces sistemul nu se află niciodată într-o stare care să difere mult de o stare de echilibru. Dacă ne imaginăm că realizăm acest procedeu prin creșteri succesive și mai mici ale presiunii, stările intermediare vor diferi de echilibru și mai puțin. Mărind

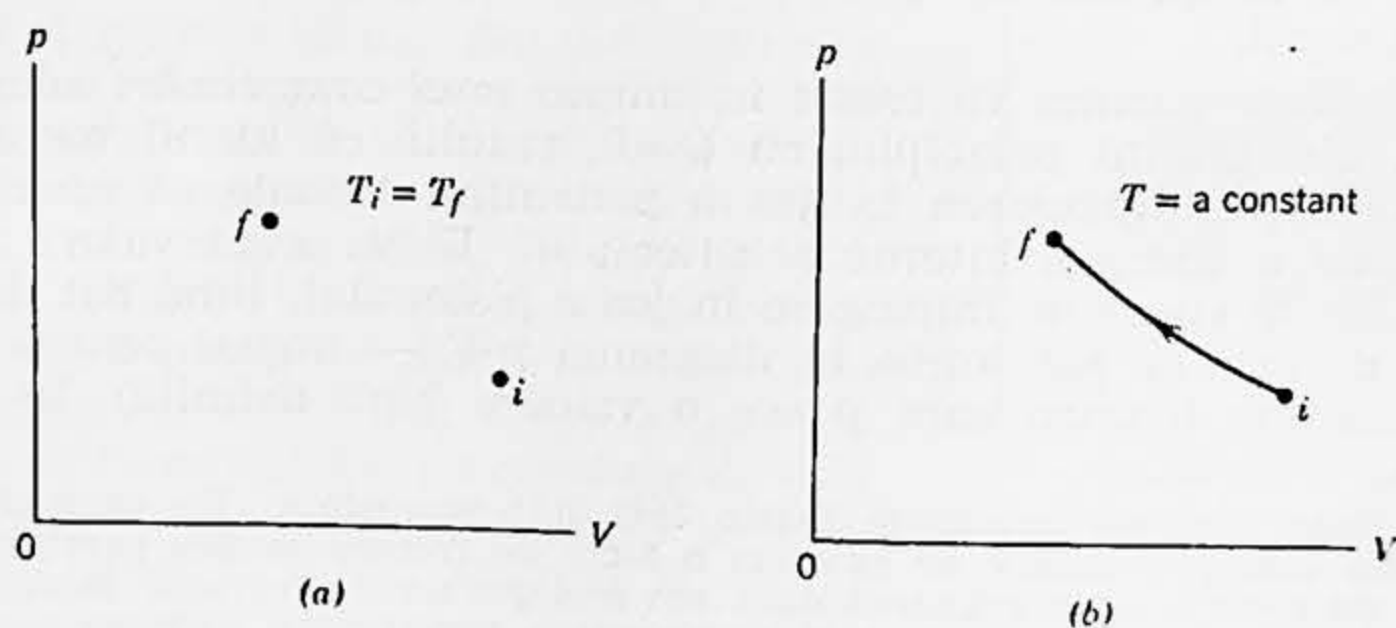


Figura 25-1. Putem face ca un gaz real să treacă de la o stare inițială de echilibru i descrisă de parametri p_i, V_i, T_i la o stare finală de echilibru f descrisă de parametri $p_f, V_f (= \frac{1}{2}V_i)$ și $T_f (=T_i)$. Efectuăm procesul: (a) ireversibil și (b) reversibil.

indefinit numărul variațiilor și micșorînd în mod corespunzător mărimea fiecărei variații, ajungem la un proces ideal în care sistemul trece printr-o succesiune continuă de stări de echilibru, pe care le putem reprezenta ca o linie continuă pe o diagramă p - V (fig. 25-1, b). În timpul acestui proces o anumită cantitate de căldură Q este cedată de sistem către rezervor.

Procesele de tipul I se numesc *ireversibile*, iar cele de tipul II se numesc *reversibile*. Un proces reversibil este acela, care, printr-o variație infinitesimală în mediul înconjurător, poate fi făcut să parcurgă în sens invers drumul său. Astfel, cînd obligăm pistonul să se miște încet în jos, în II, presiunea externă asupra pistonului depășește presiunea exercitată asupra lui de către gaz doar cu o cantitate infinitesimală dp . Dacă la un moment dat reducem presiunea externă de asemenea ușor (îndepărtînd cîteva grăunțe de nisip), astfel încît ea să fie *mai mică* decît presiunea internă a gazului cu dp , gazul se va destinde în loc să se comprime și sistemul va parcurge în sens invers stările de echilibru prin care a trecut imediat înainte¹. În practică toate procesele sînt ireversibile, dar ne putem apropia de reversibilitate oricît de mult făcînd ajustări experimentale adecvate. Procesul strict reversibil este o abstracție simplă și de utilă care are o legătură cu procesele reale similară cu cea pe care abstracția de gaz ideal o are cu gazele reale.

Procesul descris în II este nu numai reversibil, ci și *izoterm*, deoarece am presupus că temperatura gazului diferă în fiecare moment doar cu o cantitate infinitesimală dT de temperatura constantă a rezervorului pe care este așezat cilindrul.

Am putea, de asemenea, reduce volumul *adiabatic*, înlăturînd cilindrul de pe rezervorul de căldură și punîndu-l într-un mediu neconductor. Într-un proces adiabatic nu intră și nu părăsește sistemul nici o cantitate de căldură. Un proces adiabatic poate fi atît reversibil cît și ireversibil — definiția nu exclude pe nici unul. Într-un proces adiabatic reversibil mișcăm pistonul extrem de lent — folosind eventual tehnica încărcării cu nisip; într-un proces adiabatic ireversibil împingem pistonul în jos rapid.

Temperatura gazului va crește în timpul unei comprimări adiabatică, deoarece, din primul principiu, cu $Q=0$, rezultă că lucrul mecanic W efectuat pentru împingerea în jos a pistonului trebuie să apară ca o creștere ΔU a energiei interne a sistemului. W va avea valori diferite pentru diferite viteze de împingere în jos a pistonului, fiind dat de $\int p dV$ — adică de aria de sub curbă în diagrama p - V — numai pentru procesele reversibile (pentru care p are o valoare bine definită). În modul

¹ Nu toate procesele efectuate foarte lent sînt reversibile. De exemplu, dacă pistonul din exemplul nostru ar exercita o forță de frecare asupra pereților cilindrului, el nu și-ar inversa mișcarea dacă am produce doar o variație infinitesimală dp a presiunii externe. Ar trebui să producem o variație Δp care ar putea fi o fracțiune apreciabilă din p . În felul acesta, criteriul nostru de reversibilitate, care implică un răspuns al sistemului la o variație infinitesimală în mediu, nu este îndeplinit. Pentru a descrie procesele care sînt efectuate suficient de lent astfel încît sistemul trece printr-o succesiune continuă de stări de echilibru, este folosit cuvîntul *evazistatic*; un proces *evazistatic* poate fi reversibil sau nu. Vezi „Termodinamica proceselor ireversibile evazistatice”, de John S. Thomsen, *American Journal of Physics*, 28, 119, 1960.

aceasta, ΔU și variația corespunzătoare de temperatură ΔT nu vor fi aceleași pentru procesele adiabatic reversibile și ireversibile.

25-3. Ciclul Carnot

Să presupunem că avem un sistem (de exemplu un gaz real) într-o stare de echilibru într-un cilindru cu piston. Folosind capacitatea noastră de a produce variații în mediul exterior al sistemului, putem realiza, după dorință, o varietate largă de procese. Putem lăsa gazul să se destindă sau putem să-l comprimăm. Putem transmite sau evacua energie sub formă de căldură; putem face aceste procese sau altele în mod ireversibil sau reversibil. Putem de asemenea realiza o succesiune de procese astfel încât sistemul să revină la starea sa inițială de echilibru; numim aceasta un *ciclu*. Dacă toate procesele implicate sînt reversibile, îl vom numi *ciclu reversibil*.

În figura 25-2 se arată un ciclu reversibil într-o diagramă p - V . De-a lungul curbei abc permitem sistemului să se destindă și aria de sub această curbă reprezintă lucrul mecanic efectuat de către sistem în timpul destinderii. De-a lungul curbei cda pe care sistemul revine la starea sa inițială, comprimăm sistemul și aria de sub această curbă reprezintă lucrul mecanic pe care noi trebuie să-l efectuăm asupra sistemului în timpul comprimării. Prin urmare, lucrul mecanic net efectuat de sistem este reprezentat de aria cuprinsă de curbă și este pozitiv. Dacă decidem să parcurgem ciclul în sens opus, adică lăsînd gazul să se destindă de-a lungul lui abc și comprimîndu-l de-a lungul lui cba , lucrul mecanic net efectuat de către sistem va fi negativ față de lucrul mecanic efectuat în primul caz.

Un ciclu reversibil important este *ciclul lui Carnot*, introdus de către Sadi Carnot în 1824. Vom vedea mai tîrziu că acest ciclu determină limita capacității noastre de a transforma căldura în lucru mecanic. Sistemul constă dintr-o „substanță de lucru” cum ar fi un gaz, și ciclul este format din două procese izoterme și două procese reversibile adiabatic. Substanța de lucru, pe care o putem presupune pentru concretizarea ideilor ca fiind un gaz ideal, este conținută într-un cilindru cu bază termoconductoare și cu pereți și piston neconductori. Prevedem de asemenea, drept o parte a mediului înconjurător, un rezervor de căldură sub forma unui corp de capacitate calorică mare la o temperatură T_1 , un al doilea rezervor de capacitate calorică mare la o temperatură T_2 și două suporturi neconductoare. Efectuăm ciclul Carnot în patru etape sau trepte, așa cum se arată în figura 25-3. Ciclul este arătat pe diagrama p - V din figura 25-4.

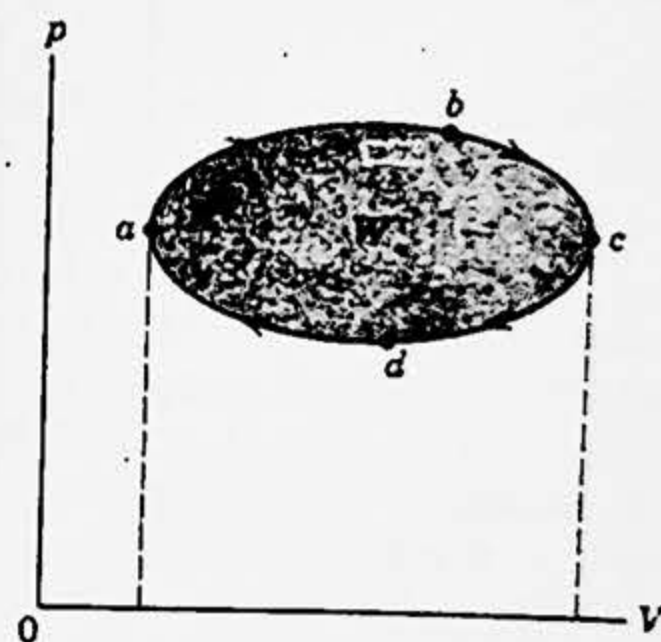


Figura 25-2. Diagrama p - V a unui gaz care suferă un ciclu reversibil. Aria hășurată W reprezintă lucrul mecanic net efectuat de gaz în ciclu.

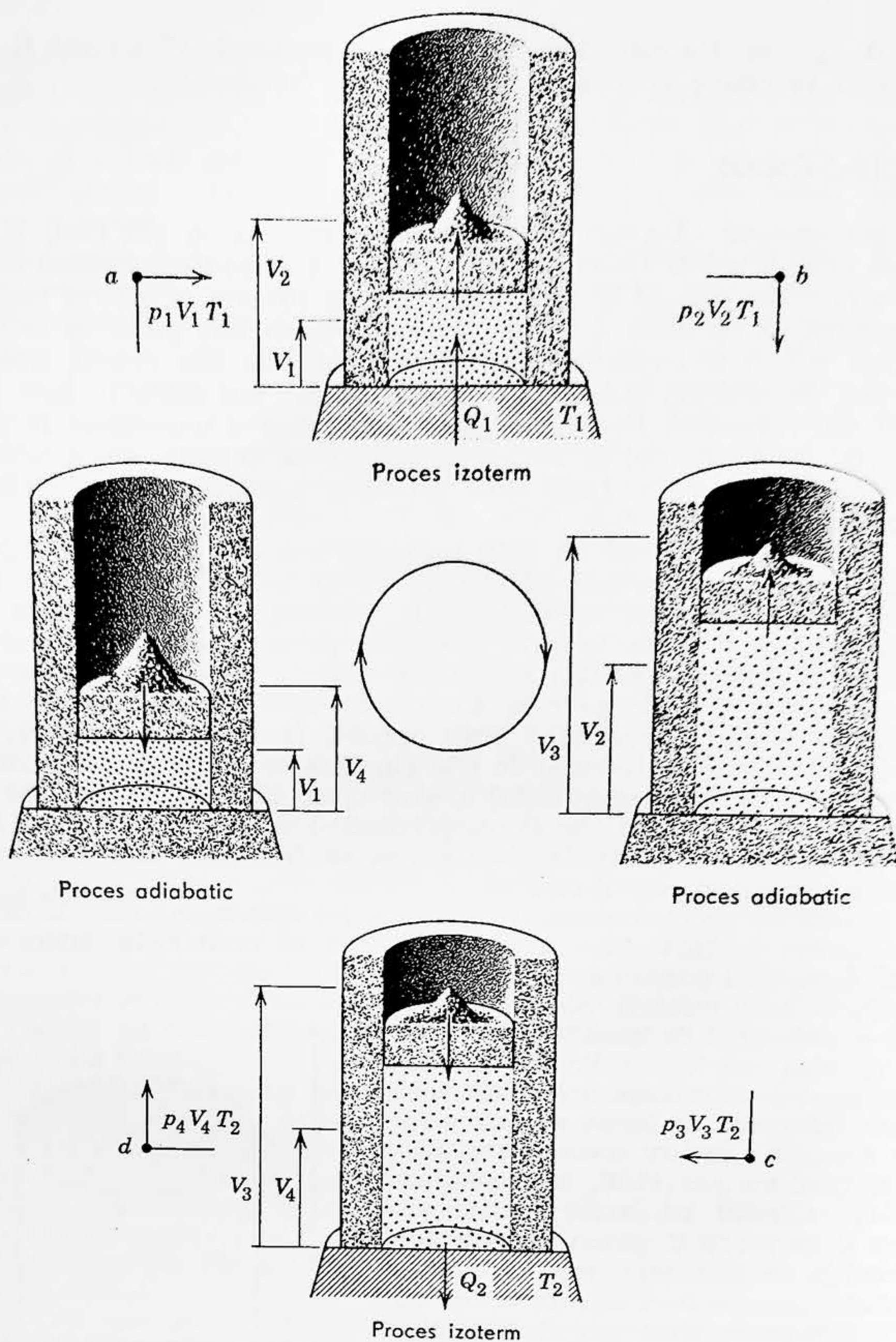


Figura 25-3. Ciclul Carnot. Punctele a , b , c și d corespund punctelor notate astfel în figura 25-4. Aranjamentele cu cilindru și piston arată etapele intermediare în procesul care unește punctele adiacente. Săgețile de pe pistoane indică destindările (produse prin îndepărtarea nisipului) și comprimările (produse prin adăugarea nisipului).

Etapa 1. Gazul se află într-o stare inițială de echilibru reprezentată prin p_1, V_1, T_1 (a, fig. 25-4). Punem cilindrul peste rezervorul de căldură aflat la temperatura T_1 și lăsăm gazul să se destindă lent pînă la p_2, V_2, T_1 (b, fig. 25-4). În timpul acestui proces gazul absoarbe căldura Q_1 prin conducție prin baza cilindrului. Destinderea este izotermă la temperatura T_1 și gazul efectuează lucrul mecanic pentru a ridica pistonul și încărcătura sa.

Etapa 2. Punem cilindrul pe unul din suporturile neconductoare și permitem gazului să se destindă pînă la p_3, V_3, T_2 (c, fig. 25-4). Destinderea este adiabetică deoarece nu intră în sistem și nu părăsește sistemul nici un fel de căldură. Gazul efectuează lucrul mecanic pentru a ridica pistonul și temperatura lui scade pînă la T_2 .

Etapa 3. Punem cilindrul peste rezervorul de căldură (mai rece) T_2 și comprimăm gazul lent pînă la p_4, V_4, T_2 (d, fig. 25-4). În timpul procesului gazul cedează căldura Q_2 către rezervor prin conducție termică prin baza cilindrului. Comprimarea este izotermă la temperatura T_2 și lucrul mecanic este efectuat asupra gazului de către piston și încărcătura sa.

Etapa 4. Punem cilindrul pe suportul neconductor și comprimăm gazul lent pînă la condițiile inițiale p_1, V_1, T_1 . Comprimarea este adiabetică deoarece sistemul nu primește și nu cedează căldură. Lucrul mecanic se efectuează asupra gazului și temperatura sa crește pînă la T_1 .

Lucrul mecanic net W efectuat de către sistem în timpul ciclului este reprezentat de aria închisă de drumul $abcd$ din figura 25-4. Cantitatea netă de căldură primită de sistem în ciclu este $Q_1 - Q_2$, unde Q_1 este căldura absorbită în etapa 1 și Q_2 este căldura cedată în etapa 3. Starea inițială și starea finală sînt aceleași, astfel încît nu există o variație netă a energiei interne U a sistemului. Prin urmare, din primul principiu al termodinamicii rezultă

$$W = Q_1 - Q_2 \quad (25-1)$$

pentru întregul ciclu, în care Q_1 și Q_2 sînt luate drept cantități pozitive. Rezultatul ciclului este acela că o anumită cantitate de căldură a fost transformată în lucru mecanic de către sistem. Se poate obține orice

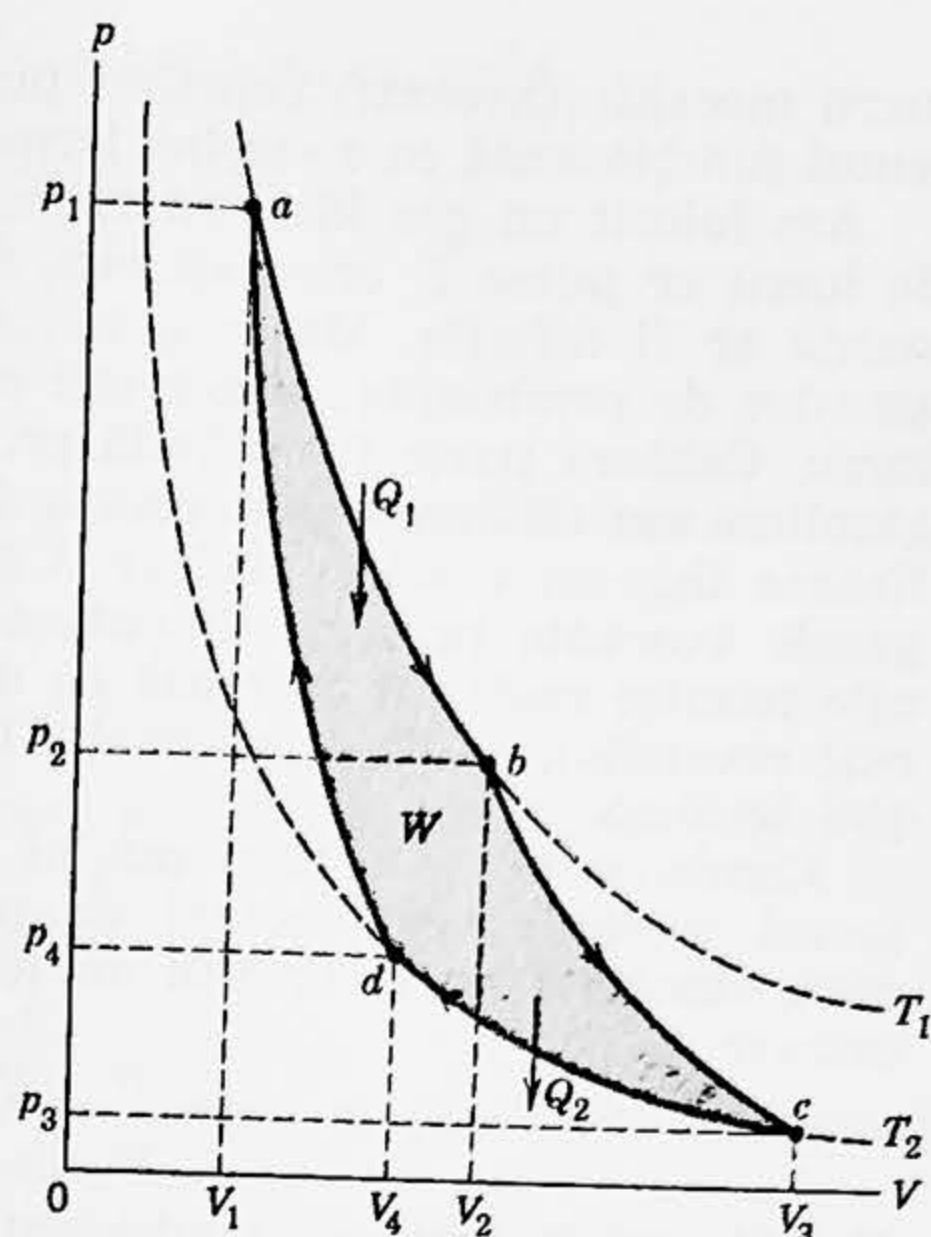


Figura 25-4. Ciclul Carnot ilustrat în figura precedentă, reprezentat într-o diagramă p - V pentru un gaz ideal.

lucru mecanic (necesar) repetind pur și simplu ciclul. Prin urmare, sistemul funcționează ca o *mașină termică*.

Am folosit un gaz ideal ca exemplu de substanță de lucru. Substanța de lucru ar putea fi orice altceva, deși diagramele p - V pentru alte substanțe ar fi diferite. Mașinile termice obișnuite folosesc aburul sau un amestec de combustibil și aer sau combustibil și oxigen ca substanță de lucru. Căldura poate fi obținută prin arderea unui combustibil cum este gazolina sau cărbunele sau prin anihilarea masei în procese nucleare de fisiune într-un reactor nuclear. Căldura poate fi cedată mediului prin gazele evacuate prin eșapament sau cedată unui condensor. Deși mașinile termice reale nu operează cu un ciclu reversibil, ciclul Carnot, care este reversibil, ne dă o informație utilă despre comportarea oricărei mașini termice.

Randamentul η al unei mașini termice este egal cu raportul dintre lucrul mecanic net efectuat de mașină în timpul unui ciclu și căldura absorbită de la izvorul de temperatură înaltă într-un ciclu¹. Prin urmare

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (25-2)$$

Ecuația (25-2) arată că randamentul unei mașini termice este mai mic decât 1 (decît 100%) atîta timp cît căldura Q_2 cedată prin eșapament nu este zero. Experiența arată că oricare mașină termică cedează o anumită căldură prin eșapament. Aceasta reprezintă căldura absorbită de mașină care nu a fost transformată în lucru mecanic în timpul procesului.

Am putea efectua ciclul Carnot plecînd din orice punct cum ar fi a în figura 25-4, și am putea parcurge fiecare proces în sens opus celui indicat prin săgeți în acea figură. Atunci o cantitate de căldură Q_2 este *îndepărtată* (absorbită) de la rezervorul de temperatură joasă T_2 și o cantitate de căldură Q_1 este *cedată* rezervorului cu temperatură înaltă T_1 ; lucrul mecanic trebuie efectuat *asupra* sistemului de către un agent din afară. În acest ciclu inversat lucrul mecanic trebuie efectuat *asupra* sistemului care extrage căldură de la rezervorul de temperatură joasă. Orice cantitate de căldură poate fi absorbită din acest rezervor, repetind pur și simplu ciclul inversat. Prin urmare, sistemul funcționează ca o *mașină frigorifică* (frigider), transferînd căldură de la un corp aflat la o temperatură mai joasă (camera de răcire) către un corp aflat la o temperatură mai înaltă (camera) cu ajutorul lucrului mecanic furnizat sistemului (energia electrică consumată).

Exemplul 1. Să se arate că randamentul unei mașini Carnot care folosește un gaz ideal drept substanță de lucru este $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$.

De-a lungul drumului izoterm ab temperatura și deci energia internă a gazului ideal, rămîne constantă. Din primul principiu rezultă căldura Q_1 absorbită de gaz în destinderea sa care trebuie să fie egală cu lucrul mecanic W_1 efectuat în această destindere. Din exemplul 2, capitolul 23, avem

$$Q_1 = W_1 = \mu RT_1 \ln (V_2/V_1).$$

¹ Definiția reflectă importanța economică a mașinilor. Lucrul mecanic W este rezultatul dorit; căldura Q_1 este primită sub formă de combustibil, de exemplu. O mașină bună are un raport W/Q_1 mare.

Analog, în comprimarea izotermă de-a lungul drumului cd , avem

$$Q_2 = W_2 = \mu RT_2 \ln (V_3/V_4).$$

Împărțind prima ecuație la a doua, obținem

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln (V_2/V_1)}{T_2 \ln (V_3/V_4)}.$$

Din ecuația care descrie un proces izoterm al unui gaz ideal, obținem pentru drumurile ab și cd .

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

$$p_3 V_3 = p_4 V_4$$

Din ecuația care descrie un proces adiabatic al unui gaz ideal, avem pentru drumurile bc și da

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma,$$

$$p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

Înmulțind aceste patru ecuații membru cu membru și simplificând cu factorul $p_1 p_2 p_3 p_4$ care apare în ambii membri, obținem

$$V_1 V_2^\gamma V_3 V_4^\gamma = V_2 V_3^\gamma V_4 V_1^\gamma$$

de unde

$$(V_2 V_4)^{\gamma-1} = (V_3 V_1)^{\gamma-1}$$

și

$$V_2/V_1 = V_3/V_4.$$

Folosind acest rezultat în expresia lui Q_1/Q_2 , vedem că

$$Q_1/Q_2 = T_1/T_2 \quad (25-3)$$

astfel încît

$$\eta = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - T_2/T_1$$

sau

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Temperaturile T_1 și T_2 sînt cele măsurate în scara gazului ideal descris în capitolul 21.

25-4. Al doilea principiu al termodinamicii

Primele mașini termice construite erau mașini cu randament foarte mic. Doar o fracțiune mică din căldura absorbită de la sursa de temperatură înaltă putea fi transformată în lucru mecanic util. Chiar cînd tehnica s-a perfecționat, o fracțiune apreciabilă din căldura absorbită era evacuată prin eșapament la temperatură joasă de către mașină, nefiind transformată în energie mecanică. Rămînea o speranță aceea de a construi o mașină care să poată lua căldură de la un rezervor abundent, cum ar fi Oceanul, și a o transforma complet în lucru mecanic util. Atunci n-ar fi necesară existența unei surse de căldură la o temperatură mai înaltă decît mediul înconjurător, asigurată prin arderea combusti-

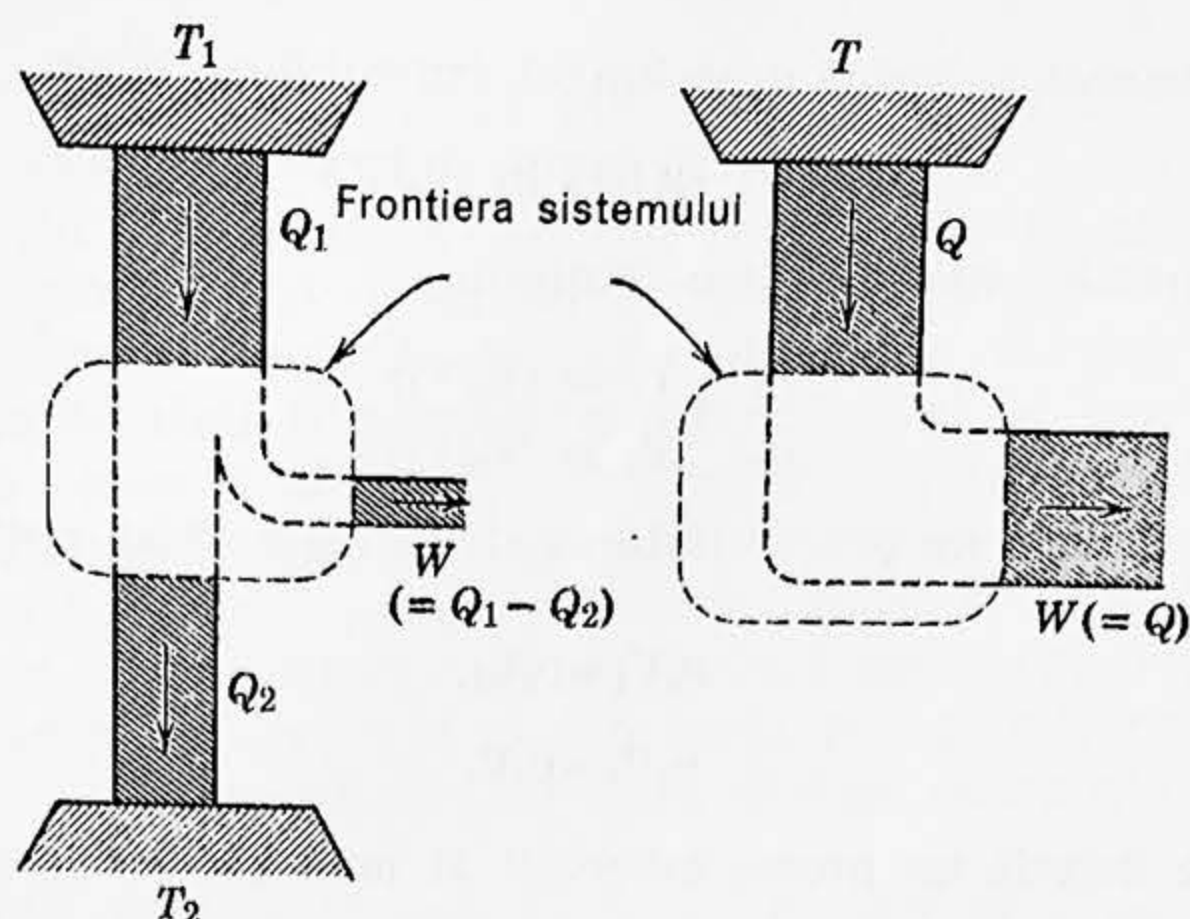


Figura 25-5. Într-o mașină termică reală, o anumită cantitate de căldură Q_1 este absorbită de mașină și transformată în lucru mecanic W , iar restul este cedat sub formă de căldură Q_2 . Într-o mașină termică „perfectă”, întreaga căldură absorbită ar fi transformată în lucrul mecanic efectuat.

bilului (fig. 25-5). Analog, am putea spera să realizăm o mașină frigorifică care să transfere pur și simplu căldură de la un corp rece către un corp cald, fără să necesite un consum de lucru mecanic din afară (fig. 25-6). *Nici una din aceste ambiții promițătoare nu contrazică primul principiu al termodinamicii.* Mașina termică ar transforma pur și simplu căldura complet în energie mecanică, energia totală fiind conservată în acest proces. În mașina frigorifică, căldura ar fi pur și simplu transferată de la corpul rece către corpul cald fără vreo pierdere de energie în acest proces. Cu toate acestea *nici una din aceste ambiții nu a fost vreodată realizată* și există motive să credem că ele nici nu vor fi vreodată realizate.

Al doilea principiu al termodinamicii, care constituie o generalizare a experienței, reprezintă o afirmație că astfel de mașini nu există. Au existat mai multe enunțuri ale celui de-al doilea principiu, fiecare subliniind un alt aspect al principiului dar se poate arăta că toate aceste enunțuri sînt echivalente între ele. Clausius l-a formulat astfel: *nu este posibil un proces ciclic prin care căldura să treacă de la sine de la un izvor rece la unul cald.* Acest enunț exclude mașina frigorifică visată, deoarece ea implică un transfer continuu de căldură de la un corp rece către un corp cald, fapt pentru care este necesară efectuarea lucrului mecanic de către un agent exterior. Știm din experiență că dacă două corpuri sînt în contact, căldura va fi transmisă de la corpul cald spre corpul rece. Principiul II exclude posibilitatea unei transmisii de la corpul rece spre corpul cald într-un astfel de caz și determină astfel sensul transferului de căldură. Sensul poate fi inversat numai cu un consum de lucru mecanic.

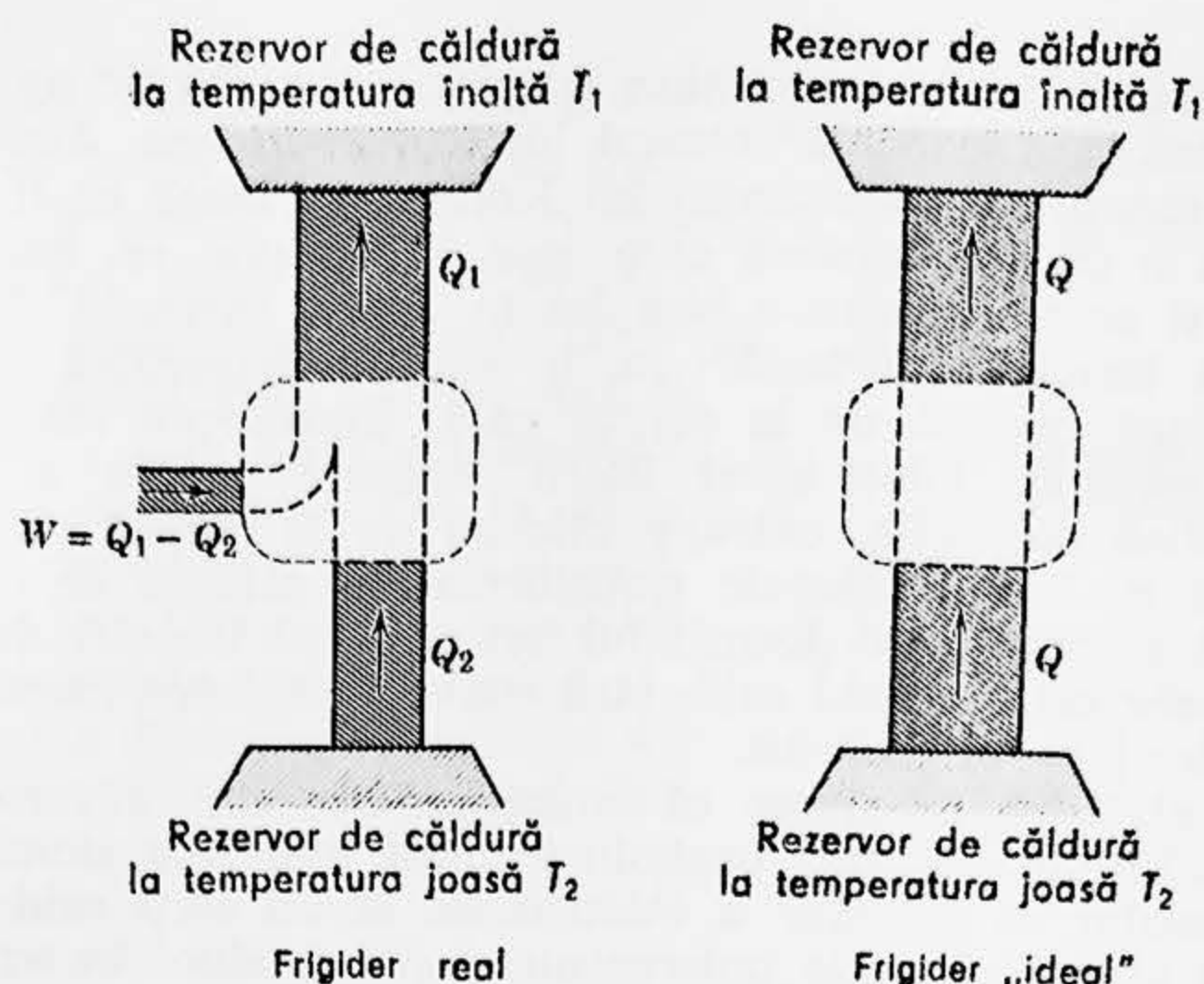


Figura 25-6. Într-o mașină frigorifică reală este necesar un lucru mecanic W pentru a transfera căldura de la un rezervor la temperatură joasă către un rezervor la temperatură înaltă. Într-o mașină frigorifică „perfectă”, căldura ar fi transferată de la rezervorul de temperatură joasă la cel de temperatură înaltă fără a fi efectuat vreun lucru mecanic asupra mașinii.

Kelvin (împreună cu Planck) au enunțat principiul II în cuvinte echivalente cu acestea: *o transformare al cărei unic rezultat final este de a transforma în lucru mecanic căldura absorbită de la o sursă care se află la aceeași temperatură este imposibilă*¹. Acest enunț exclude mașina termică visată de noi deoarece el afirmă că nu putem produce lucru mecanic prin absorbirea căldurii de la un singur rezervor fără a ceda căldură unui rezervor la o temperatură mai joasă.

Pentru a arăta că cele două enunțuri sînt echivalente trebuie să arătăm că, dacă unul din enunțuri este fals, celălalt enunț trebuie să fie de asemenea fals. Să presupunem că enunțul lui Clausius ar fi fals, astfel încît am putea avea o mașină frigorifică care să funcționeze fără a consuma lucru mecanic din afară. Am putea folosi o mașină obișnuită pentru a absorbi căldură de la un corp cald, a efectua lucru mecanic și a restitui o parte din căldură unui corp rece. Dar conectînd mașina noastră frigorifică „perfectă”, în sistem, această căldură ar fi restituită corpului cald fără consum de lucru mecanic și ar deveni disponibilă din nou pentru a fi folosită de mașina termică. Prin urmare, combi-

¹ Acest enunț trebuie completat dacă vrem să extindem termodinamica și la domeniul temperaturilor Kelvin negative. Toate celelalte formulări ale principiului II și, în adevăr, toate celelalte legi ale termodinamicii se aplică și temperaturilor negative fără vreo revizuire. Vezi articolul „Termodinamica și mecanica statistică la temperaturile absolute negative”, de N. F. Ramsey, în *Temperatura, Măsurarea și controlul ei în știință și industrie*, vol. 3, partea 1, Reinhold Publishing Co., N. Y., 1962.

nația unei mașini obișnuite cu mașina frigorifică „perfectă” ar constitui o mașină termică care ar viola enunțul lui Kelvin-Planck. Acum putem inversa raționamentul. Dacă enunțul lui Kelvin și Planck ar fi incorect, am putea avea o mașină termică care pur și simplu ar lua căldură de la o sursă și ar transforma-o complet în lucru mecanic. Conectând această mașină termică „perfectă” la o mașină frigorifică obișnuită, am putea extrage căldură de la corpul cald, transforma căldura complet în lucru mecanic, folosi acest lucru mecanic pentru a alimenta mașina frigorifică obișnuită, extrage căldură de la corpul rece și a o ceda împreună cu lucrul mecanic transformat în căldură de către mașina frigorifică corpului cald. Rezultatul net ar fi un transfer de căldură de la corpul rece către corpul cald, fără consum de lucru mecanic, ceea ce violează principiul lui Clausius.

Principiul al II-lea ne spune că multe procese sînt ireversibile. De exemplu, enunțul lui Clausius exclude în mod expres o simplă inversiune a procesului de transfer a căldurii de la un corp cald spre un corp rece. Nu numai că unele procese nu se pot produce în sens invers de la sine, dar nici o combinație de procese nu poate anula efectul unui proces ireversibil fără a produce o altă schimbare corespunzătoare undeva în altă parte. În paragrafele următoare vom dezvolta aceste idei mai complet și vom formula principiul II sub forma cantitativă.

25-5. Randamentul mașinilor

Carnot a fost primul care a exprimat științific teoria mașinilor termice. În 1824, el a publicat *Reflecțiuni asupra puterii motoare a căldurii*. Pe atunci, mașina cu abur era folosită în mod obișnuit în industrie. Carnot scria:

În ciuda funcționării mașinilor cu abur de toate felurile și în ciuda perfecțiunii la care au fost aduse ele, teoria lor a avansat foarte puțin...

Producerea mișcării în mașina cu abur este totdeauna însoțită de o circumstanță pe care o vom nota în mod special. Această circumstanță este trecerea caloricului de la un corp aflat la o temperatură mai mult sau mai puțin înaltă, la un altul unde ea este mai joasă...

Puterea motoare a căldurii este independentă de agenții folosiți pentru a o dezvolta; cantitatea sa este determinată doar de temperatura corpurilor între care se produce, în rezultatul final, transferul caloricului.

Prin urmare, Carnot și-a îndreptat atenția către faptul că diferența de temperatură era sursa reală a „puterii motoare”, că transferul de căldură juca un rol semnificativ și că alegerea substanței de lucru nu era de nici o importanță teoretică.

Realizările lui Carnot au fost remarcabile dacă ne reamintim că echivalența mecanică a căldurii și principiul conservării energiei nu erau cunoscute în 1824. În articolele sale de mai târziu, publicate postum în 1872, a devenit clar că Carnot a întrevăzut principiul conservării energiei și a făcut o determinare precisă a echivalentului mecanic al căldurii. El a inițiat un program de cercetare care includea toate dezvoltările importante în acest domeniu făcute de alți cercetători

în decursul următoarelor câteva decenii. El a murit însă în timpul unei epidemii de holeră în 1832 în vîrstă de 36 de ani, lăsînd pe alții să dezvolte cercetările sale. William Thomson (mai tîrziu lord Kelvin) a fost acela care a modificat raționamentul lui Carnot pentru a-l aduce în acord cu teoria mecanică a căldurii și care, împreună cu Clausius, a dezvoltat cu succes știința termodinamicii.

Carnot a dezvoltat conceptul de mașină reversibilă și ciclul reversibil numit în cinstea lui. El a enunțat o teoremă de mare importanță practică: *randamentul tuturor mașinilor reversibile care funcționează între aceleași două temperaturi este același și nici o mașină ireversibilă, funcționînd între aceleași două temperaturi nu poate avea un randament mai mare decît acesta.*

Clausius și Kelvin au arătat că această teoremă a fost o consecință necesară a principiului II al termodinamicii. Observăm că nu se spune nimic despre substanța de lucru, astfel încît randamentul unei mașini reversibile este independent de substanța de lucru și depinde numai de temperaturi. Mai mult, o mașină reversibilă lucrează cu randamentul maxim posibil pentru oricare mașină care funcționează între aceleași două limite de temperatură. Demonstrația acestei teoreme urmează mai jos.

Să notăm cele două mașini reversibile cu H și H' . Ele funcționează între temperaturile T_1 și T_2 unde $T_1 > T_2$. Ele pot diferi, de exemplu, prin substanța lor de lucru sau prin presiunile inițiale sau prin lungimile cursei pistonului. Alegem pe H să funcționeze în sens direct, iar pe H' în sens invers (ca o mașină frigorifică). Mașina termică cu sensul direct H absoarbe căldura Q_1 la temperatura T_1 și cedează căldura Q_2 la temperatura T_2 . Mașina frigorifică cu sens inversat H' absoarbe căldura Q_2' la temperatura T_2 și cedează căldura Q_1' la temperatura T_1 . Să conectăm acum cele două mașini mecanic și să ajustăm lungimea cursei pistonului astfel încît lucrul mecanic efectuat pe ciclu de către H să fie exact egal cu lucrul mecanic necesar pentru a funcționa H' (fig. 25-7). Să presupunem că randamentul η al lui H ar fi mai mare decît randamentul η' al lui H' . Atunci

$$\eta > \eta' \text{ (ipoteză)}$$

sau

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}$$

Deoarece lucrul mecanic pe ciclu efectuat de o mașină este egal cu lucrul mecanic pe ciclu efectuat asupra celeilalte mașini,

$$W = W'$$

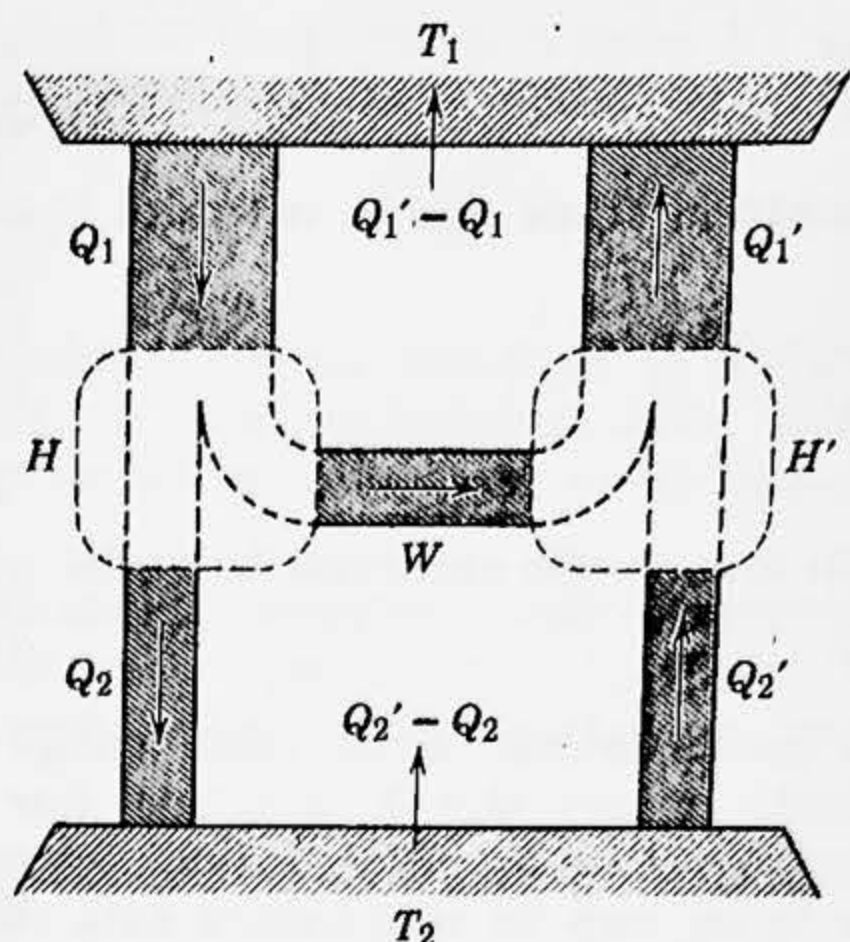


Figura 25-7. Pentru demonstrația teoremei lui Carnot.

sau

$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2.$$

Comparind aceste relații, vedem că (deoarece $Q_1 - Q_2 > 0$)

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q'_1}$$

sau

$$Q_1 < Q'_1$$

Prin urmare (din egalitatea lucrurilor mecanice),

$$Q_2 < Q'_2.$$

În modul acesta, sursa caldă câștigă căldura $Q'_1 - Q_1$ (pozitivă), iar sursa rece pierde căldura $Q'_2 - Q_2$ (pozitivă). Dar în acest proces nu se efectuează nici un lucru mecanic de către sistemul compus $H + H'$ astfel încât am transferat căldură de la un corp de temperatură dată către un corp de temperatură mai înaltă fără a cheltui lucru mecanic — în directă contradicție cu enunțul lui Clausius al principiului II. Prin urmare, tragem concluzia că η nu poate fi mai mare decât η' . Analog inversînd mașinile putem folosi același raționament pentru a arăta că η' nu poate fi mai mare decât η . Prin urmare

$$\eta = \eta',$$

ceea ce demonstrează prima parte a teoremei lui Carnot.

Să presupunem acum că H este o mașină ireversibilă. Atunci, prin același procedeu putem demonstra că η_{ir} nu poate fi mai mare decât η' . Dar H nu poate fi inversat, astfel încît nu putem demonstra că η' nu poate fi mai mare decât η_{ir} . Prin urmare, η_{ir} este egal sau mai mic decât η' . Deoarece $\eta' = \eta = \eta_{rev}$, avem

$$\eta_{ir} \leq \eta_{rev}$$

ceea ce dovedește partea a doua a teoremei lui Carnot.

Exemplul 2. O mașină cu aburi este alimentată cu aburi de la un cazan la 200°C ($1,55 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ presiune) și îl evacuează direct în aer ($9,65 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ presiune) la 100°C . Care este randamentul maxim posibil?

Folosind rezultatul de la exemplul 1 (care se aplică în acest caz în virtutea teoremei lui Carnot, pe care am demonstrat-o mai sus) avem

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{473 \text{ K} - 373 \text{ K}}{473 \text{ K}} \cdot 100\% = 21,1\%.$$

De obicei se realizează randamente reale de aproximativ 15%. Se pierde energie prin frecări, turbulență și conductibilitate termică. Temperaturi de eșapament mai coborîte în mașini cu aburi mai complicate pot mări randamentul maxim posibil pînă la 35% și randamentul real pînă la 20%. Randamentul unui motor obișnuit de automobil, este de aproximativ 22% și randamentul unui motor mare Diesel cu petrol este de aproximativ 40%.

25-6. Scara termodinamică a temperaturilor

Randamentul unei mașini reversibile este independent de substanța de lucru și depinde numai de cele două temperaturi între care lucrează mașina. Deoarece

$\eta = 1 - Q_2/Q_1$, raportul Q_2/Q_1 poate depinde numai de temperaturi. Aceasta l-a condus pe Kelvin să propună o nouă scară a temperaturilor. Dacă notăm cu θ_1 și θ_2 aceste două temperaturi, ecuația sa de definiție este

$$\theta_1/\theta_2 = Q_1/Q_2.$$

Adică două temperaturi în această scară se află în același raport ca și căldurile absorbită, respectiv cedată, de o mașină Carnot care funcționează între aceste temperaturi. O astfel de scară a temperaturilor se cheamă *scara termodinamică* (Kelvin) a temperaturilor.

Pentru a completa definiția scării termodinamice, prescriem valoarea arbitrară de 273,16 K temperaturii punctului triplu al apei. Prin urmare $\theta_{tr} = 273,16$ K. Atunci pentru o mașină Carnot care funcționează între rezervoare aflate la temperaturile θ și θ_{tr} avem

$$\frac{\theta}{\theta_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}}$$

sau

$$\theta = 273,16 \text{ K} \frac{Q}{Q_{tr}}. \quad (25-4)$$

Dacă comparăm aceasta cu ecuația corespunzătoare pentru temperatura în scara gazului ideal T și anume

$$T = 273,16 \text{ K} \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{p}{p_{tr}}. \quad (25-5)$$

vedem că în scara termodinamică Q joacă rolul unei proprietăți termometrice. Căldura Q nu depinde însă de caracteristicile vreunei substanțe deoarece o mașină Carnot este independentă de natura substanței de lucru. De aceea, obținem o scară a temperaturilor eliberată de obiecția pe care am ridicat-o împotriva scării gazului ideal în capitolul 21 și ajungem de fapt la o definiție fundamentală a temperaturii.

Definiția temperaturii termodinamice ne permite să retranscriem ecuația randamentului unei mașini reversibile astfel

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}. \quad (25-6)$$

Am arătat însă (exemplul 1) că randamentul unei mașini Carnot, care folosește un gaz ideal ca substanță de lucru este

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (25-7)$$

unde T este temperatura indicată de termometrul la volum constant conținând gaz ideal. Prin urmare $Q_1/Q_2 = T_1/T_2$ și $Q_1/Q_2 = \theta_1/\theta_2$. Deoarece $\theta_{tr} = T_{tr} = 273,16^\circ$ și $\theta/\theta_{tr} = T/T_{tr}$, rezultă că $\theta = T$. Prin urmare, dacă un gaz ideal ar fi disponibil pentru a fi folosit într-un termometru la volum constant, termometrul ar indica temperatura termodinamică (sau Kelvin). Am văzut că, deși în realitate nu există un gaz ideal, măsurătorile efectuate folosind procesul la limită din ecuația (25-5) cu gaze reale corespund comportării gazului ideal. Vom trata scara gazului ideal

și scara termodinamică ca fiind identice și vom folosi notația Kelvin pentru fiecare dintre ele, așa cum de fapt am și făcut-o până acum.

În practică, nu putem avea un gaz sub 1 K. Una din metodele folosite pentru măsurarea temperaturilor sub 1 K folosește direct scara termodinamică. Raportul a două temperaturi termodinamice este egal cu raportul celor două călduri transferate în timpul a două procese izoterme legate prin două adiabate (fig. 25-8). Poziția celor două adiabate (pe diagrama p — V) poate fi găsită experimental și căldurile transferate în timpul celor două procese izoterme aproape reversibile pot fi măsurate cu mare precizie. Din ecuațiile

$$T - 273,16 \text{ K} = \frac{Q}{Q_{tr}} \text{ sau } \frac{T}{T_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}}$$

rezultă clar că căldura Q transferată într-un proces izoterm între două adiabate date descrește odată cu descreșterea temperaturii T . Invers, cu cât Q este mai mic, cu atât temperatura corespunzătoare T este mai joasă. Dar valoarea minimă posibilă a lui Q este zero, și T corespunzător este zero absolut. Adică *dacă un sistem suferă un proces izoterm reversibil fără transfer de căldură, temperatura la care are loc acest proces este zero absolut*. Prin urmare la zero absolut un proces izoterm și un proces adiabatic sînt identice (fig. 25-8).

Această definiție a lui zero absolut se aplică tuturor substanțelor și este independentă de proprietățile oricăreia dintre ele. Observăm că nu se face nici o referire la molecule sau la energia moleculară și că am obținut o definiție pur macroscopică a lui zero absolut.

Randamentul unei mașini Carnot este

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

care reprezintă randamentul maxim posibil pe care îl poate avea vreo mașină care funcționează între temperaturile T_1 și T_2 . Pentru a obține un randament 100%,

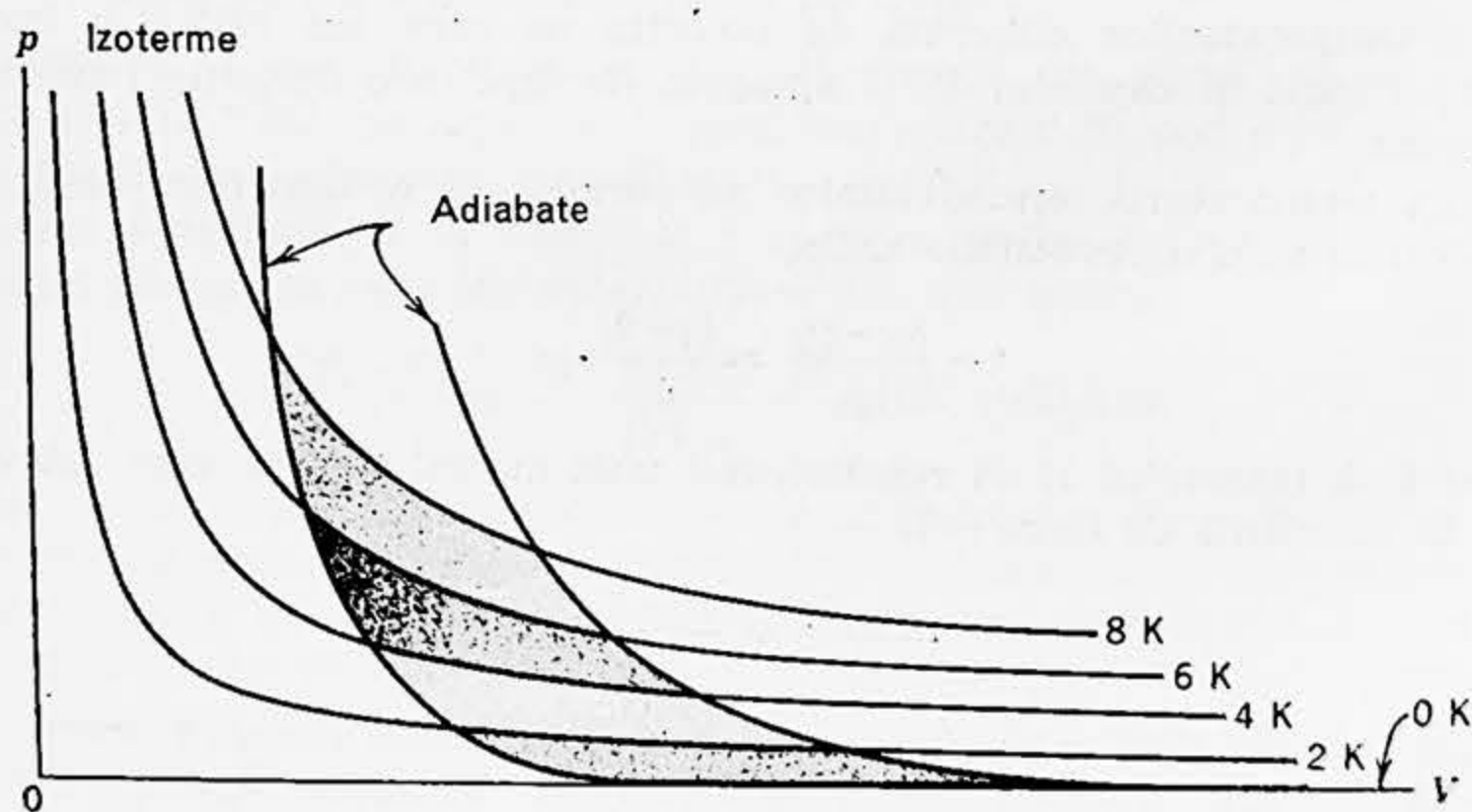


Figura 25-8. O serie de cicluri Carnot care tind către temperatura de zero absolut, așa cum sînt folosite pentru stabilirea scării termodinamice a temperaturilor. Diferența pantelor între izoterme și adiabate a fost aici exagerată pentru claritate.

T_2 trebuie să fie zero. Numai dacă rezervorul de temperatură joasă ar fi la zero absolut, întreaga căldură absorbită de la rezervorul de temperatură înaltă ar fi transformată în lucru mecanic.

Trăsătura fundamentală a tuturor proceselor de răcire este aceea că, cu cât temperatura este mai joasă cu atât este mai dificil de mers și mai jos. Această experiență a condus la formularea celui de-al treilea principiu al termodinamicii care poate fi formulat astfel: *este imposibil să aducem un sistem, prin vreun procedeu, oricum ar fi idealizat, la temperatura de zero absolut printr-un număr finit de operații.* Prin urmare, deoarece nu putem obține un rezervor la zero absolut, o mașină termică cu randamentul 100% constituie o imposibilitate practică.

25-7. Entropia. Procesele reversibile

Principiul zero al termodinamicii este legat de conceptul de temperatură T iar principiul I este legat de conceptul de energie internă U . În acest paragraf și în cele următoare vom arăta că principiul II al termodinamicii este legat de o variabilă termodinamică numită entropie S , și că putem exprima principiul II cantitativ cu ajutorul acestei variabile. Vom începe cu considerarea unui ciclu Carnot. Pentru un astfel de ciclu am văzut (ecuația 25-3) că

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

în care căldurile Q erau luate drept cantități pozitive, adică am lucrat numai cu valorile absolute ale căldurilor Q . Dacă acum le interpretăm iarăși ca mărimi algebrice, Q fiind pozitiv dacă căldura este absorbită de sistem și negativ dacă căldura este cedată de sistem, putem scrie această relație astfel

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Această ecuație afirmă că suma cantităților algebrice Q/T este zero pentru un ciclu Carnot.

Drept etapă următoare, afirmăm că orice ciclu reversibil este echivalent, cu orice grad de precizie vrem, cu un ansamblu de cicluri Carnot. Figura 25-9, *a* arată un ciclu reversibil arbitrar suprapus peste o familie de izoterme. Putem aproxima ciclul real unind izotermele prin adiabate alese convenabil (fig. 25-9, *b*) formînd astfel un ansamblu de cicluri Carnot. Studentul trebuie să se convingă că parcurgerea ciclurilor Carnot individuale din figura 25-9, *b*, este exact echivalentă, în ceea ce privește căldura schimbată și lucrul mecanic efectuat, cu parcurgerea succesiunii zimțate de izoterme și adiabate care aproximează ciclul real. Aceasta se datorește faptului că ciclurile Carnot adiacente au o izotermă comună și cele două transversale, parcurse în sensuri opuse se reduc între ele în regiunea de suprapunere, atîta timp cît este vorba de schimbul de căldură și de lucrul mecanic efectuat. Făcînd intervalul de temperatură dintre izotermele din figura 25-9, *b* suficient de mic, putem

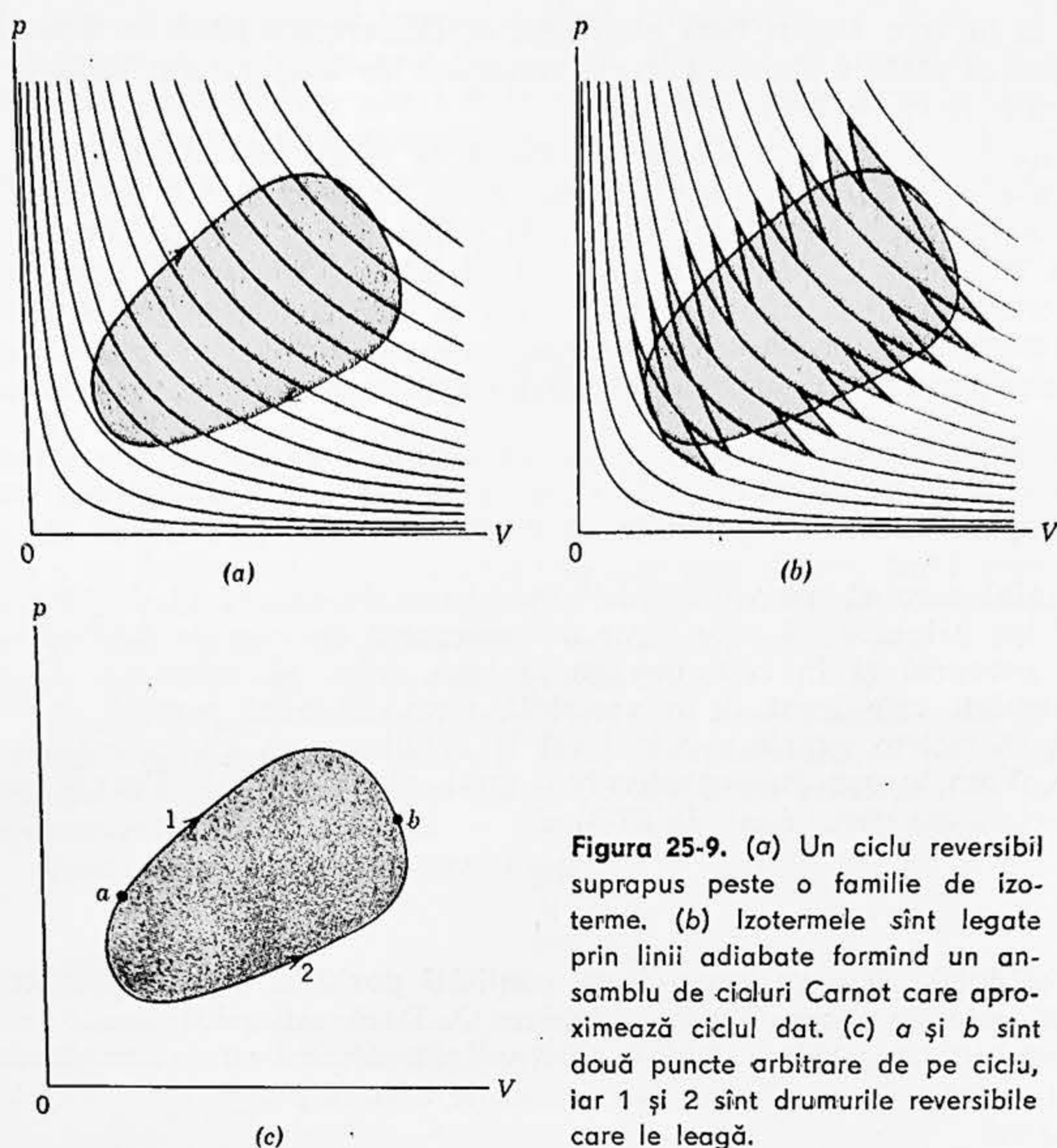


Figura 25-9. (a) Un ciclu reversibil suprapus peste o familie de izoterme. (b) Izotermele sînt legate prin linii adiabate formînd un ansamblu de cicluri Carnot care aproximează ciclul dat. (c) a și b sînt două puncte arbitrare de pe ciclu, iar 1 și 2 sînt drumurile reversibile care le leagă.

aproxima ciclul real oricît de precis prin succesiunea alternantă de izoterme și adiabate.

Putem scrie atunci pentru succesiunea de linii izoterme și adiabate din figura 25-9, b

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

sau la limită pentru diferențe de temperatură infinitezimale între izotermele din figura 25-9, b

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (25-8)$$

în care \oint arată că integrala se ia pe întregul ciclu, pornind (și sfîrșind) în oricare punct arbitrar al ciclului.

Dacă integrala unei mărimi de-a lungul unui drum închis este zero, acea mărime se numește variabilă de stare, adică ea are o valoare care este caracteristică numai pentru starea sistemului indiferent de modul

cum s-a ajuns la acea stare. Numim variabila în acest caz *entropia* S și avem, din ecuația (25-8)

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ și } \oint dS = 0. \quad (25-9)$$

Unitățile obișnuite pentru entropie sînt J/K sau cal/K.

Energia potențială gravitațională E_{pg} , energia internă U , presiunea p și temperatura T sînt alte variabile de stare și pentru fiecare din ele sînt valabile ecuații de forma $\oint dX = 0$ unde pentru X substituim simbolul corespunzător. Căldura Q și lucrul mecanic W nu sînt variabile de stare și știm că în general $\oint dQ \neq 0$ și $\oint dW \neq 0$, așa cum studentul poate arăta ușor în cazul particular al unui ciclu Carnot.

Proprietatea unei variabile de stare exprimată prin ecuația $\oint dX = 0$ poate fi exprimată de asemenea spunînd că $\int dX$ între oricare două stări de echilibru are aceeași valoare pentru toate drumurile reversibile care unesc cele două stări. Să demonstrăm aceasta pentru variabila de stare numită entropie. Putem scrie ecuația (25-9) (vezi fig. 25-9, c) astfel

$$\int_a^b dS + \int_b^a dS = 0 \quad (25-10)$$

unde a și b sînt puncte arbitrare iar 1 și 2 descriu drumurile care leagă aceste puncte. Deoarece ciclul este reversibil, putem scrie ecuația (25-10) astfel:

$$\int_a^b dS - \int_a^b dS = 0$$

sau

$$\int_a^b dS = \int_a^b dS. \quad (25-11)$$

În ecuația (25-11) nu am făcut decît să parcurgem în sens invers drumul 2, adică de la a la b și nu de la b la a . Facem aceasta prin schimbarea ordinii limitelor din integrala a doua din ecuația (25-10) ceea ce cere ca să schimbăm de asemenea semnul integralei, ducînd astfel la ecuația (25-11). Ultima ecuație ne spune că cantitatea $\int_a^b dS$ între două stări de echilibru ale sistemului, cum sînt a și b , este independentă de drumul care unește acele stări, deoarece 1 și 2 sînt drumuri complet arbitrare. Studentul își va reaminti discuția aproape identică de la paragraful 8-2 unde am introdus conceptul de forță conservativă.

Variația de entropie între a și b din figura 25-9, c este atunci

$$S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T} \text{ (proces reversibil)} \quad (25-12)$$

unde integrala este luată de-a lungul oricărui drum reversibil care unește cele două stări.

25-8. Entropia. Procesele ireversibile

În paragraful 25-7 am vorbit numai de procesele reversibile. Entropia, la fel ca toate variabilele de stare, depinde însă numai de starea sistemului și trebuie să fim în stare să calculăm variația de entropie pentru procese ireversibile, cu condiția doar ca ele să înceapă și să sfârșească în stări de echilibru. Să considerăm două exemple.

1. *Destinderea liberă în vid.* Ca în paragraful 22-7 (vezi fig. 22-14), să lăsăm un gaz să-și dubleze volumul prin destindere într-un spațiu vidat. Deoarece nu se efectuează nici un lucru mecanic împotriva vidului, $W=0$ și deoarece gazul este închis între pereți neconductori, $Q=0$. Din primul principiu rezultă atunci $\Delta U=0$ sau

$$U_i = U_f \quad (25-13)$$

unde i și f se referă la starea inițială și starea finală (de echilibru). Dacă gazul este un gaz ideal, U depinde numai de temperatură și nu de presiune sau volum, astfel încât ecuația (25-13) implică $T_i = T_f$.

Destinderea liberă în vid este sigur ireversibilă, deoarece noi pierdem controlul mediului înconjurător după deschiderea robinetului din figura 22-14. Există însă o diferență de entropie $S_f - S_i$ între starea de echilibru inițială și cea finală dar nu o putem calcula din ecuația (25-12) deoarece acea relație se aplică numai proceselor reversibile; dacă am încerca să folosim acea ecuație am întâmpina dificultatea imediată aceea că $Q=0$ pentru destinderea liberă, și — mai departe — n-am ști cum să prescriem valori cu sens lui T pentru stările intermediare de neechilibru.

Cum să calculăm atunci $S_f - S_i$ pentru o destindere liberă în vid? Putem face aceasta găsind un drum *reversibil* (orice drum reversibil) care să lege stările i și f și calculând variația de entropie pentru acest drum. În destinderea liberă, un drum (proces) reversibil convenabil (considerând un gaz ideal) este o destindere izotermă de la V_i pînă la $V_f (=2V_i)$. Aceasta corespunde destinderii izoterme efectuate între punctele a și b ale ciclului Carnot din figura 25-4. Ea reprezintă un șir cu totul diferit de operații față de destinderea liberă și are comun cu aceasta doar faptul că leagă aceleași două stări de echilibru, i și f . Din ecuația (25-12) și exemplul 1 avem

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \mu R \ln(V_f/V_i) = \mu R \ln 2.$$

Acest rezultat este pozitiv astfel încît entropia sistemului crește în acest proces adiabatic ireversibil.

2. *Conducția căldurii.* Drept al doilea exemplu să considerăm două corpuri care sînt identice în toate privințele cu excepția faptului că unul se află la o temperatură T_1 , iar celălalt la o temperatură T_2 , unde $T_1 > T_2$. Dacă punem în contact cele două corpuri în interiorul unei încălzi cu pereți neconductori, ele vor atinge pînă la urmă o temperatură comună T_m , aflată aproximativ la mijloc între T_1 și T_2 . La fel ca și destinderea liberă, procesul este ireversibil deoarece pierdem controlul me-

diului exterior odată ce punem cele două corpuri în incintă. La fel ca și destinderea în vid, acest proces este de asemenea adiabatic și ireversibil, deoarece sistemul nu absoarbe și nu cedează căldură în timpul procesului.

Pentru a calcula variația de entropie a sistemului în timpul acestui proces, trebuie să găsim din nou un proces *reversibil* care să lege aceleași stări inițială și finală și să calculăm variația de entropie a sistemului, aplicând ecuația (25-12) aceluși proces. Putem face aceasta dacă ne imaginăm că avem la dispoziție un rezervor de căldură de mare capacitate calorică a cărui temperatură T este sub controlul nostru, de exemplu prin răsucirea unui buton. Ajustăm mai întâi temperatura rezervorului la T_1 și punem primul obiect, mai cald, în contact cu rezervorul. Micșorăm apoi lent (reversibil) temperatura rezervorului de la T_1 până la T_m , absorbind căldură de la corpul cald în timpul acestei operații. Corpul cald pierde entropie în acest proces, cantitatea fiind aproximativ

$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_{1,m}}$$

unde $T_{1,m}$ este media lui T_1 și T_m , iar Q este căldura absorbită.

Ajustăm apoi temperatura rezervorului nostru la T_2 și îl punem în contact cu cel de-al doilea obiect (mai rece). Mărim apoi lent (reversibil) temperatura rezervorului de la T_2 până la T_m , cedînd căldură corpului rece în timpul acestei operații. Corpul rece câștigă entropie în acest proces, cantitatea fiind aproximativ

$$\Delta S_2 = +\frac{Q}{T_{2,m}}$$

unde $T_{2,m}$ este media lui T_2 și T_m , iar Q este căldura transmisă.

Cele două corpuri se află acum la aceeași temperatură T_m și sistemul, care constă din aceste două corpuri se găsește acum în starea sa finală de echilibru. Variația de entropie pentru sistemul complet este

$$S_f - S_i = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_{1,m}} + \frac{Q}{T_{2,m}}.$$

Deoarece $T_{1,m} > T_{2,m}$, avem $S_f > S_i$. Din nou, ca și pentru destinderea în vid, entropia sistemului a crescut în acest proces adiabatic ireversibil.

În fiecare din aceste exemple trebuie să facem o distincție clară între procesul real ireversibil (destinderea liberă în vid sau conducția de căldură) și procesul reversibil pe care îl introducem, astfel încît să putem calcula variația de entropie din procesul real. Putem alege orice proces reversibil, atîta timp cît el leagă aceleași stări inițială și finală, ca și procesul real; toate aceste procese reversibile vor da aceeași variație de entropie, deoarece aceasta depinde numai de starea inițială și starea finală și nu de procesul care le leagă — fie el reversibil sau ireversibil.

25-9. Entropia și principiul II

Sîntem acum pregătiți să formulăm al doilea principiu al termodinamicii cu ajutorul entropiei. Deoarece acest principiu constituie o gene-

realizare a experienței, nu-l putem demonstra ci putem numai să-l scriem și să arătăm că enunțul nostru este în concordanță cu experiența și este echivalent cu alte formulări ale principiului II pe care le-am dat mai înainte. În acest spirit afirmăm că principiul II este: *un proces natural care pornește dintr-o stare de echilibru și sfârșește într-o altă stare de echilibru se va desfășura în sensul care duce la o creștere a entropiei sistemului plus mediu.*

Urmind modelul de la principiul zero și principiul I al termodinamicii (vezi paginile 590—591) esența principiului II, vorbind liber, este: *există o variabilă termodinamică utilă numită entropie.* Principiul II ne spune de asemenea cum să folosim această variabilă pentru a prezice dacă un anumit proces concret se va produce sau nu în natură.

Cele două experiențe din paragraful 25-8 (destinderea liberă în vid și conducția de căldură) sînt compatibile cu principiul II. Entropia sistemului a crescut în fiecare din aceste procese ireversibile. Observăm că entropia mediului înconjurător în aceste două cazuri rămîne neschimbată, deoarece ambele procese fiind realizate în încălzi adiabatice, nu exista nici un schimb de căldură cu mediul ambiant. În modul acesta, așa cum cere enunțul principiului II, entropia sistemului plus mediu a crescut pentru fiecare din aceste procese naturale.

În forma în care l-am scris, principiul II se aplică numai proceselor ireversibile deoarece numai astfel de procese au un „sens natural de desfășurare”. În adevăr (vezi paragraful 25-1) înțelegerea sensului natural de desfășurare a unor astfel de procese este subiectul principal al principiului II. Procesele reversibile se pot desfășura însă la fel de bine în fiecare sens și *pentru procesele reversibile entropia sistemului plus mediu rămîne neschimbată.* Aceasta se întîmplă astfel, deoarece dacă căldura dQ este transmisă de la mediu către sistem entropia mediului *decrește* cu dQ/T în timp ce entropia sistemului *crește* cu dQ/T , variația netă a sistemului plus mediul fiind zero. Faptul că procesul este reversibil înseamnă că temperatura mediului și a sistemului pot diferi doar printr-o cantitate infimezimă dT atunci cînd are loc transferul de căldură; această este în contrast izbitor cu problema conductibilității termice (ireversibile) de la paragraful precedent, în care diferența de temperatură a celor două corpuri puse în contact era mare.

O altă clasă de procese care prezintă un deosebit interes sînt procesele adiabatice (reversibile sau ireversibile); ele nu implică vreun schimb de căldură cu mediul exterior, astfel încît singura variație posibilă a entropiei este cea a sistemului. Din enunțul principiului II și din observațiile noastre relativ la procesele reversibile în paragraful de mai sus, tragem concluzia că

$$\text{și} \quad S_f = S_i \quad (\text{proces adiabetic reversibil})$$

$$S_f > S_i \quad (\text{proces adiabetic ireversibil}),$$

unde S_f și S_i sînt entropiile în stările finală și inițială ale sistemului.

Enunțul nostru privind principiul II este în concordanță cu enunțul lui Clausius (pag. 659) care declară că nu există o mașină frigorifică „perfectă” (vezi

fig. 25-6). Dacă ar exista, entropia rezervorului de temperatură joasă ar *descrește* cu Q/T_2 ; cea a rezervorului de temperatură înaltă ar *crește* cu Q/T_1 ; cea a sistemului ar rămâne neschimbată, deoarece sistemul parcurge un ciclu, revenind la punctul său de plecare. În modul acesta, variația netă a entropiei sistemului plus mediu ar *descrește*, deoarece $T_2 < T_1$. Aceasta contrazice afirmația principiului II pe care am dat-o mai sus și, dacă vrem să menținem afirmația, trebuie să tragem concluzia (împreună cu Clausius) că nu există o mașină frigorifică „perfectă”.

Enunțul nostru privind principiul II este de asemenea în concordanță cu enunțul lui Kelvin și Planck (pag. 659) care declară că nu există o mașină termică „perfectă” (vezi fig. 25-5). Dacă ar exista, atunci entropia rezervorului de temperatură T ar *descrește* cu Q/T ; cea a sistemului ar rămâne neschimbată deoarece sistemul parcurge un ciclu revenind la punctul său de plecare. În modul acesta variația netă a entropiei sistemului plus mediu ar *descrește*. Aceasta contrazice enunțul principiului II pe care l-am dat mai sus și dacă vrem să menținem enunțul, trebuie să tragem concluzia (împreună cu Kelvin) că nu există o mașină termică „perfectă”.

Exemplul 3. Să se calculeze variația de entropie a unui sistem format din 1,00 kg gheață la 0°C care se topește (reversibil) transformându-se în apă la aceeași temperatură. Căldura latentă de topire este $79,6 \text{ cal/g}$.

A topi gheața reversibil înseamnă a o pune în contact cu un rezervor de căldură a cărui temperatură depășește 0°C doar cu o cantitate infinitesimală; dacă am coborî temperatura rezervorului pînă cînd ar ajunge sub 0°C , cu o cantitate infinitesimală, gheața topită ar începe să înghețe. Deoarece procesul este reversibil, putem folosi ecuația (25-12) pentru a calcula variația de entropie a sistemului. Temperatura rămîne constantă la 273 K . Prin urmare

$$S_{\text{apă}} - S_{\text{gheață}} = \int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_0^Q dQ = \frac{Q}{T}.$$

Dar

$$Q = 10^3 \text{ g} \cdot 79,6 \text{ cal/g} = 7,96 \cdot 10^4 \text{ cal}$$

sau

$$S_{\text{apă}} - S_{\text{gheață}} = \frac{7,96 \cdot 10^4}{273} \text{ cal/K} = 292 \text{ cal/K} = 1220 \text{ J/K}.$$

În acest exemplu de topire reversibilă variația de entropie a sistemului plus mediul este zero, așa cum și trebuie pentru orice proces reversibil. Variația de entropie calculată mai sus reprezintă creșterea de entropie a sistemului; există o descreștere exact egală a entropiei mediului (-1220 J/K) legată de căldura cedată de rezervor (mediu) la 273 K pentru a topi gheața.

În practică topirea este de obicei ireversibilă, de exemplu cînd punem un cub de gheață într-un pahar cu apă la temperatura camerei. Acest proces are doar un singur sens natural de desfășurare — gheața se va topi. Entropia sistemului plus mediul va crește în acest proces așa cum cere principiul II. Exemplul cu conducția de căldură (ireversibilă) de la paragraful precedent poate face aceasta inteligibil.

Exemplul 4. Să se calculeze variația de entropie pe care o suferă un gaz ideal într-o destindere izotermă reversibilă de la un volum V_i pînă la un volum V_f .

Din principiul I

$$dU = dQ - pdV$$

Dar $dU=0$, deoarece U depinde numai de temperatură pentru un gaz ideal, iar temperatura este constantă. Prin urmare

$$dQ = pdV$$

și

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{pdV}{T}$$

Dar

$$pV = \mu RT,$$

astfel încît

$$dS = \mu R \frac{dV}{V}$$

și

$$S_f - S_i = \int_{V_i}^{V_f} \mu R \frac{dV}{V} = \mu R \ln \frac{V_f}{V_i}. \quad (25-14)$$

Deoarece $V_f > V_i$, rezultă $S_f > S_i$ și entropia gazului crește.

Pentru a realiza acest proces trebuie să avem în rezervor la temperatura T care să fie în contact cu sistemul și să furnizeze căldură gazului. Prin urmare, entropia rezervorului descrește cu $\int dQ/T$ [$= \mu R \ln (V_f/V_i)$], astfel încît în acest proces entropia sistemului plus mediul nu variază. Ca și în exemplul precedent aceasta este o caracteristică a unui proces reversibil.

25-10. Entropia și dezordinea

Freeman Dyson în articolul „What Is Heat?”¹ (Ce este căldura?), scrie:

„Căldura este energie dezordonată. Astfel, în două cuvinte natura căldurii este explicată.

... Energia poate exista fără dezordine. De exemplu un glonte de pușcă în zbor sau un atom de ^{235}U poartă energie ordonată. Mișcarea glontelui este un tip de mișcare pe care o numim cinetică. Atunci cînd glonte lovește o placă de oțel și este oprit, energia mișcării sale este transmisă mișcărilor întâmplătoare ale atomilor din glonte și din placă. Această energie dezordonată se face simțită sub formă de căldură... Energia inclusă în atomul de uraniu este un tip de energie pe care o numim potențială; ea constă din forțe electrice care tind să respingă protonii constituenți unul de altul. Atunci cînd atomul fisionează, energia de mișcare a fragmentelor în zbor este transformată prin ciocniri în mișcările întâmplătoare ale electronilor și altor atomi din apropiere din substanța înconjurătoare — cu alte cuvinte în căldură. Această transformare a energiei potențiale în căldură constituie principiul de funcționare a reactorilor nucleari.

Aceste două exemple ilustrează principiul general că energia devine căldură imediat ce apare dezordinea. Este adevărat și reciproc că dezordinea poate exista fără energie și că dezordinea devine căldură imediat ce este făcută energetică. Atomii de ^{235}U și ^{238}U dintr-o bucată de uraniu obișnuit sînt amestecați într-un mod întâmplător, dar această dezordine nu poartă nici o energie...

¹ Scientific American, septembrie 1954.

Pentru a merge mai departe trebuie să ne exprimăm cantitativ. Trebuie să măsurăm căldura cu precizie cu ajutorul numerelor... În primul rând este clar că pentru a specifica căldura trebuie să folosim cel puțin două numere: unul pentru a măsura energia, celălalt pentru a măsura starea de dezordine. Energie este măsurată cu unitatea practică numită calorie... Starea de dezordine este măsurată cu ajutorul conceptului matematic numit entropie..."

Dacă există o legătură între dezordine și entropie, atunci dezordinea, analog entropiei, trebuie să crească într-un proces natural. Vom încerca să arătăm că aceasta este adevărat arătând că în exemplele de la paragraful 25-8, destinderea liberă în vid și transmisia de căldură, dezordinea sistemului și a mediului în adevăr crește. Vom folosi întâi concepte calitative rezonabile de dezordine și vom defini dezordinea mai riguros mai târziu.

1. *Destinderea liberă.* Într-o destindere liberă (paragraful 22-7) moleculele de gaz, restrânse la o jumătate a unui vas sînt lăsate să se destindă în întregul vas. Oricare ar fi definiția rezonabilă a cuvîntului dezordine, sistemul a devenit mai dezordonat, în același sens în care dezordinea crește dacă resturile dintr-o grămadă sînt împrăștiate pe două grămezi. Mai precis, dezordinea a crescut deoarece noi am pierdut ceva din capacitatea noastră de a clasifica moleculele. Afirmația: „Moleculele se află în vas”, este mai slabă din acest punct de vedere decît afirmația „moleculele se află în jumătatea stîngă a vasului”; vezi mai jos.

2. *Conducția căldurii.* În acest exemplu două corpuri avînd temperaturi diferite T_1 și T_2 ajung la o temperatură intermediară uniformă T atunci cînd sînt puse în contact. Și aici sistemul devine mai dezordonat în acest proces natural deoarece noi am pierdut ceva din capacitatea noastră de a clasifica moleculele. Afirmația: „Toate moleculele din sistem corespund, conform ecuației (23-6), temperaturii T ” este mai slabă din acest punct de vedere decît afirmația: „Toate moleculele din corpul A corespund temperaturii T_1 și toate moleculele din corpul B corespund temperaturii T_2 ”.

Aceste exemple și cele două exemple date de Dyson la începutul acestui paragraf (glonțele care lovește o placă de oțel și nucleul de uraniu care fisionează într-un reactor nuclear) ne conving că există o tendință pentru procesele naturale de a evolua spre o stare de dezordine mai mare.

În mecanica statistică se dă un sens precis dezordinii și se exprimă legătura sa cu entropia prin relația

$$S = k \ln w. \quad (25-15)$$

Aici k este constanta lui Boltzmann, S — entropia sistemului și w , pe care îl putem numi *parametrul de dezordine*, este probabilitatea ca sistemul să existe în starea în care se află față de toate stările posibile în care s-ar putea afla. Această ecuație leagă o mărime termodinamică sau macroscopică, entropia, de o mărime statistică sau microscopică — probabilitatea.

Să ilustrăm aceasta calculînd variația de entropie a unui gaz ideal într-o destindere izotermă. Aici numărul moleculelor și temperatura nu variază, dar variază volumul. Probabilitatea ca o moleculă dată să se găsească într-o regiune avînd un volum V este proporțională cu V ; adică cu cît V este mai mare, cu atît probabilitatea de a găsi molecula în V este mai mare. Prin urmare, probabilitatea de a găsi o singură moleculă în V este

$$w_1 = cV$$

unde c este o constantă. Probabilitatea de a găsi N molecule simultan în volumul V este un produs de N factori w_1 . Adică probabilitatea unei stări constând din N molecule într-un volum V este

$$w = w_1^N = (cV)^N, \quad (25-16)$$

De exemplu, dacă probabilitatea de a găsi o singură moleculă în V este $1/2$ (adică există o șansă de 50% ca ea să se găsească în V și o șansă de 50% ca ea să se găsească în afara lui V), probabilitatea de a găsi două molecule în V este $1/4$. Există aici patru stări egal probabile (ambele molecule în V ; ambele în afară; una în V , cealaltă în afară; una afară, cealaltă înăuntru) și numai una dintre aceste stări este starea cu ambele molecule în V .

Dacă combinăm acum ecuația (25-15) și ecuația (25-16) obținem

$$S = kN(\ln c + \ln V)$$

Prin urmare, diferența de entropie dintre o stare de volum V_f și o stare de volum V_i (temperatura și numărul moleculelor rămânând constante) este

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= kN(\ln c + \ln V_f) - kN(\ln c + \ln V_i) = \\ &= kN \ln \frac{V_f}{V_i} = \frac{RN}{N_0} \ln \frac{V_f}{V_i} = \mu R \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

în deplină concordanță cu rezultatul strict termodinamic din ecuația (25-14).

Ecuația (25-16) a fost aceea în baza căreia am afirmat mai sus că dezordinea crește în timpul destinderii libere; această ecuație dă $(cV)^N$ pentru parametrul de dezordine înaintea destinderii și $(c2V)^N$ pentru acel parametru când volumul s-a dublat prin destindere.

Definiția statistică a entropiei, ecuația (25-15), leagă tabloul termodinamic de cel mecanic statistic și ne permite să transpunem principiul II al termodinamicii într-un limbaj statistic. Sensul în care au loc procesele naturale (către entropie mai mare) este determinat de legile probabilității (către o stare mai probabilă). Starea de echilibru este starea de entropie maximă din punct de vedere termodinamic și este starea cea mai probabilă din punct de vedere statistic. Am văzut însă că pot apare fluctuații în jurul unei distribuții de echilibru (de exemplu mișcarea browniană). Atunci din acest punct de vedere nu este absolut sigur că entropia crește în orice proces spontan. Entropia poate uneori descrește. Dacă așteptăm timp suficient de îndelungat, chiar stările cele mai improbabile ar putea apărea: apa dintr-un vas ar putea brusc îngheța într-o zi caldă de vară sau un vid local ar putea apărea brusc într-o cameră. Deși asemenea evenimente sînt posibile, probabilitatea lor de apariție, dacă o calculăm, se constată a fi incredibil de mică. Prin urmare, al doilea principiu al termodinamicii ne arată cursul cel mai probabil al evenimentelor și nu numai pe cele posibile. Dar domeniul său de aplicație este atît de larg și șansa de a fi contrazis în natură atît de mică, încît el ocupă rangul de a fi cea mai utilă și mai generală lege din toate științele.

Intrebări

1. Ce condiții trebuie să satisfacă un sistem pentru a fi în echilibru termodinamic?

2. În procesul ireversibil din figura 25-1, a, putem calcula lucrul mecanic efectuat cu ajutorul ariei din

diagrama p — V ? Este efectuat vreun lucru mecanic?

3. Poate fi o cantitate dată de energie mecanică transformată complet în energie termică? Dacă este așa, să se dea un exemplu.

4. Puteți indica un proces reversibil în care căldura poate fi transmisă unui sistem? Va fi transmiterea căldurii cu ajutorul unui bec Bunsen un proces reversibil?

5. Să se dea câteva exemple de procese ireversibile întâlnite în natură.

6. Să se dea o explicație calitativă a felului cum forțele de frecare dintre suprafețe mobile produc energie termică. Se poate produce procesul invers (energia termică să producă o mișcare a acestor suprafețe)? Puteți da o explicație plauzibilă?

7. Un corp revine la poziția sa inițială după disiparea energiei mecanice în căldură datorită frecărilor. Este acest proces reversibil din punct de vedere termodinamic?

8. Pentru a efectua un ciclu Carnot nu este nevoie să pornim din punctul a din figura 25-4, ci putem la fel de bine porni din punctele b , c sau d sau oricare alt punct intermediar. Să se explice.

9. Dacă o mașină Carnot este independentă de substanța de lucru, atunci probabil mașinile reale vor fi și ele într-o anumită măsură independente de substanța de lucru. De ce atunci, pentru mașinile reale sîntem atât de interesați în a găsi combustibili potriviți, cum sînt cărbunele, gazolina sau material fisionabil? De ce nu folosim pietrele drept combustibil?

10. Am putea la fel de bine să definim randamentul unei mașini ca fiind $\eta = W/Q_2$ în loc de $\eta = W/Q_1$? De ce nu se definește așa?

11. Care factori reduc randamentul unei mașini termice față de valoarea sa ideală?

12. Pentru a mări randamentul unei mașini Carnot cît mai eficace,

l-ați mări pe T_1 , păstrîndu-l pe T_2 constant sau, invers, l-ați micșora pe T_2 , păstrîndu-l pe T_1 constant?

13. Poate fi răcită o bucătărie lăsînd deschisă ușa unui frigider electric? Să se explice.

14. Există o variație de entropie în mișcările pur mecanice?

15. Două cantități de gaz aflate inițial la aceeași temperatură și presiune sînt comprimate de la un volum V pînă la un volum $V/2$, unul izoterm, celălalt adiabatic. În care gaz presiunea finală va fi mai mare? Variază entropia gazului în fiecare proces?

16. Să presupunem că am ales pentru reprezentarea stării unui sistem entropia sa și temperatura sa absolută în locul presiunii și volumului său. Cum ar arăta un ciclu Carnot într-o diagramă T — S ?

17. Să considerăm un vas care conține un număr foarte mic de molecule, să zicem 5. Se poate din cînd în cînd întîmpla, ca prin șansă toate aceste molecule să se găsească în jumătatea stîngă a vasului, jumătatea dreaptă fiind complet vidă. Aceasta este exact reversul unei destinderi libere în vid, proces pe care l-am declarat ca fiind ireversibil. Care este explicația dvs.?

18. Să se arate că entropia totală crește atunci cînd lucrul mecanic este transformat în căldură prin frecare între două suprafețe care alunecă între ele. Să se descrie creșterea dezordinii.

19. Să se comenteze afirmația „O mașină termică transformă mișcarea mecanică dezordonată în mișcare mecanică ordonată (organizată)”.

20. Cînd așezăm cărțile de joc laolaltă într-un pachet sau așezăm cărămizi laolaltă pentru a construi o casă, de exemplu, noi mărim ordinea în lumea fizică. Violează aceasta principiul II al termodinamicii? Să se explice.

21. O bandă de cauciuc o simțim mai caldă decât mediul înconjurător imediat după ce este întinsă rapid; ea devine ceva mai rece atunci când este lăsată să se contracte rapid; o bandă de cauciuc care suportă o greutate se contractă dacă este încălzită. Să se explice aceste observații folosind faptul că moleculele de cauciuc constau din lanțuri de atomi, împletite și legate transversal, având orientări de ansamblu întîmplatore.

22. Să se explice afirmația: „Razele cosmice micșorează în mod continuu entropia Pământului pe care

cad”. Contrazice aceasta principiu II al termodinamicii?

23. Să se discute următorul comentariu al lui Panofsky și Phillips: „Din punctul de vedere al fizicii formale există numai un singur concept care este asimetric în timp, anume entropia. Dar aceasta face rezonabil să presupunem că principiul II al termodinamicii poate fi folosit pentru a determina sensul timpului independent de orice sistem de referință; adică vom lua sensul pozitiv al timpului acela în care dezordinea crește statistic sau entropia crește...”

Probleme

1. O mașină termică cu gaz ideal funcționează după un ciclu Carnot între 227°C și 127°C . Ea absoarbe $6,0 \cdot 10^4$ cal la temperatura mai înaltă. Cît lucru mecanic pe ciclu este capabilă să efectueze această mașină?

2. (a) O mașină Carnot funcționează între un rezervor cald la 320 K și un rezervor rece la 260 K . Dacă ea absoarbe 500 J căldură de la rezervorul cald, cît lucru mecanic furnizează ea? (b) Dacă aceeași mașină funcționează în sens invers ca o mașină frigorifică între aceleași două rezervoare, cît lucru mecanic trebuie furnizat mașinii pentru a evacua 1000 J căldură de la rezervorul rece?

3. Într-o mașină termică cu două trepte o cantitate de căldură Q_1 este absorbită la o temperatură T_1 , este efectuat un lucru mecanic W_1 și o cantitate de căldură Q_2 este cedată la o temperatură mai joasă T_2 de către prima treaptă a mașinii. Treapta a doua absoarbe căldura cedată de prima, efectuează lucrul mecanic W_2 și cedează o cantitate de căldură Q_3 la o temperatură mai joasă T_3 . Să se arate că randamentul mașinii combinate este $(T_1 - T_3)/T_1$.

4. O turbină, cu mercur și aburi, preia vaporii saturanți de mercur de

la un cazan la 470°C și îi evacuează pentru a încălzi un cazan de aburi la 238°C . Turbina cu abur primește aburul la această temperatură și-l evacuează într-un condensor la $37,8^{\circ}\text{C}$. Care este randamentul maxim al turbinei?

5. Folosind ecuația de stare a unui gaz ideal și ecuația care descrie un proces adiabatic pentru un gaz ideal, să se arate că panta dp/dV într-o diagramă $p-V$ a unei adiabate poate fi scrisă sub forma $-\gamma p/V$, iar panta unei izoterme poate fi scrisă sub forma $-p/V$. Din aceste rezultate să se arate că adiabatele sînt curbe mai abrupte decât izotermele.

6. (a) Să se reprezinte exact ciclul Carnot într-o diagramă $p-V$ pentru 1 mol de gaz ideal. Punctul a corespunde la $p=1,0\text{ atm}$, $T=300\text{ K}$ iar punctul b corespunde la $p=0,5\text{ atm}$, $T=300\text{ K}$; temperatura rezervorului rece este 100 K . Raportul căldurilor specifice $\gamma=1,5$. (b) Să se calculeze pe cale grafică lucrul mecanic efectuat în acest ciclu.

7. Într-un ciclu Carnot destinderea izotermă a gazului are loc la 400 K iar comprimarea izotermă la 300 K . În timpul destinderii gazul absoarbe 500 cal energie termică. Să se deter-

mine: (a) lucrul mecanic efectuat de gaz în timpul destinderii izoterme, (b) căldura cedată de gaz în timpul comprimării izoterme, (c) lucrul mecanic efectuat asupra gazului în timpul comprimării izoterme.

8. (a) Dacă ciclul Carnot este parcurs în sens invers, vom avea o mașină frigorifică ideală. Căldura Q_2 este luată la temperatura mai joasă T_2 și căldura Q_1 este cedată de mașină la temperatura mai înaltă T_1 . Diferența reprezintă lucrul mecanic W care trebuie furnizat pentru funcționarea mașinii frigorifice. Să se arate că

$$W = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

(b) Eficiența sau coeficientul de performanță K al unei mașini frigorifice este definit ca raportul dintre căldura extrasă de la sursa rece și lucrul mecanic necesar pentru funcționarea ciclului. Să se arate că pentru o mașină frigorifică ideală

$$K = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Pentru mașinile frigorifice reale K are valoare cuprinsă între 5 și 6.

9. Într-un refrigerator mecanic serpentina de temperatură joasă se află la o temperatură de -13°C , iar gazul comprimat în condensor are o temperatură de 27°C . Care este coeficientul teoretic de performanță (eficiență)?

10. Cît lucru mecanic trebuie efectuat pentru a transfera $1,0 \text{ J}$ de căldură de la un rezervor la 7°C la un rezervor aflat la 27°C cu ajutorul unei mașini frigorifice care funcționează după un ciclu Carnot? De la -73°C la 27°C ? De la -173°C la 27°C , de la -223°C la 27°C ?

11. Motorul unui refrigerator are o putere la ieșire de 200 W . Dacă camera de congelare este la 270 K , iar aerul din exterior este la 300 K , presupunând o eficiență ideală, care va

fi cantitatea maximă de căldură care poate fi evacuată din camera de răcire în 10 min ?

12. Cum este legat randamentul unei mașini termice reversibile de eficiența unei mașini frigorifice reversibile obținută prin inversarea mașinii?

13. Într-o pompă de căldură, căldura Q_2 este extrasă din atmosfera exterioară la T_2 și o cantitate mai mare de căldură Q_1 este cedată în interiorul camerei la T_1 , cu efectuarea lucrului mecanic W . (a) Să se traseze o diagramă schematică a unei pompe de căldură. (b) Cum diferă ea în principiu de o mașină frigorifică? În folosirea practică? (c) Cum sînt legați între ei Q_1 , Q_2 și W ? (d) Poate fi inversată o pompă de căldură pentru a fi folosită vara? Să se explice. (e) Ce avantaje are o astfel de pompă față de alte aparate de încălzit?

14. Într-o pompă de căldură, căldura este luată din afară la -5°C și transmisă camerei la 17°C , energia fiind furnizată de un motor electric. Cîtă căldură (în jouli) va fi furnizată camerei pentru o unitate (1 J) de energie electrică consumată, în cazul ideal?

15. Să presupunem că am lua drept măsură a temperaturii $-1/T$ în loc de T . Unitatea de măsură pentru această mărime nouă ar putea fi numită grad nivlek (Kelvin scris invers) ($^\circ\text{N}$). Să se scrie o succesiune de temperaturi în $^\circ\text{N}$ de la valori pozitive la valori negative ale lui T . (Vezi nota de subsol pagina 563.)

16. (a) Să se arate că dacă o substanță de masă m avînd o căldură specifică constantă c este încălzită de la T_1 la T_2 variația de entropie este

$$S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

(b) Descrește entropia substanței dacă o răcim? Dacă este așa, descrește entropia totală într-un astfel de proces? Să se explice.

17. Într-o experiență de determinare a căldurii specifice, 100 g de plumb ($c_p = 0,0345 \text{ cal/g} \cdot \text{grad}$) la 100°C este introdus în 200 g apă la 20°C . Să se afle diferența dintre entropia sistemului la sfârșit și valoarea sa înainte de introducerea plumbului.

18. Patru moli de gaz ideal se destind de la un volum V_1 pînă la un volum V_2 ($=2V_1$). (a) Dacă destinderea este izotermă la temperatura $T=400 \text{ K}$, să se deducă o expresie pentru lucrul mecanic efectuat de gaz prin destindere. (b) Pentru destinderea izotermă descrisă, să se deducă o expresie pentru variația de entropie, dacă există vreuna. (c) Dacă destinderea ar fi adiabatică reversibilă în loc de izotermă, ar fi variația de entropie pozitivă, negativă sau zero?

19. Se poate evacua căldură din apă la 0°C și la presiunea atmosferică normală fără a provoca înghețarea apei, dacă aceasta se face fără perturbarea apei. Să presupunem că apa este răcită pînă la $-5,0^\circ\text{C}$ înainte de a începe formarea gheții. Care va fi variația de entropie pe unitatea de masă care se produce în timpul înghețării bruște care va avea atunci loc?

20. Un cub de gheață cu masa de 8,00 g la $-10,0^\circ\text{C}$ este introdus într-un termos care conține 100 cm^3 apă la $20,0^\circ\text{C}$. Care este variația de entropie a sistemului atunci cînd se atinge starea finală de echilibru?

21. O tijă de alamă este în contact termic cu un rezervor de căldură la 127°C aflat la un capăt al tijei și cu un rezervor de căldură la 27°C aflat la celălalt capăt. Să se calculeze variația totală de entropie care are loc în timpul procesului de transmisie a 1200 cal de căldură prin tijă. Variaza entropia tijei în acest proces?

22. Un mol de gaz ideal monoatomic trece de la o stare inițială de presiune p și volum V la o stare finală de presiune $2p$ și volum $2V$ prin

două procese diferite. (I) El se destinde izoterm pînă își dublează volumul și apoi presiunea sa crește la volum constant pînă la starea finală. (II) El este comprimat izoterm pînă cînd presiunea sa este dublată și apoi volumul său este mărit la presiune constantă pînă la starea finală.

Să se deseneze curba fiecărui proces în diagrama $p-V$. Să se calculeze pentru fiecare proces cu ajutorul lui p și V sau T (a) căldura absorbită de gaz în fiecare parte a procesului; (b) lucrul mecanic efectuat de gaz în fiecare parte a procesului; (c) variația de energie internă a gazului, $U_f - U_i$; (d) variația de entropie a gazului $S_f - S_i$.

23. Un mol de hidrogen gazos și 1,0 mol de azot gazos se află în vase alăturate la aceeași presiune p și aceeași temperatură T . Presiunea și temperatura sînt astfel încît ambele gaze se comportă practic ideal. (a) Dacă viteza pătratică medie a moleculelor de H_2 este 1850 m/s la temperatura T , care va fi viteza pătratică medie a moleculelor de N_2 ? (b) Pentru care gaz procentajul sau fracțiunea de molecule care au viteze în intervalul $\pm 50 \text{ m/s}$ în jurul vitezei pătratice medii va fi mai mare? (c) Dacă vasele sînt legate astfel încît H_2 și N_2 se amestecă, variația de entropie va fi pozitivă, negativă sau zero?

24. (a) Un corp de masă finită este inițial la temperatura T_2 , mai înaltă decît temperatura T_1 a unui rezervor de căldură. O mașină funcționează cu un ciclu infinitezimal între corp și rezervor pînă cînd coboară temperatura corpului de la T_2 pînă la T_1 . Să se arate că lucrul mecanic maxim ce se poate obține de la mașină este $W_{\text{max}} = Q - T_1(S_2 - S_1)$, unde $S_1 - S_2$ este variația de entropie a corpului, iar Q este căldura extrasă de la corp de către mașină. (b) Un corp de masă finită se află inițial la temperatura T_1 , aceeași cu temperatura

unui rezervor de căldură. O mașină frigorifică funcționează cu un ciclu infinitezimal între corp și rezervor pînă cînd coboară temperatura corpului de la T_1 pînă la T_0 . Să se arate că cantitatea minimă de lucru mecanic care trebuie furnizată mașinii frigorifice este $W_{min} = T_1(S_1 - S_0) - Q$, unde $S_0 - S_1$ este variația de entropie a corpului, iar Q este căldura extrasă de la corp de către mașina frigorifică.

25. În general, probabilitatea w_{12} a unui eveniment compus, care constă

din două evenimente simple necorelate, este egală cu produsul probabilităților respective w_1, w_2 . Entropia S_{12} a unui sistem compus care constă din două sisteme simple, este egală cu suma entropiilor respective S_1, S_2 . Să se arate că ecuația (25-15) care leagă între ele probabilitatea și entropia, este în concordanță cu proprietatea de aditivitate a entropiei și proprietatea de multiplicativitate a probabilității pentru un sistem compus.

Relația dintre cinematica liniară și cinematica unghiulară pentru o particulă care se mișcă într-un plan

În paragraful 11-6 am discutat relațiile dintre variabilele cinematice liniare și unghiulare pentru o particulă care se mișcă într-un plan, dar este constrinsă să se miște pe un cerc în jurul unei axe perpendiculare pe plan. O astfel de particulă poate fi oricare particulă dintr-un corp rigid care se rotește în jurul unei axe fixe. Aici slăbim restricția și permitem particulei să se miște liber în plan. O planetă care se mișcă pe o orbită eliptică în jurul Soarelui constituie un exemplu.

Plecăm de la ecuația (11-11), $\vec{r} = \vec{u}_r r$, în care însă atât \vec{u}_r , cât și r sînt variabile; particula nu mai este obligată să se miște pe un cerc de rază constantă. Găsim viteza prin derivare, adică

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}.$$

Ecuația (11-13) ne arată că $d\vec{u}_r/dt = \vec{u}_\theta \omega$. În modul acesta putem scrie

$$\vec{v} = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} + \vec{u}_\theta \omega r \quad (I-1)$$

care arată că \vec{v} are două componente: o componentă radială $v_r = dr/dt$, și o componentă perpendiculară pe prima $v_\theta = \omega r$. Dacă păstrăm pe r constant, atunci $dr/dt = 0$ și ecuația (I-1) se reduce la ecuația (11-14, a) după cum și trebuia.

Pentru a găsi accelerația derivăm ecuația (I-1) ținînd seama că toate cele cinci mărimi din membrul drept sînt variabile. Obținem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_r \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_\theta \left(\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) + \omega r \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}.$$

Dar $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta \omega$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \omega$ (vezi ecuația 11-16) și $d\omega/dt = \alpha$. Substituind și rearanjând, obținem pînă la urmă

$$\vec{a} = \vec{u}_r \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r \right) + \vec{u}_\theta \left(\alpha r + 2\omega \frac{dr}{dt} \right). \quad (I-2)$$

Iarăși, dacă $r = \text{const}$, atunci $dr/dt = d^2 r/dt^2 = 0$ și ecuația (I-2) se reduce la ecuația (11-17) pe care am dedus-o special pentru acest caz.

Cei doi termeni noi din ecuația (I-2), $\vec{u}_r d^2 r/dt^2$ și $\vec{u}_\theta 2\omega dr/dt$, necesită o mică explicație. Primul din acești termeni este simplu și îl putem înțelege imaginându-ne că particula care se mișcă în plan nu se rotește în jurul axei. Dacă punem $\omega = \alpha = 0$ în ecuația (I-2), această ecuație se reduce la

$$\vec{a} = \vec{u}_r \frac{d^2 r}{dt^2},$$

care reprezintă accelerația bine cunoscută a unei particule care se mișcă de-a lungul unei linii drepte. Prin urmare acest termen din ecuația (I-2) dă accelerația radială datorită variației modulului lui \vec{r} , celălalt termen al accelerației radiale provine din variația direcției lui \vec{r} în timpul rotației particulei.

Există de asemenea doi termeni transversali al accelerației. Primul, $\vec{u}_\theta \alpha r$, provine pur și simplu de la accelerația unghiulară α a unei particule în mișcare circulară ($r = \text{const}$) și reprezintă accelerația tangențială de la paragraful 11-5.

Pentru a înțelege cel de-al doilea termen, $\vec{u}_\theta 2\omega dr/dt$, să considerăm un om care se depărtează de centru de-a lungul unei linii radiale trasate pe podeaua unor călușei. Călușeii se rotește cu viteza unghiulară constantă ω astfel încît accelerația sa unghiulară α este acum nulă. Dacă omul ar sta pur și simplu în repaus pe călușei ($dr/dt = 0$ și $r = \text{const}$), accelerația sa, văzută de un observator aflat în reperul terestru (vezi ecuația I-2) ar fi pur și simplu binecunoscuta accelerație centripetă $-\vec{u}_r \omega^2 r$, dirijată radial către centru. Dacă însă omul se depărtează de centru, $dr/dt \neq 0$ și ecuația (I-2) prezice atunci că observatorul terestru va găsi și o accelerație transversală dată de $\vec{u}_\theta 2\omega v_r$, unde $v_r = dr/dt$. Aceasta se numește accelerație Coriolis. Ea provine din faptul că, chiar dacă viteza unghiulară a omului ar fi constantă, viteza sa crește cînd r crește. Să ne convingem că acest efect există în realitate¹.

Figura I-1, a arată omul (punctul P) în mișcare așa cum apare el observatorului terestru în momentele t și $t + \Delta t$. Este arătată la momentul t viteza sa dirijată radial \vec{v}_r ($-\vec{u}_r dr/dt$) și de asemenea viteza dirijată transversal datorită rotației călușeilor și dată de \vec{v}_θ ($-\vec{u}_\theta \omega r$). După un timp Δt fiecare din aceste viteze s-a schimbat. Viteza radială a variat ca direcție deși modulul său a rămas neschimbat dr/dt . Viteza transversală s-a schimbat nu numai ca direcție (am învățat să explicăm aceasta ca o accelerație centripetă) dar datorită faptului că omul s-a mișcat spre exterior într-un punct în care podeaua se mișcă mai repede, modulul ei s-a schimbat și el de la ωr la $\omega(r + \Delta r)$.

¹ Vezi „Efectul Coriolis”, James E. McDonald, *Scientific American*, mai 1952.

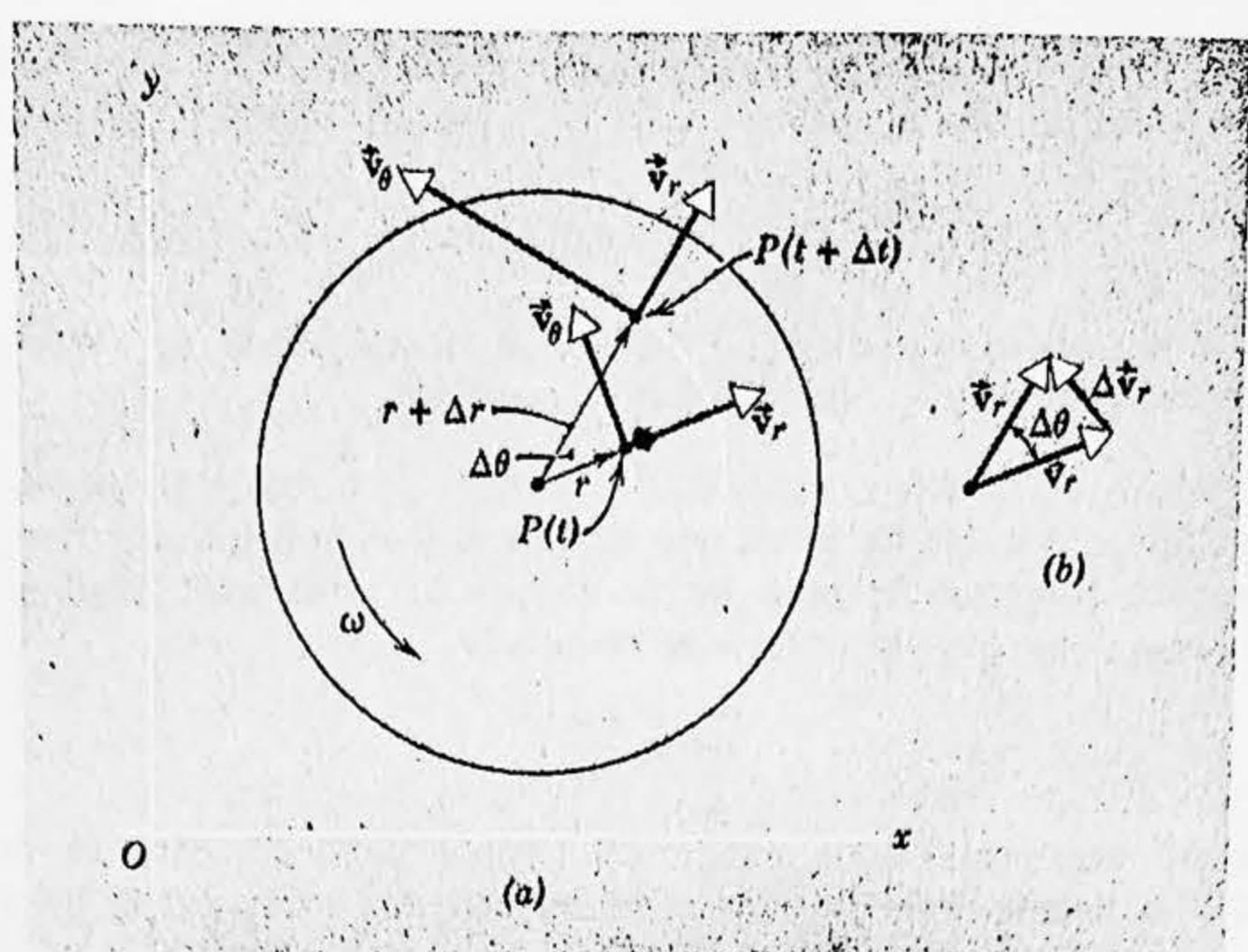


Figura I-1. (a) Călușeli care se rotesc în jurul unei axe fixe sînt observați de către un observator aflat într-un sistem de referință inerțial x, y . Un om se deplasează de-a lungul unei linii radiale cu viteza constantă v . Într-un interval de timp Δt această linie, așa cum este văzută de observatorul terestru, mătură unghiul $\Delta \theta$ și omul se deplasează între cele două poziții arătate. Vitezele sale în direcția r (radială) și direcția θ (transversală) sînt arătate pentru fiecare poziție (b) Se arată variația $\Delta \vec{v}_r$ a vitezei radiale a omului. Observăm că atunci cînd $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{v}_r$ este îndreptat în direcția lui θ (transversal) în P .

Figura I-1, b arată variația vitezei produsă de variația direcției razei de-a lungul căreia se depărtează omul. Dacă $\Delta \theta$ din triunghiul arătat este suficient de mic, avem

$$\Delta v_r = v_r \Delta \theta.$$

Împărțind la Δt și trecînd la limită cînd Δt tinde către zero, obținem

$$a' = \frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{d\theta}{dt} = v_r \omega,$$

Variația vitezei tangențiale produsă de faptul că omul se mișcă radial spre exterior, este

$$\Delta v_\theta = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r.$$

Împărțind la Δt și trecînd la limită cînd Δt tinde către zero, obținem

$$a'' = \frac{dv_\theta}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} = \omega v_r.$$

Dar atît a' cît și a'' reprezintă modulul unor vectori dirijați în același sens și anume în sensul creșterii lui θ în punctul $P(t)$. Accelerația totală în această direcție va fi atunci

$$a' + a'' = v_r \omega + \omega v_r = 2 \omega v_r,$$

ceea ce reprezintă exact ceea ce am vrut să demonstrăm.

Dacă există în adevăr o accelerație în direcția transversală în figura I-1, atunci trebuie să existe o forță în aceeași direcție. Pentru un om care se deplasează spre exterior de-a lungul unei linii radiale pe călușei în rotație, această forță poate fi furnizată numai de către forța de frecare dintre picioarele sale și podea.

Reamintim că putem interpreta mecanica clasică cel mai simplu dacă privim totdeauna evenimentele dintr-un reper inerțial. Dacă facem așa, putem totdeauna asocia accelerațiile cu forțe exercitate de corpuri pe care le putem indica în mediul înconjurător. Putem însă aplica mecanica clasică și dacă alegem un sistem de referință neinerțial, cum ar fi un reper în rotație. Prețul pe care trebuie să-l plătim pentru aceasta este obligația de a introduce *pseudoforțe*, adică forțe pe care nu le putem lega de obiecte din mediul înconjurător și care nu pot fi detectate de un observator aflat într-un reper inerțial. În paragraful 6-4 am văzut că forța centrifugă este o astfel de pseudoforță.

Să considerăm un observator pe călușei în rotație urmărind un om care se deplasează de-a lungul unei direcții radiale cu o viteză constantă $v_r = dr/dt$. El ar zice că omul este în echilibru deoarece nu are nici o accelerație. Cu toate acestea, podeaua exercită o forță de frecare (foarte reală) asupra tălpilor omului. Această forță are o componentă $-\vec{u}_r F_r$ îndreptată radial spre centru și o componentă $\vec{u}_\theta F_\theta$ îndreptată transversal, adică în direcția rotației.

Din punctul de vedere al observatorului terestru aceste forțe sînt explicabile și, în adevăr, foarte necesare. F_r este necesar pentru accelerația centripetă $\omega^2 r$, iar F_θ pentru accelerația Coriolis $2\omega v_r$. Observatorul de pe călușei nu vede însă nici una din aceste accelerații; pentru el omul care se deplasează este în echilibru. Cum este posibil aceasta, ținînd seama de forțele de frecare care acționează asupra tălpilor pantofilor omului care se deplasează? Omul însuși își dă bine seama de aceste forțe; dacă el nu s-ar apleca pentru a compensa efectul lor de răsturnare, ele l-ar răsturna!

Observatorul de pe călușei salvează situația declarînd că acționează două pseudoforțe asupra omului mobil care compensează exact forțele reale de frecare. Una din aceste pseudoforțe, numită *forță centrifugă*, are modulul F_r și acționează radial spre exterior. Cealaltă, numită *forță Coriolis*, are modulul F_θ și acționează în direcția transversală negativă, adică în sensul opus sensului de rotație. Introducînd aceste forțe, care par cu totul „reale” acestuia, deși el nu poate indica nici un corp din mediul înconjurător care să le producă, observatorul din reperul neinerțial, aflat în rotație, poate aplica mecanica clasică în modul obișnuit. Observatorul terestru, care se află într-un reper inerțial nu poate detecta aceste pseudoforțe. În realitate nu este nici o nevoie de ele — și nici loc pentru ele — în aplicațiile mecanicii clasice.

Ecuațiile I-1 și I-2 reprezintă descrieri cinematice generale ale mișcării unei particule în cazul bidimensional (într-un plan). O extensiune evidentă, pe care nu o facem aici, este de a deduce descrieri corespunzătoare ale mișcării în cazul tridimensional (în spațiu); aceasta ar necesita introducerea unui al treilea versor pentru a defini cea de a treia dimensiune¹.

¹ Vezi de exemplu, *Mecanica*, paragraful 3—5, de Keith R. Symon. Addison-Wesley Publishing Co., 2 nd ed., 1960.

Vectori polari și vectori axiali

Unii vectori, numiți *vectori axiali*, cum sînt $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\delta\vec{r}}$ și \vec{l} , diferă printr-o trăsătură importantă de alți vectori, numiți *vectori polari*, cum sînt de exemplu \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} , \vec{F} și \vec{p} . Deși nu vom avea nevoie să ținem seama de această diferență în această carte, ar putea fi instructiv și interesant pentru student să examineze pe scurt această diferență.

Să considerăm un vector polar tipic cum este \vec{r} . Dacă un student părăsește dormitorul său și se duce într-o sală de clasă, vectorul său deplasare \vec{r} este îndreptat de la dormitor spre clasă; nu se pune vreo problemă relativ la alegerea sensului. Acest sens este și „fizic” și „natural”. Observații analoge se aplică altor vectori tipici polari menționați mai sus și anume \vec{v} , \vec{a} , \vec{F} și \vec{p} .

Dacă un student vede o roată aflată în rotație în jurul unei axe fixe, el poate atribui o viteză unghiulară $\vec{\omega}$ roții și poate prescrie un sens lui $\vec{\omega}$ cu ajutorul regulii mîinii drepte (burghiuului) (vezi paragraful 11-4). Acest sens este însă doar *convențional*, bazat pe această regulă arbitrară. O regulă a mîinii stîngi ar da un sens opus. Lucrurile care sînt „fizice” și „naturale” cu privire la roată sînt axa de rotație și sensul rotației, adică se rotește roata în sens orar sau antiorar dacă o privim de la un anumit capăt al axei. Dacă alegem pe $\vec{\omega}$ dirijat într-un anumit sens sau altul de-a lungul axei, nu are în realitate importanță atîta timp cît sîntem consecvenți. Același observații se aplică accelerației unghiulare $\vec{\alpha}$ și celorlalți vectori axiali citați și anume $\vec{\delta\vec{r}}$ ($=\vec{r}\times\vec{F}$) și \vec{l} ($=\vec{r}\times\vec{p}$). Acesta este motivul pentru care găsim uneori mai convenabil să spunem „moment în jurul unei axe” decît „moment de-a lungul unei axe” deși ele înseamnă același lucru. Toți vectorii definiți ca produs vectorial a doi vectori polari sînt vectori axiali, deoarece ei toți depind în ceea ce privește atribuirea unui sens (pe suportul lor) de regula mîinii drepte (arbitrară).

Am subliniat că legile fizicii rămân aceleași indiferent cum schimbăm sistemul de referință inertial în care ele sunt exprimate. În paragraful 2-5 am discutat aceasta pentru translații și rotații ale sistemului de referință și am observat că legile exprimate sub forma vectorială rămân neschimbate (adică *invariante*) față de astfel de transformări. Am observat de asemenea că se poate întâmpla ceva special dacă schimbăm sistemul de referință în alt mod, anume înlocuim un sistem levogir în locul sistemului dextrogir. Există un mod ușor de a face o astfel de transformare: desenăm un reper dextrogir și privim imaginea sa într-o oglindă; el va fi transformat într-un reper levogir (vezi fig. II-1), datorită proprietății bine-cunoscute a unei oglinzi de a înversa dreapta cu stînga.

Figura II-1, a arată deplasarea vectorială a unui student de la dormitorul său pînă la fiecare din cele trei săli de clasă. În oglindă fiecare deplasare rămîne în continuare de la dormitorul D spre o sală de clasă C. În figura II-1, b însă, se arată o roată în rotație cu axa în cele trei direcții. Dacă stabilim sensurile

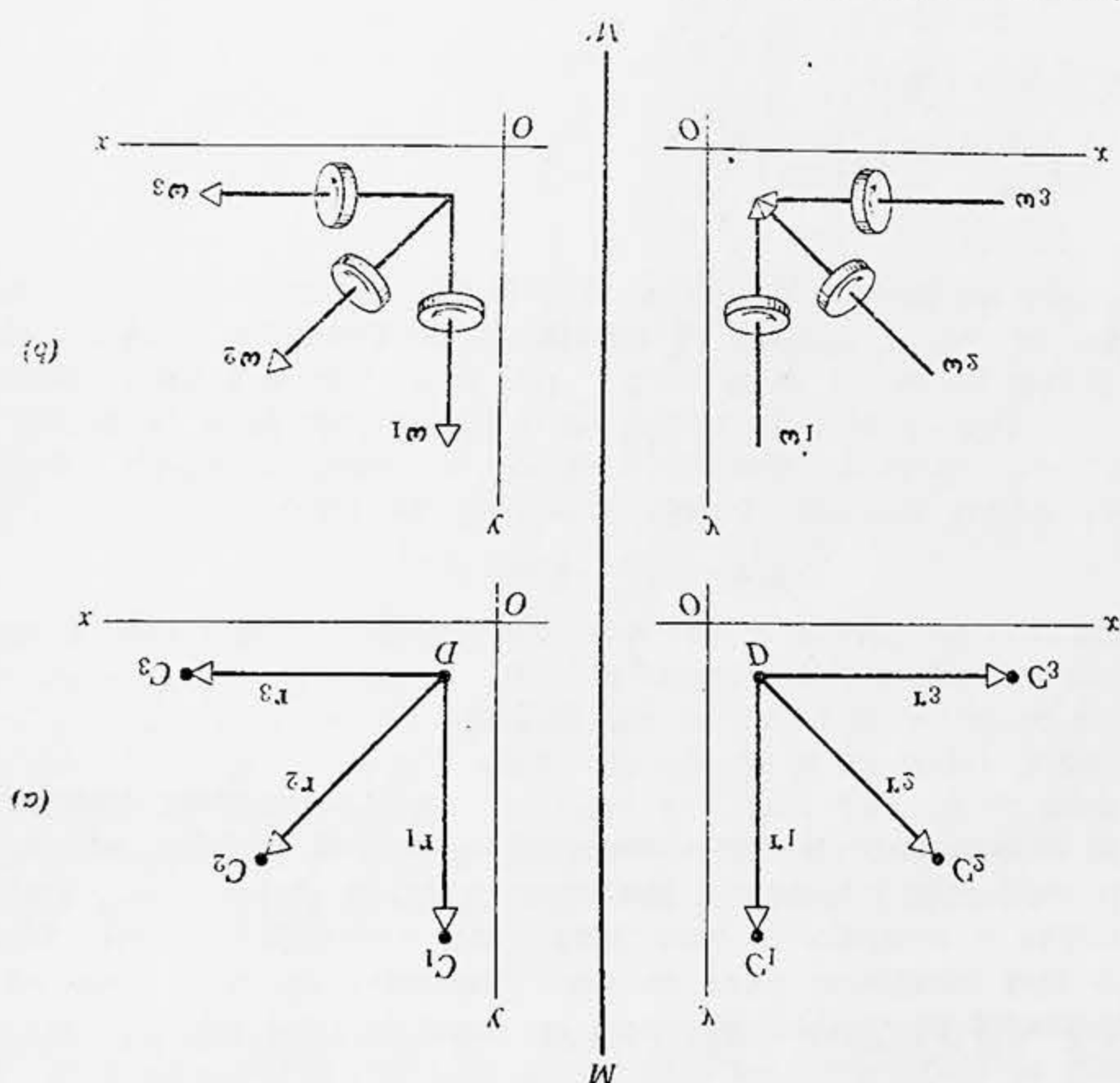


Figura II-1. (a) Vectori polari care arată, în dreapta figurii, deplasările r_1, r_2 și r_3 între un dormitor D și trei săli de clasă C_1, C_2 și C_3 . În stînga sînt imaginile în oglindă ale lui D, C_1, C_2 și C_3 împreună cu deplasările corespunzătoare. (b) Vectori axiali care arată, în dreapta figurii, vitezele unghiulare ω_1, ω_2 , și ω_3 a trei roți care se învîrtesc, așa cum se arată în figură. În stînga sînt imaginile în oglindă ale acestor roți, împreună cu vitezele unghiulare prescrise în baza regulii obișnuite a burghiului (sau mîinii drepte).

→
lui ω atât pentru roți cît și pentru imaginile lor în oglindă cu ajutorul regulii
mîinii drepte (a burghiuului drept), vedem că vectorii din imagine au sensuri inverse
în comparație cu vectorii din imagine corespunzători din figura II-1, a (spre ori-
gine și nu de la origine). Vectorii polari și vectorii axiali se comportă diferit
atunci cînd transformăm sistemele de referință prin reflexie în oglindă! Această
comportare a vectorilor axiali față de reflexia în oglindă nu este greu de înțeles.
Dacă ne imaginăm pe noi înșine aplicînd regula mîinii drepte unei roți
reale în rotație, în oglindă, ne vom simți aplicînd regula mîinii stîngi deoarece
imaginea mîinii noastre drepte va fi mîna noastră stîngă. Regula mîinii stîngi va

da desigur sensul opus pentru ω .

Prin urmare, un vector axial este un vector al cărui sens pe suportul său
depinde de caracterul drept sau stîng al sistemului de referință. El este uneori
numit pseudovector. Un vector polar este un vector care are un sens independent
de sistemul de referință. Menționăm aceste fapte pentru a sublinia: (1) caracterul
arbitrar al sensului prescris vectorilor axiali și (2) importanța experiențelor de
verificare și a legilor fizicii în ceea ce privește invarianța față de translații, rotații
și reflexii în oglindă ale sistemului de referință inertial. În paragraful 2-5 ne-am
referit pe scurt la unele experiențe care nu erau invariante față de o transfor-
mare prin reflexie (ogîndire). Acest fapt, care a constituit o violare în anumite
circumstanțe a unei legi a fizicii concepută înainte ca fiind bine fondată (legea
conservării parității), a pus unele probleme acute și ne-a condus la o înțelegere
mai profundă a lumii fizice¹.

Ecuația undelor pentru o coardă întinsă

Figura III-1 arată o secțiune printr-o coardă lungă care se află sub tensiunea F . Coarda a fost trasă transversal în direcția axei y astfel încât de-a lungul

corzii se propagă în direcția axei x o undă de deplasare. Să considerăm un element diferencial al corzii dx și să aplicăm legea a doua a mișcării a lui Newton acestui element pentru a găsi cum se vor propaga undele de-a lungul corzii.

Fie μ masa pe unitatea de lungime a corzii, astfel încât masa elementului dx este μdx . Forța netă în direcția y care acționează asupra acestui element este

$$F \sin \theta_{x+dx} - F \sin \theta_x$$

Vom considera numai deplasări transversale mici ale corzii astfel încât forța de restabilire va varia liniar cu deplasarea și va fi valabil principiul suprapunerii (vezi paragraful 19-4). Aceasta înseamnă că θ din figura III-1 va fi mic, astfel încât putem înlocui pe $\sin \theta$ prin $\tan \theta$. Dar $\tan \theta$ nu este decât panta corzii, adică este egal cu $\partial y / \partial x$. Trebuie să folosim derivate parțiale deoarece deplasarea transversală y depinde nu numai de x , ci și de t . Forța netă în direcția y va fi atunci

$$F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x$$

ceea ce poate fi scris astfel

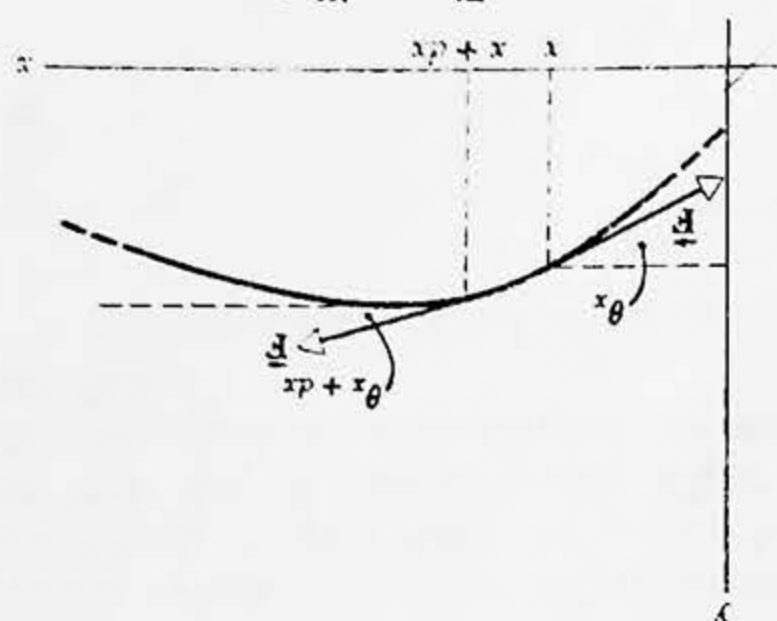
$$F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx$$

sau

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Masa elementului de coardă este μdx și accelerația sa transversală este $\partial^2 y / \partial t^2$. Prin urmare legea a doua a lui Newton, aplicată mișcării transversale a corzii este

Figura III-1.



$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = (u \, dx) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(III-1)

Ecuația (III-1) numită *ecuația undelor*, este o ecuație diferențială care descrie propagarea undelor într-o coardă cu masă pe unitatea de lungime μ și tensiune F .

Pentru a demonstra aceasta vom arăta că ecuațiile (19-2) și (19-3)

$$u = f(x \pm vt), \quad (III-2)$$

care este o ecuație generală ce reprezintă o undă de o formă oarecare ce se propagă de-a lungul axei x , este o soluție a ecuației (III-1). Reamintim că v din ecuația (III-2) este viteza perturbației ondulatorii iar f este orice funcție de $(x \pm vt)$. Să vedem dacă ecuația (III-2) este într-adevăr o soluție a ecuației (III-1), substituind pentru aceasta prima ecuație în cea de a doua. Pentru a face aceasta observăm că cele două derivate parțiale de ordinul II ale lui u sunt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 f''$$

În care f'' este derivata a doua a funcției f din ecuația (III-2) în raport cu $(x \pm vt)$. Substituind aceste derivate în ecuația (III-1), obținem

$$f'' = \frac{F}{\mu} v^2 f'',$$

ceea ce poate fi scris astfel (vezi ecuația 19-12)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

(III-3)

În modul acesta tragem concluzia că ecuația (III-2) este într-adevăr o soluție a ecuației diferențiale cu derivate parțiale (III-1) dacă viteza perturbației ondulatorii, descrisă de această ecuație, este dată de ecuația (III-3).

În particular, să verificăm faptul că ecuația (19-10)

$$u = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

(19-10)

este o soluție a ecuației (III-1). Știm că ea trebuie să fie o soluție, deoarece ecuația (19-10) nu este decât un caz particular al relației generale (III-2) care am arătat mai sus că este o soluție. Chiar așa fiind, este instructiv de a proba această funcție particulară importanță de argument $(x \pm vt)$ prin substituirea ei în ecuația (III-1).

Derivatele de ordinul II ale ecuației (19-10) sunt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

și

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t).$$

Substituind în ecuația (III-1), obținem

$$-k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t) = \frac{F}{\mu} [-\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t)]$$

sau

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Deoarece $\omega/k = v$ (vezi ecuația 19-11), această relație este identică cu ecuația (III-3) și ecuația (19-10) este în adevăr o soluție a ecuației (III-1), după cum era de așteptat.

Deducerea legii de distribuție a vitezelor a lui Maxwell

Boltzmann a dedus în 1876 legea de distribuție a vitezelor a lui Maxwell din următorul raționament: fie un câmp gravitațional uniform \vec{g} care acționează asupra unui gaz ideal menținut la o temperatură fixă T . Numărul moleculelor din unitatea de volum n va descrește atunci cu altitudinea z conform legii formulei barometrice (vezi exemplul 1, capitolul 17). Din ceea ce știm despre interpretarea statistică a temperaturii, însă, legea distribuției vitezelor — a cărei formă presupunem că nu o cunoaștem încă — trebuie să rămână aceeași la orice altitudine, deoarece ea depinde numai de temperatură. Dar această lege determină viteza cu care moleculele se mișcă vertical în atmosferă la orice altitudine și deci trebuie să fie intim legată de descreșterea lui n cu z . Cercetînd această legătură amănunțit putem în adevăr deduce legea de distribuție a vitezelor.

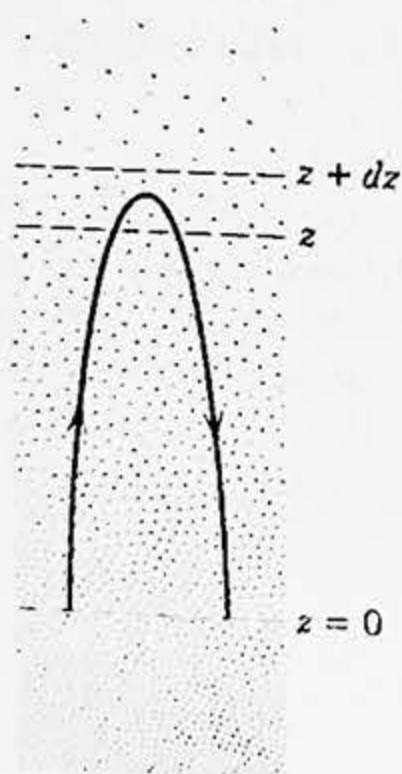


Figura IV-1.

Greutatea gazului pe unitatea de suprafață între nivelele z și $z+dz$ în figura IV-1 este $nmgdz$ în care m masa unei singure molecule. Pentru echilibru această greutate pe unitatea de suprafață trebuie să fie egală cu diferența de presiune dintre z și $z+dz$, anume

$$nmgdz = -dp \quad (IV-1)$$

în care am introdus un semn minus deoarece p descrește atunci când z crește.

Putem scrie ecuația de stare a unui gaz ideal, $pV = \mu RT$, astfel

$$p = nkT \quad (IV-2)$$

deoarece $\mu = nV/N_0$ unde $N_0 (=R/k)$ este numărul lui Avogadro adică numărul de molecule dintr-un mol, iar k este constanta lui Boltzmann. Combinînd ecuațiile (IV-1) și (IV-2) obținem

$$\frac{dp}{p} = - \frac{dn}{n} = - \frac{mg}{kT} dz$$

Pentru o temperatură constantă putem integra această relație și obținem

$$n = \text{const} \cdot e^{-mgz/kT} \quad (\text{IV-3})$$

care, în virtutea ecuației (IV-2), concordă cu rezultatul de la exemplul 1, capitolul 17.

Putem găsi variația lui n atunci când trecem de la z la $z+dz$ prin diferențierea ecuației (IV-3), anume

$$dn = -\text{const} \cdot e^{-mgz/kT} dz. \quad (\text{IV-4})$$

Asociem această descreștere a lui n pe intervalul dz cu faptul că la $z=0$ (care poate fi orice nivel, la alegere) există unele molecule dirijate în sus — le numim „molecule speciale”, provizoriu pentru conveniență — a căror componentă verticală a vitezei este cuprinsă în intervalul particular v_z, v_z+dv_z , astfel încît (neglijînd ciocnirile; vezi mai jos) ele pot urca pînă la înălțimea z dar nu pînă la înălțimea $z+dz$. Astfel de molecule trec în sus prin nivelul z , își schimbă direcția și trec din nou în jos, ca în figura IV-1. În acest punct vedem mai clar legătura dintre ecuația (IV-3) și legea de distribuție a vitezelor. Moleculele care trec prin intervalul dz (de sus sau de jos) sau moleculele care niciodată nu ating acest interval nu pot contribui la descreșterea dn din ecuația (IV-4).

Intensitatea pe unitatea de suprafață cu care „moleculele speciale” părăsesc nivelul $z=0$ (și ajung la nivelul z) este $v_z n(v_z) dv_z$. Aici $n(v_z) dv_z$ este numărul de molecule din unitatea de volum, a căror componentă verticală a vitezei este cuprinsă între v_z și v_z+dv_z .

Dar intensitatea pe unitatea de suprafață cu care „moleculele speciale” ajung la nivelul z , dar nu la nivelul $z+dz$, este proporțională cu diferența de densitate dn între z și $z+dz$ sau, din ecuația (IV-4),

$$v_z n(v_z) dv_z = \text{const} \cdot e^{-mgz/kT} dz \quad (\text{IV-5})$$

în care constanta este independentă de z . Ecuația (IV-5) care cere ca variația dn să fie explicată prin „molecule speciale”, este de fapt ecuația de definiție a lui $n(v_z)$.

Din conservarea energiei, moleculele speciale au proprietatea că¹

$$\frac{1}{2} m v_z^2 = mgz$$

sau

$$m v_z dv_z = mg dz.$$

Folosim aceste două relații pentru a elimina pe z și dz din ecuația (IV-5), obținem, după cum studentul poate verifica,

$$n(v_z) dv_z = \text{const} \cdot e^{-m v_z^2 / 2kT} dv_z \quad (\text{IV-6, a})$$

în care $n(v_z) dv_z$ este numărul moleculelor din unitatea de volum a căror componentă verticală a vitezei este cuprinsă între v_z și v_z+dv_z . Observăm că ecua-

¹ Dacă luăm în considerare ciocnirile, acest rezultat este încă valabil în medie pentru moleculele care pleacă de la $z=0$ cu o valoare dată a lui v_z și se mișcă spre intervalul $(z, z+dz)$, avînd acolo $v_z=0$, chiar dacă astfel de molecule vor urma traiectorii foarte neregulate datorită ciocnirilor.

ția (IV-6, a) nu conține pe g sau pe z . Câmpul gravitațional din figura IV-1, introdus pentru a ne permite să calculăm distribuția vitezelor, și-a atins scopul. Putem aplica ecuația (IV-6, a) unui gaz pentru care $g=0$ sau în care efectele gravitaționale sînt neglijabile. Într-un astfel de caz direcția verticală, pe care am ales-o drept axă z , nu mai are vreo semnificație specială. Adică, distribuția vitezelor pentru o componentă a vitezei trebuie să fie aceeași pentru oricare altă componentă a vitezei, deoarece nu există vreo direcție specială sau preferată într-un gaz în echilibru fără forțe externe. În modul acesta putem scrie

$$n(v_x)dv_x = \text{const} \cdot e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \quad (\text{IV-6, b})$$

și

$$n(v_y)dv_y = \text{const} \cdot e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \quad (\text{IV-6, c})$$

pentru celelalte două componente ale vitezei.

Să aflăm acum distribuția vitezelor a lui Maxwell, ecuația (24-2); ea este exprimată în funcție de viteza v și nu prin componentele individuale, separate, v_x , v_y și v_z . Nu ne interesează aici direcția lui \vec{v} deoarece o presupunem a fi complet întîmplătoare. Putem reprezenta orice viteză \vec{v} ca un vector care pleacă din originea figurii (IV-2); proiecțiile vectorului pe axele x , y , z sînt respectiv v_x , v_y și v_z . Spunem în mod obișnuit că axele din figura IV-2 definesc un „spațiu al vitezelor” care are multe asemănări formale cu spațiul obișnuit (al coordonatelor), în care axele sînt x , y și z .

În figura IV-2, a este arătat de asemenea un element mic de „volum”, ale cărui muchii sînt dv_x , dv_y și dv_z ; spunem că acest element are un volum $dv_x dv_y dv_z$ în spațiul vitezelor. Un punct din acest element corespunde unei particule a cărei viteză are componentele în intervalele $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$ și $(v_z, v_z + dv_z)$. Putem privi pe $n(v_x)$ din ecuația (IV-6, a) ca fiind probabilitatea ca o moleculă dată să aibă o componentă a vitezei în intervalul precizat $(v_x, v_x + dv_x)$, cu interpretări analoge pentru $n(v_y)$ și $n(v_z)$. Probabilitatea ca o moleculă dată să aibă toate cele trei componente ale vitezei în intervalele precizate, adică probabilitatea ca virful vectorului viteză \vec{v} să fie în interiorul elementului de volum, din figura IV-2, este egală cu produsul celor trei probabilități (independente) date în ecuația (IV-6), anume

$$\text{const} \cdot e^{-mv_x^2/2kT} e^{-mv_y^2/2kT} e^{-mv_z^2/2kT} dv_x dv_y dv_z$$

care, în virtutea relației

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

poate fi scris astfel

$$\text{const} \cdot e^{-mv^2/2kT} (dv_x dv_y dv_z). \quad (\text{IV-7})$$

Produsul diferențialelor de mai sus reprezintă elementul de volum în spațiul vitezelor. Deoarece în legea de distribuție a vitezelor a lui Maxwell nu ne interesează direcția vitezelor moleculare, ci numai vitezele lor absolute (în modul), este mai convenabil să substituim un alt element de volum și anume unul

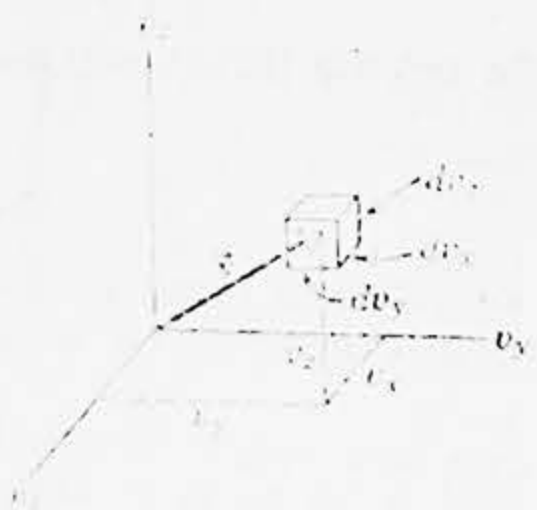


Figura IV-2.

care să corespundă tuturor moleculelor ale căror viteze (în modul) sînt cuprinse între v și $v+dv$, indiferent de direcție. Acest element de volum nu este un „cub”, el este spațiul cuprins între două sfere concentrice, una de rază v și cealaltă de rază $v+dv$. Volumul acestui element din spațiul vitezelor este $4\pi v^2 dv$. Substituim aceasta în locul produsului diferențialelor din ecuația (IV-7) obținem pentru numărul moleculelor pe unitatea de volum ale căror viteze sînt cuprinse între v și $v+dv$

$$n(v)dv = \text{const.} \cdot e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

sau

$$n(v) = Cv^2 e^{-mv^2/2kT}$$

în care C este o constantă. Dacă sumăm peste toate vitezele posibile obținem numărul total de molecule din unitatea de volum, indiferent de viteză. Prin urmare, putem găsi pe C din condiția ca:

$$\int_0^{\infty} n(v)dv = n,$$

unde n este numărul total de particule din unitatea de volum, indiferent de viteză. Studentul, ghidat de metodele de la exemplul 3 (capitolul 24), trebuie să arate că

$$C = 4\pi n(m/2\pi kT)^{3/2}$$

astfel încît

$$n(v) = 4\pi n(m/2\pi kT)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (\text{IV-8})$$

Să considerăm un număr finit N de molecule conținute într-un vas de volum V . Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației de mai sus cu V , putem înlocui pe nV din dreapta cu N , iar pe $n(v)V$ din stînga cu $N(v)$, ceea ce ne dă ecuația (24-2).

Răspunsurile la problemele cu număr impar

Capitolul 1

1. 1,83 m.
3. 186 mile.
5. (a) $d_{\text{Soare}}/d_{\text{Lună}} = 400$.
(b) $V_{\text{Soare}}/V_{\text{Lună}} = 6,4 \cdot 10^7$.
(c) $3,5 \cdot 10^3$ km.
7. 2,0 h.
9. (a) $\sim 10^6$ m (vezi tabela 1-1).
(b) ~ 10 s (vezi tabela 1-2).
11. C, D, A, B, E (de la cel mai bun spre cel mai prost).
Criteriile sînt în primul rînd constanța și în al doilea rînd mărimea variației zilnice.

Capitolul 2

3. Deplasările vor fi: (a) paralelă, (b) antiparalelă, (c) perpendiculară.
5. Valorile absolute sînt: 5; 10; 11,2; 11,2; 11,2. Unghiurile făcute cu axa x sînt: 323° ; $53,1^\circ$; $26,5^\circ$; $79,7^\circ$ și 260° .
7. 81,0 km; $39,5^\circ$ N—E.
9. (a) $a_x = -2,8$ m; $a_y = -2,8$ m;
 $b_x = 5,0$ m; $b_y = 0$,
 $c_x = 3,0$ m; $c_y = 5,2$ m.
(b) $d_x = 5,2$ m; $d_y = 2,4$ m.
(c) 5,7 m; 25° N—E.
(d) 5,7 m; 25° S—V.
13. $r_x = 2,0$ km; $r_y = r_z = 4,0$ km.

15. (a) 6,3 m; (b) Poate fi mai mare dar nu mai mic; (c) $3,0 \vec{i} + 3,6 \vec{j} + 4,2 \vec{k}$ pentru o alegere particulară a axelor.
17. 6 950 mile—11 190 km, îndreptat prin Pămînt de la Washington la Manila.
21. (a) Scalar de modul 30 unit.²
(b) Vector de modul 52 unit.² perpendicular pe planul format de \vec{a} și \vec{b} .
31. (a) $d_x = d_z = a^2$; $d_y = -a^2$.
(b) $\vec{b} \cdot \vec{c} = a^2$; $\vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$.

Capitolul 3

1. (a) 1,71 m/s; (b) 2,10 m/s.
3. (a) număr infinit; (b) 90 km.
5. 900 m/s², în sus.
7.

	OA	AB	BC	CD
v_x	+	0	+	+
a_x	—	0	+	0

Intervalele OA și BC.
9. $8,0 \cdot 10^{14}$ m/s².
11. 10 cm; nici un timp.
13. (a) 1,50 m/s²; (b) 4,0 s; (c) 6,0 s;
(d) 27 m.
15. (a) 5,0 m/s; (b) 1,7 m/s²; (c) 7,7 m.
17. Nu.
19. (a) 17 m/s; (b) 3,6 s.

21. 3,41 s; 56 m.
 23. (a) 105 km; (b) 330 s.
 25. 12 m/s.
 27. 2,0 cm.
 29. (a) 17 s; (b) 290 m.
 31. (a) $a: LT^{-2}$; m/s^2 ; $b: LT^{-3}$; m/s^3 ;
 (b) 2,0 s; (c) 24 m; (d) -16 m;
 (e) 3,0; 0,0; -9,0; -24 m/s; (f) 0,0;
 -6,0; -12; -18 m/s^2 .

Capitolul 4

3. Treapta a treia.
 7. 76° .
 9. 5,3 cm.
 11. Da.
 13. (a) 2,0 mm; (b) $v_{or.} = 1,0 \cdot 10^9$ cm/s;
 $v_{vert.} = -0,20 \cdot 10^9$ cm/s.
 15. Electron $5,5 \cdot 10^{-15}$ m; neutron
 $1,0 \cdot 10^{-6}$ m; neon $1,4 \cdot 10^{-5}$ m; oxigen
 $2,3 \cdot 10^{-5}$ m; minge de golf
 $4,9 \cdot 10^{-4}$ m (presupunând 100 m/s).
 19. (a) $v_0 \cos \theta_0$; (b) \vec{g} ; (c) $\vec{v} \perp \vec{a}$;
 (d) $(v_0^2/g) \cos^2 \theta_0$.
 21. $6,7 \cdot 10^6$ m/s.
 23. 2400 m/s^2 .
 25. (a) 4,2 m la 45° ; 5,5 m la 68° ; 6,0 m
 la 90° .
 (b) 4,2 m la 135° .
 (c) 0,85 m/s la 135° .
 (d) 0,94 m/s la 90° ; 0,94 m/s la 180° .
 (e) 0,27 m/s^2 la 225° .
 (f) 0,30 m/s^2 la 180° ; 0,30 m/s^2 la
 270° .

Toate unghiurile sînt măsurate în
 sens orar de la o linie orizontală
 dusă din O spre stînga, în fi-
 gura 4-15.

27. $6,0 \cdot 10^{-3}$ m/s^2 .
 29. (c) $\vec{r} = i(r \sin \omega t) + j(r \cos \omega t)$.
 31. $\vec{u} = i \cos \theta + j \sin \theta$; $\vec{u}_0 = -i \sin \theta +$
 $+ j \cos \theta$.
 33. 2,2 m/s și 1,8 m/s.
 35. (a) El trebuie să îndrepte barca
 sub $25,4^\circ$ față de direcția curgerii.
 (b) 12,7 min.
 37. (a) Vîntul suflă dinspre o direcție
 care formează 75° E-S.
 (b) 30° E-N.

Substituind pe V în locul lui E în
 cele de mai sus, obținem o altă
 soluție.

Capitolul 5

1. $a_1/a_2 = m_2/m_1$.
 3. 1,0 m/s^2 , 37° de la \vec{F}_2 spre \vec{F}_1 .
 5. 4,0 kN; 6,0 s; 15 m; 3,0 s.
 7. $a_{or.} = 19,6$ m/s^2 , $a_{în jos} = 9,8$ m/s^2 ;
 $v_{or.} = 19,6$ t, m/s, $v_{în jos} = 9,8$ t, m/s.
 9. (a) 740 N, (b) 610 N, (c) zero. Masa
 sa este de 75 kg în orice punct.
 13. Să-l coborîm cu o accelerație de
 0,98 m/s^2 sau mai mare.
 15. (a) 0,98 m/s^2 , (b) 176,4 N.
 17. (a) 2,0 m/s^2 , (b) 4,0 m/s, (c) 4,0 m.
 19. (a) $g \sin \theta$ în jos pe plan,
 (b) $g \sin \theta$ în jos pe plan, (c) $(g-a)$
 $\sin \theta$ în jos pe plan, (d) $(g+a) \sin \theta$
 în jos pe plan, (e) zero.
 21. (a) 10 kg, (b) 116 N.
 23. (a) 98 N, 170 N. (b) 4,9 m/s^2 .
 25. 3,3 m/s^2 , 6,5 N.
 27. (a) 5,8 m/s^2 , (b) $(M+m) \cdot 5,8$ m/s^2 .

Capitolul 6

1. 50 kgf.
 3. (a) 11,6 cm/s^2 ; 24 cm/s^2 ; (b) 0,041;
 0,028.
 5. (a) 14 gf; (b) 0,13.
 7. 0,75.
 9. 18 kgf.
 11. (a) 6,8 kgf; (b) 1,93 m/s^2 .
 13. (a) $v_0^2/4 g \sin \varphi$. (b) Nu.
 15. (a) 1,06 N (tensiune), (b) 3,62 m/s^2 ,
 (c) 1,06 N (compresiune) 3,62 m/s^2 .
 17. $g(\sin \theta - \sqrt{2} \mu_c \cos \theta)$.
 19. (a) 824 m, (b) 2260 kgf în sus.
 21. (a) 0,0338 N, (b) 9,77 N.
 23. (a) 15° ; (b) 0,27.
 25. $v^2/r = Mg/m$.
 27. (a) 20,7 m, (b) 18° .

$$29. \quad P_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r} \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}}$$

$$P_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r} \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

Capitolul 7

1. (a) 52 N, (b) -260 J, (c) +300 J, (d) -40 J, (e) zero (f) zero.
3. (a) 50 N, (b) Nu, (c) Da, 100 J, (d) Nu.
5. (a) zero, (b) 30,1 J, (c) -30,1 J, (d) 0,225.
9. Copilul: 4,8 m/s, omul: 2,4 m/s.
11. (a) $2,9 \cdot 10^7$ m/s, (b) $1,3 \cdot 10^8$ eV.
15. (a) 135 N, (b) 60,0 J.
17. 24 J.
21. (a) $7,45 \cdot 10^9$ J, (b) $1,2 \cdot 10^5$ kW.
23. (a) $2,48 \cdot 10^4$ J, (b) 0,55 CP.
25. 0,24 CP.
27. (b) $m(v_f/t_f)^2 t$, (c) 140 CP.

Capitolul 8

5. (a) $v = 2\sqrt{gl}$, $T = 5$ mg, (b) 71° .
7. 2 d.
9. (a) $v_B = v_0$, $v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}$, (b) $(v_0^2 + 2gh)/2L$, (c) nu va ajunge niciodată în B.
11. (a) $\sqrt{5gR}$, (b) P este deasupra orizontalei cu arc sin $(1/3)$.
13. (a) 41 m, (b) 20 m/s.
15. (a) $U(x) = -k m_1 m_2 / x$ dacă $U(\infty) = 0$.
(b) $\frac{k m_1 m_2 d}{x_1(d+x_1)}$.
17. (a) $F_x = -kx$, $F_y = -ky$, F este dirijat permanent radial spre interior. (b) $F_r = -kr$, $F_\phi = 0$.
21. (a) 31,0 J, (b) 5,33 m/s, (c) conservativă.
23. (a) $\sqrt{2gl}(\sin\theta - \mu \cos\theta)$,
(b) $l(\sin\theta - \mu \cos\theta)/\mu$.
25. 7,2 m/s.
27. (a) 35,9 J, (b) 6,2 J, 0,52 m în sus pe plan.
29. (a) 925 J, (b) 276 J, (c) Nu.
31. (a) $5,8 \cdot 10^{-13}$ J, (b) 0,08.
33. (a) $\cong 0,010$ kg, 0,023 kg.
35. 27 MeV.

Capitolul 9

3. $6,46 \cdot 10^{-11}$ m, de-a lungul axei de simetrie.
5. $6,75 \cdot 10^{-12}$ m în jos, pe axa de simetrie.

7. (a) Centrul de masă rămîne în repaus, (b) 0,75 m.

9. 2 450 N·s; 9,67 km/oră; 20,9 km/oră.
11. 4,0 m.

13. $10\sqrt{2}$ m/s, 135° față de fiecare.

15. 37 km.

17. (a) Carcasa și capsula se mișcă ambele înainte cu vitezele 7,3 respectiv 8,2 km/s. (b) Energia crește de la $1,293 \cdot 10^9$ J înainte de separare pînă la $1,298 \cdot 10^9$ J după separare, creșterea provenind de la energia înmagazinată în resort.

19. $\frac{G'v_{rel}}{G+v}$.

21. 220 gloanțe/min.

25. 2,3 tf, 5 600 CP.

Capitolul 10

1. 2,5 m/s.

3. 8,8 m/s.

5. $2mv/t$.

7. Încetinește pînă la 3,0 m/s.

9. $m_1/3$.

11. 310 m/s.

13. Bloc: 1,2 m/s, bila: 2,4 m/s.

15. (a) 4,1 m/s, $2,4 \cdot 10^3$ J, (b) $v_{32} = -3,3$ m/s, $v_{24} = 5,3$ m/s.

17. (a) Masa din stînga ajunge în repaus; centrul de masă se mișcă spre dreapta cu viteza $v_0(m-M)/(m+M)$; masa din dreapta se mișcă spre dreapta cu viteza $2v_0m/(m+M)$.

- (b) Masa din stînga se mișcă spre stînga cu viteza $v_0(M-m)/(m+M)$; centrul de masă ajunge în repaus; masa din dreapta se mișcă spre dreapta cu viteza $2v_0m/(m+M)$.

19. 0,25 m.

21. 5,4 kgf.

23. $v_0 = \left(2E \frac{M+m}{Mm}\right)^{1/2}$.

25. (a) $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$, (b) $\frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{m_1 + m_2}$,

- (c) $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$, (d) $\frac{1}{2} m_1(v_{1i}^2 - 2v_{1i} v_{cm} + v_{cm}^2) + \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2$; zero; 100% da.

27. 1,9 m/s, 30° față de direcția inițială; nu.
 29. 117° față de direcția finală a lui B; nu.
 31. (a) $5,0 \cdot 10^8$ m/s, (b) $6,9 \cdot 10^8$ m/s, sub 14° față de direcția inițială în sens opus neutronului și în planul definit de nucleul de heliu și de neutron.
 33. $\pi(r_1 + r_2)^2$.
 35. $4,2 \cdot 10^{11}$ transmut./m²·s.
 37. 8,12 MeV.

Capitolul 11

1. (a) 305 cm/min, (b) 152 cm/min.
 3. (a) $3,8 \cdot 10^3$ rad/s, (b) 190 m/s.
 5. (a) $-0,27$ rad/s², (b) 20 rot.
 7. $0,80 \omega_0$.
 9. (a) $x^2 + y^2 = R^2$, un cerc de rază R, ω este viteza unghiulară a corpului.
 (b) $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v = \omega R$, v este tangent la cerc.
 (c) $a_x = -\omega^2 x$, $a_y = -\omega^2 y$, $a = \omega^2 R$, \vec{a} este dirijat radial spre interior.
 11. (a) $2,0 \cdot 10^{-7}$ rad/s, $3,0 \cdot 10^4$ m/s, (b) $6,0 \cdot 10^{-3}$ m/s².
 13. 5,7.
 15. (a) 70 rad/s, (b) -13 rad/s², (c) 73 m.
 17. 0,12 rad/s.

Capitolul 12

1. (a) $\vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x)$.
 13. $6,75 \cdot 10^{12}$ rad/s.
 15. (a) $2,6 \cdot 10^{29}$ J, (b) $2,4 \cdot 10^9$ ani.
 17. 40,3 N·m.
 19. (a) $-7,66$ rad/s², (b) $-11,7$ N·m, (c) $4,58 \cdot 10^4$ J, (d) 624 rot. (e), (c) pot fi calculate și au aceeași valoare.
 21. 5,7 m/s², 36 N, 33 N.
 23. $g/2$.
 25. (a) 3,4 m, (b) 1,4 s.

27. (a) $mg(R-r)$, 5/7 de translație; (b) $\frac{17}{7} mg$.
 29. $\frac{50}{7} mg$.
 33. (a) Mg , (b) $\frac{1}{4} MR^2 \omega^2$, (c) $R^2 \omega^2 / 4g$.
 37. 1,5 m orizontal dinspre pereți și $1,5 \sqrt{3}$ m vertical deasupra solului.
 39. 5,4 m/s.

Capitolul 13

1. 2,0 rad/s, în sens orar văzut de sus.
 9. $\frac{1}{12} ab\omega M$; \vec{L} efectuează o mișcare de precesie în jurul axei de rotație care formează un unghi $\theta = \arctg a/b$ — $\arctg b/a$ cu el.
 11. (a) $L_{spin}/L_{orb} = \frac{2}{5} (R_m/R_{p-m})^2$ în care R_m este raza Lunii și R_{p-m} este distanța Pământ—Lună.
 (b) Crește sau descrește cu o jumătate din valoarea actuală.
 13. 0,77 rad/s.
 15. (a) Impulsul, momentul cinetic și energia mecanică.
 (b) $\frac{Ml^2}{12d^2 + l^2}$ unde l este lungimea tijei.
 19. 250 rot/min.
 21. $\frac{v_1}{1 + I/MR^2}$.
 25. $\sqrt{2gr/\cos \theta_0}$.
 27. (a) Ei se rotesc în jurul centrului de masă (centrul prăjinii) cu $\omega = -6,7$ rad/s; (b) ca mai sus, dar $\omega = 60$ rad/s; (c) $E_a = 5,0$ kJ. $E_b = -45$ kJ, diferența reprezintă lucrul mecanic efectuat de patinatori.

Capitolul 14

1. $\frac{W[h(2r-h)]^{1/2}}{r-h}$
 3. 74,4 g.
 5. De-a lungul liniei care se întinde de la centrul găurii prin centrul

discului, dincolo de ultimul punct cu o distanță $Rr^2/2(R^2-r^2)$.

9. 2,2 m.

13. În spate: 3,90 kN, în față, 2,79 kN.

15. $F_A=532$ N, $F_E=319$ N, $T=208$ N.

17. $F_o=50$ N, $F_v=300$ N, $d=1,3$ m.

19. (a) $G/2 \sin \theta$, tangent la lanț,

(b) $\frac{1}{2} G \operatorname{ctg} \theta$.

Capitolul 15

1. 0,28 s.

3. (a) 99 N, (b) 99 N/m.

5. (a) 4,0 s, (b) $\pi/2$ rad/s, (c) 0,37 cm, (d) $0,37 \cos(\pi t/2)$ în cm, (e) $-0,58 \sin(\pi t/2)$ în cm/s, (f) 0,58 cm/s, (g) $0,91 \text{ cm/s}^2$, (h) zero, (i) $0,58 \text{ cm/s}$.

7. 3,1 cm.

9. $k_1=k(1+n)/n$, $k_2=k(1+n)$.

13. (a) $1,6 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$, $2,5 \text{ m/s}$;
(b) $2,2 \text{ m/s}$, $7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$.

15. (a) 15,7 cm, (b) 1,2%, majoritatea energiei inițiale apare ca energie internă a blocului.

17. 8,6 kg.

19. $3/4$, $1/4$, $A/\sqrt{2}$.

23. $9,5 \text{ m/s}^2$.

27. $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(g^2+v^2/R^2)^{1/2}}{l}}$.

31. (a) $0,45 \text{ s}^{-1}$. (Are importanță dacă cuiul este foarte neted sau aspru?),
(b) 1,2 m.

33. (a) 39 rad/s, (b) 34 rad/s,
(c) 120 rad/s^2 .

37. (a) $\text{O}_2: 8,0 \text{ u}$, $\text{HCl}: 0,97 \text{ u}$, $\text{CO}: 6,8 \text{ u}$,
(b) 500 N/m.

41. $E_{\text{transl.}}=6,3 \cdot 10^{-2} \text{ J}$, $E_{\text{rot}}=3,1 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

43. (b) $\sqrt{k/m}$.

Capitolul 16

1. 2 580 km.

3. 4,8 s.

7. (b) 3,2 m.

9. (b) 84,2 min, (c) Nu.

11. (a) $G(M_1+M_2)m/a^2$, (b) GM_1m/b^2 ,
(c) zero.

13. (a) 7,8 km/s, (b) 87 min.

15. $2,5 \cdot 10^4 \text{ km}$.

17. (a) $1/2$, (b) $1/2$, (c) B cu $11,5 \cdot 10^7 \text{ J}$.

19. (a) $-GmM_p/r$; (b) $-2GmM_p/r$,
(c) cade direct în jos.

21. 1,88 ani.

23. (b) $1,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$, (c) Luna: $1,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$,
Soarele: $6,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$.

25. (a) $2\pi \sqrt{d^3/3mG}$, (b) 2, (c) 2.

27. $\sqrt{GM/L}$.

29. $a/3$.

31. (a) $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ N/kg}$, perpendicular pe
linia care unește centrele;
(b) $-5,3 \cdot 10^{-7} \text{ J/kg}$.

33. (a) $-Gm\left(\frac{M_p}{R} + \frac{M_\mu}{r}\right)$, (b) nouă ze-
cimi din drumul pînă la Lună și
la infinit, (c) $-GM(M_p/R_p + M_\mu/d)$,
 $-GM(M_p/d + M_\mu/R_\mu)$ (d) $G(M_p/R_p^2 -$
 $-M_\mu/d^2)$, $G(M_p/c^2 - M_\mu/R_\mu^2)$.

Capitolul 17

1. (a) $16,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, (b) $15,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$.

3. (b) 27,1 kN.

5. (a) $\frac{1}{2} \rho g D^2 L$, $\frac{1}{6} \rho g D^3 L$, (b) $D/3$ în
sus.

9. $\frac{1}{4} \rho A(h_2-h_1)^2$.

11. (a) fA/a , (b) 9,07 kg.

13. $5\,660 \text{ cm}^3$.

15. $0,67 \text{ g/cm}^3$, $0,74 \text{ g/cm}^3$.

17. 0,19, nu.

19. 0,12 ($1/\rho-1/8$), ρ în g/cm^3 .

21. (b) $p=\rho gh$ unde h este adîncimea
verticală de la suprafață în jos.

Capitolul 18

1. 8,55 m/s.

3. $1,5 \cdot 10^5 \text{ J}$.

7. $v=4,1 \text{ m/s}$, $v'=21 \text{ m/s}$, $Av=-$
 $-8,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

11. (a) $2 \sqrt{h(H-h)}$ (b) da, la o dis-
tanță h deasupra bazei.

15. 9,74 kN, portanța este aceeași în toate cele trei cazuri.

17. 410 m/s.

Capitolul 19

3. (a) 10 cm, 1,0 vib./s, 200 cm/s, 200 cm, (b) 63 cm/s.

5. (a) 12 cm, (b) 180°.

7. 130 m/s.

9. v_0 .

11. $1/4 \pi W/m^2$.

13. Intensitatea este proporțională cu r^{-1} ; amplitudinea este proporțională cu $r^{-1/2}$.

15. $\lambda = 2 \sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - 2 \sqrt{4H^2 + d^2}$.

19. (b) Deși deplasarea corzii este nulă în acest moment, vitezele transversale nu sînt nule, astfel încît energia este prezentă ca energie cinetică.

21. $y = 60 \cos \frac{\pi}{2} (0,005x + 8,00t - 0,57)$.

Capitolul 20

1. 17 m, 0,017 m.

3. $1,0 \cdot 10^5$ Hz.

7. (a) $\frac{l(V-v)}{Vv}$, (b) 480 m.

11. $3,6 \cdot 10^{-8}$ m.

13. (a) $5,0 \cdot 10^3$ Hz, (b) $SBD/SAD = 1/2$.

15. 32 și 95 Hz.

21. 1 130, 1 500 și 1 880 Hz.

23. $L(r-1)/r$; 0,13 m, 0,27 m.

25. (a) 323 s^{-1} , (b) 6.

27. 387 s^{-1} .

29. Nu.

31. (a) 970 s^{-1} , (b) $1 030 \text{ s}^{-1}$, (c) 60 s^{-1} .

33. (a) 27 cm, (b) $1 440 \text{ s}^{-1}$, (c) 330 m/s, (d) 24 cm.

35. (a) 42°, (b) 11 s.

37. 990 m/s.

Capitolul 21

1. 373,15/273,16.

3. Materiale, formă, temperatură, curenți de aer; dimensiunile sînt T^{-1} .

5. -40° , 575° .

7. $10,000\Omega$, $4,124 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$, $-1,780 \cdot 10^{-6} \text{ grd}^{-2}$.

9. 2,542 cm.

11. Ceasornicul va merge cu aproximativ 9 secunde mai încet.

13. 46,4 cm.

19. $+28,9 \text{ cm}^3$.

23. (a) $1,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, 0,41 J, (b) $\Delta\omega/\omega = \Delta E_c/E_c = -0,32\%$ $\Delta L/L = 0$.

25. $7,44 \cdot 10^{-4} \text{ grd}^{-1}$.

Capitolul 22

1. 1,17 grd.

3. 190 W.

5. 170 J/kg·K.

9. 0,59 cal/g·grd.

11. Căldura specifică medie depășește pe cea din punctul mediu cu $Bt^2/12$.

13. (a) 359 kJ, (b) 132°C .

15. (a) 500 grd/m, (b) 4,6 cal/s, (c) 75°C .

17. 86°C (Cu — Al) și 57°C (Al — alama).

19. $1,4 \cdot 10^{-5} \text{ kcal/s} \cdot \text{m}^2$, $6,2 \cdot 10^{14} \text{ kcal}$.

21. 0,42 cal/s·m·grd.

23. (a) 6 cal, (b) -43 cal , (c) 40 cal, (d) 18 cal, 18 cal.

25. 8,0 kcal.

Capitolul 23

1. 76,5% în greutate.

3. 100 cm³.

5. 653 J.

7. $1,86 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

9. Mercurul coboară cu 3,0 cm.

11. (a) $565 \cdot 10^{-23} \text{ J}$, $772 \cdot 10^{-23} \text{ J}$, (b) 3 390 J, 4 630 J.

13. (a) $1,01 \cdot 10^4 \text{ K}$, $16,2 \cdot 10^4 \text{ K}$, (b) 450 K, 7 200 K.

15. He: 1 400 m/s, A: 440 m/s.

17. $6,6 \cdot 10^3$.

19. (a) de 11 ori mai mare, (b) aceeași dimensiune.

25. (a) $6,6 \cdot 10^{23} \text{ g}$, (b) 40.

27. 4,13 J/cal.

29. 1 910 cal.

35. 1,41.

37. Biatomic.

39. (a) 8,0 atm, (b) 600 K.

41. (a) 2,5 atm, 336 K, (b) 0,41 V.

Capitolul 24

1. $3,2 \cdot 10^{-8}$ cm.
3. (a) $3,5 \cdot 10^{10}$ molec./cm³, (b) 160 m.
9. (a) $7,1 \cdot 10^8$ m/s, (b) $2 \cdot 10^{-8}$ cm, (c) $3,5 \cdot 10^{10}$ s⁻¹.
11. \bar{v} , v_{pm} , v_p .
13. 1,5 cm/s.
17. $RT \ln \frac{V_f - b}{V_i - b} + a \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)$.
19. (a) $3,2 \cdot 10^6$ N/m², (b) $4,1 \cdot 10^6$ N/m².

Capitolul 25

1. $5,0 \cdot 10^4$ J.
7. (a) 2 090 J, (b) 380 cal, (c) 1 570 J.
9. 6,5.
11. $1,1 \cdot 10^8$ J.
15. -10^{-3} °N, -10^{-6} °N, 0 °N, +
+ 10^{-6} °N, + 10^{-3} °N, de exemplu.
17. +0,11 cal/K.
19. $+1,7 \cdot 10^{-4}$ cal/g.K.
21. +1,0 cal/K, nu.
23. (a) 500 m/s, (b) N₂, (c) pozitivă.

țio
riv
efe
Ele
ero
val
fici
calc
ajus
derm

Metri
Kilog
Secur
Gradu

¹ Ve
J. W. M.

Definiția etaloanelor și a constantelor fizice fundamentale și derivate¹⁾

Definiția etaloanelor primare s-a făcut prin înțelegere la Conferința Internațională de Măsuri și Greutăți din octombrie 1964 la Paris. Valorile măsurate și derivate ale constantelor fizice fundamentale însumează sute de măsurători fizice efectuate de-a lungul anilor de către oamenii de știință din toate părțile lumii. Ele au fost supuse unei analize statistice exhaustive și, împreună cu limitele de eroare corespunzătoare (luate ca erori patratice medii), reprezintă cele mai bune valori pînă în anul 1969. Pentru majoritatea problemelor din această carte sînt suficiente trei cifre semnificative și de aceea pot fi folosite valori rotunjite „de calcul”. Valorile constantelor sînt cele date de Taylor, Parker și Langenberg prin ajustarea recentă a constantelor fundamentale, comunicată în *Revista fizicii moderne*, iulie, 1969.

DEFINIȚIA ETALOANELOR

Etalonul	Simbolul	Echivalentul
Metrul	m	1 650 763,73 lungimi de undă în vid ale tranziției neperturbate $2p_{10}-5d_5$ în ^{86}Kr .
Kilogramul	kg	Masa kilogramului internațional de la Sèvres, Franța.
Secunda	s	9 192 631 770 vibrații ale tranziției hiperfine neperturbate $4,0-3,0$ a stării fundamentale $^2\text{S}_{1,2}$ în ^{133}Cs .
Gradul Kelvin	K	Definit în scara termodinamică prin prescrierea valorii 273,16 K punctului tripul al apei.

¹ Vezi „Despre progresul în cercetarea constantelor fundamentale”, de J. W. M. Du Mond, *Physics Today*, October, 1965.

Etalonul	Simbolul	Echivalentul
Unitatea atomică de masă (unificată)	u	1/12 din masa unui atom de ^{12}C
Molul	mol	Cantitatea de substanță care conține același număr de atomi ca 12 g (exact) de ^{12}C pur.
Accelerația standard în căderea liberă	g	9,80665 m/s ²
Presiunea atmosferică normală	atm	101 325 N/m ²
Caloria termochimică	cal _{th}	4,1840 J
Litrul	l	0,001 000 028 m ³

CONSTANTE FUNDAMENTALE ȘI DERIVATE

Denumirea	Simbolul	Valoarea de calcul	Cea mai bună valoare experimentală (1969) ¹⁾
Viteza luminii	c	$3,00 \times 10^8$ m/s	2,9979250(10)
Permeabilitatea vidului	μ_0	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	$4\pi \cdot 10^{-7}$ exact
Permitivitatea vidului	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,8541853(59)
Sarcina elementară	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	1,6021917(70)
Numărul lui Avogadro	N_0	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹	6,022169(40)
Masa de repaus a electronului	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg	9,109558(54)
Masa de repaus a protonului	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	1,672614(11)
Masa de repaus a neutronului	m_n	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	1,674920(11)
Constanta lui Planck	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s	6,626196(50)
Raportul: sarcina electronului/masa electronului	e/m_e	$1,76 \cdot 10^{-11}$ C/kg	1,7588028(54)
Raportul: constanta Planck/sarcina elementară	h/e	$4,14 \cdot 10^{-15}$ J·s/C	4,135708(14)
Lungimea de undă Compton a electronului	λ_e	$2,43 \cdot 10^{-12}$ m	2,4263096(74)
Constanta Rydberg	R_∞	$1,10 \cdot 10^7$ m	1,09737312(11)
Raza Bohr	a_0	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m	5,2917715(81)
Magnetonul Bohr	μ_B	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274096(65)

Continuarea tabelului din pag. 702

Denumirea	Simbolul	Valoarea de calcul	Cea mai bună valoare experimentală (1969)
Magnetonul nuclear	μ_N	$5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$	5,050951(50)
Momentul magnetic al protonului	μ_p	$1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$	1,4106203(90)
Constanta universală a gazelor	R	$8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$	8,31434(35)
Volumul molar al gazului ideal în condiții normale	V_0	$2,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mol}$	2,24136(30)
Constanta lui Boltzmann	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	1,380622(59)
Constanta lui Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$	5,66961(96)
Constanta gravitațională	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$	6,6732(31)

¹ Aceleași unități și exponenți ai lui 10 ca la valorile de calcul. Numerele din paranteze sînt erorile patratice medii pentru ultimele cifre ale valorii date.

Sistemul solar¹⁾

ANEXA B

Planeta	Mercur ♀	Venus ♀	Pământ ⊕, ⊖, ♂	Marte ♂	Jupiter ♃	Saturn ♄	Uranus ♅, ♁	Neptun ♆	Pluton ♇
Diametrul mediu, km	5 000	12 400	12 742	6 870	139 760	115 100	51 000	50 000	12 700 ?
Diametre terestre	0,39	0,973	1,000	0,532	10,97	9,03	4,00	3,90	0,46
Volumul (în volume terestre)	0,06	0,92	1,00	0,15	1 318	736	64	39	0,10
Masa (în mase terestre)	0,04	0,82	1,00	0,11	318,3	95,3	14,7	17,3	1,0 ?
Densitatea (în densități terestre)	0,69	0,89	1,00	0,70	0,24	0,13	0,23	0,29	?
Densitatea medie, g/cm ³	3,8	4,86	5,52	3,96	1,33	0,71	1,26	1,6	?

Continuarea tabelului din pagina 704

Gravitația la suprafață (în gravități terestre)

0,27

0,86

1,00

Densitatea (în densități terestre)	0,69	0,89	1,00	0,24	0,13	0,23	0,29	?
Densitatea medie, ρ_{med}	4,3	4,56	5,52	1,33	0,71	1,96	1,6	?

Continuarea tabelului din pagina 704

Gravitația la suprafață (în gravități terestre)	0,27	0,86	1,00	0,37	2,64	1,17	0,92	1,44	?
Viteza de eva- dare km/s	3,6	10,2	11,2	5,0	60	36	21	23	11 ?
Lungimea zilei (în zile terestre)	58,6 ^z	30 ^z ?	1 ^z	1 ^z 37 ^m 23 ^s	9 ^h 55 ^m	10 ^h 38 ^m	10,7 ^h	15,3 ^h	?
Perioada, zile	87,97	224,70	365,26	686,98	4 332,59	10 759,20	30 685,93	60 187,64	90 885
Inclinația ecua- torului față de orbită	—	0° ?	23° 27'	25° 12'	3° 7'	26° 45'	98,0°	29°	?
Excentricitatea orbitei (elipti- citatea)	0,00	0,00	1/296	1/192	1/15,4	1/9,5	1/14	1/45	?
Atmosfera, con- stituenții principali	n-are	N ₂ , CO ₂ , A	N ₂ , O ₂	N ₂ , CO ₂ , H ₂ O	CH ₄ , NH ₃	CH ₄ , NH ₃	CH ₄ , NH ₃	CH ₄ , NH ₃	n are
Temperatura maximă la suprafață, K	700	700	350	320	153	138	110 ?	90 ?	80 ?
Distanța până la Soare, în 10 ⁶ km	58	108	149	228	778	1 426	2 869	4 495	5 900

¹ Soarele \odot 329 290 mase terestre, densitatea medie 1,42, diametrul mediu 1 390 600 km, gravitația la suprafață 28 (în gravități terestre).

Luna \bigcirc 0,01228 mase terestre, densitatea medie 3,36, diametrul mediu 3 476 km, gravitația la suprafață 0,17 (în gravități terestre) distanța până la Pământ 38.10⁴ km.

Adaptat după Payne-Gaposchkin and Handbook of Chemistry and Physics.

Diferite date asupra Pământului

Atmosfera standard (normală)	$1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$
	760,0 torr
Densitatea aerului uscat în CN ¹	$1,293 \text{ kg/m}^3$
Viteza sunetului în aer uscat în CN	331,4 m/s
Accelerația gravitațională g (normală) ²	$9,80665 \text{ m/s}^2$
Constanta solară ³	$1\,340 \text{ W/m}^2$
	$1,92 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{min}$
Radiația solară totală medie	$3,92 \cdot 10^{26} \text{ W}$
Raza ecuatorială a Pământului	$6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Raza polară a Pământului	$6,357 \cdot 10^6 \text{ m}$
Volumul Pământului	$1,087 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$
Raza sferei de același volum	$6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
Densitatea medie a Pământului	$5\,522 \text{ kg/m}^3$
Masa Pământului	$5,983 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Viteza orbitală medie a Pământului	29,770 m/s
Viteza unghiulară medie de rotație a Pământului	$7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$
Cîmpul magnetic terestru B (la Washington, D. C.)	$5,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Momentul dipolar magnetic al Pământului	$8,1 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

¹ CN (sau PTS) — condiții normale (standard) de temperatură și presiune: 0°C și 1 atm.

² Această valoare, folosită pentru corecțiile barometrice, greutate legale etc., a fost adoptată de către Comitetul Internațional de Măsurî și Greutăți în 1901. Ea aproximează valoarea de la latitudinea 45° la nivelul mării.

³ Constanta solară este energia solară care cade perpendicular pe unitatea de suprafață terestră în unitatea de timp.

Simboluri, dimensiuni și unități ale mărimilor fizice

Toate unitățile și dimensiunile sunt date în sistemul internațional SI (MKSI raționalizat). Unitățile primare se pot obține punând kilograme pentru M , metri pentru L , secunde pentru T și amperi pentru I . Simbolurile sunt cele folosite în text.

În practică I este definit în funcție de M , L și T . Adăugând însă I la M , L și T tradiționale, putem evita folosirea exponenților fracționari în considerațiile de dimensiune. Termenul „raționalizat” înseamnă pur și simplu că un factor $1/4\pi$ a fost introdus în legea lui Coulomb cu scopul de a îndepărta factorul 4π , care ar apărea altfel în multe alte formule din electricitate.

Mărimea	Simbolul	Dimensiunile	Unități derivate
Accelerația	\vec{a}	LT^{-2}	m/s^2
Accelerația unghiulară	$\vec{\alpha}$	T^{-2}	rad/s^2
Deplasarea unghiulară	θ	—	rad
Frecvența și viteza unghiulară	ω	T^{-1}	rad/s
Moment cinetic	\vec{L}	ML^2T^{-1}	$kg \cdot m^2/s$
Viteza unghiulară	ω	T^{-1}	rad/s
Aria (suprafața)	A, S	L^2	m^2
Deplasarea (distanța)	\vec{r}, \vec{d}	L	m
Energia, totală, cinetică, potențială	E, E_c E_p, U	ML^2T^{-2}	J
Forța	\vec{F}	MLT^{-2}	N
Frecvența	ν	T^{-1}	$Hz = s^{-1}$
Cîmpul gravitațional	g	LT^{-2}	N/kg
Potențialul gravitațional	V	L^2T^{-2}	J/kg
Lungimea	l	L	m

Mărimea	Simbolul	Dimensiunile	Unități derivate
Masa	m	M	kg
Densitatea (de masă)	ρ	ML^{-3}	kg/m ³
Impulsul	\vec{p}	MLT^{-1}	kg·m/s
Perioada	T	T	s
Puterea	P	ML^2T^{-3}	W
Presiunea	p	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m ²
Momentul de inerție	I	ML^2	kg·m ²
Țimpul	t	T	s
Momentul forței	\vec{M}	ML^2T^{-2}	N·m
Viteza	\vec{v}	LT^{-1}	km/s
Volumul	V	L^3	m ³
Lungimea de undă	λ	L	m
Lucrul mecanic	W	ML^2T^{-2}	J
Entropia	S	ML^2T^{-2}	J/K
Energia internă	U	ML^2T^{-2}	J
Căldura	Q	ML^2T^{-2}	J
Temperatura	T	—	K
Capacitatea	C	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	F
Sarcina	q, Q	TI	C
Conductivitatea	σ	$M^{-1}L^{-3}T^3I^2$	($\Omega \cdot m$) ⁻¹
Curentul	i, I	I	A
Densitatea de curent	\vec{j}	$L^{-2}I$	A/m ²
Moment dipolar electric	\vec{p}	$LT I$	C·m
Deplasarea electrică	\vec{D}	$L^{-2}TI$	C/m ²
Polarizarea electrică	\vec{P}	$L^{-2}TI$	C/m ²
Cîmpul electric	\vec{E}	$MLT^{-3}I^{-1}$	V/m
Fluxul electric	Φ_E	$ML^3T^{-3}I^{-1}$	V·m
Potențialul electric	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	V
Tensiunea electromotoare	ε	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	V
Inductanța	L	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	H
Moment dipolar magnetic	$\vec{\mu}$	L^2I	A·m ²
Cîmp magnetic	\vec{H}	$L^{-1}I$	A/m
Fluxul magnetic	Φ_B	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	Wb = V·s
Inducția magnetică	\vec{B}	$MT^{-2}I^{-1}$	T = Wb/m ²
Magnetizarea	\vec{M}	$L^{-1}I$	A/m
Permeabilitatea	μ	$MLT^{-2}I^{-2}$	H/m
Permitivitatea	ε	$M^{-1}L^{-3}T^4I^2$	F/m
Rezistența	R	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	Ω
Rezistivitatea	ρ	$ML^3T^{-3}I^{-2}$	$\Omega \cdot m$
Tensiunea (căderea de tensiune; diferența de potențial)	U	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	V

ANEXA E

Simbolurile matematice și alfabetul grecesc

Semnele și simbolurile matematice

- = egal cu
- ≈ egal aproximativ cu
- ≠ diferit de
- ≡ identic egal cu; egal prin definiție cu
- > mai mare decât (≫ mult mai mare decât)
- < mai mic decât (≪ mult mai mic decât)
- ≥ mai mare sau egal cu
- ≤ mai mic sau egal cu
- ± plus sau minus (de exemplu $\sqrt{4} = \pm 2$)
- ∝ proporțional cu (de exemplu legea lui Hooke: $F \propto x$ sau $F = -kx$)
- Σ sumă de (după)
- \bar{x} valoarea medie a lui x

Alfabetul grecesc

Alfa	A	α	Niu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Omicron	O	ο
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	E	ε	Ro	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ypsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	φ
Kapa	K	κ	Hi	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Miu	M	μ	Omega	Ω	ω

Formule matematice

1. Rădăcinile ecuației de gradul II:

$$\text{Dacă } ax^2 + bx + c = 0, \text{ atunci } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Funcțiile trigonometrice ale unghiului θ :

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$

3. Teorema lui Pitagora:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

4. Identități trigonometrice:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1, \quad \operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

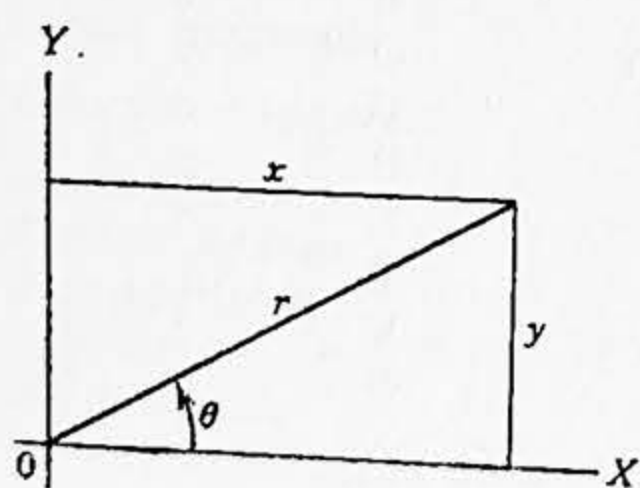


Figura Anexa F.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

5. Seria lui Taylor:

$$f(x_0+x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0) \frac{x^2}{2!} + f'''(x_0) \frac{x^3}{3!} + \dots$$

6. Dezvoltări în serie (aceste dezvoltări converg pentru $-1 < x < 1$, cu excepția celor menționate):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$x \text{ în radiani} \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots & (-\infty < x < \infty) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots & (-\infty < x < \infty) \\ \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots & (-\pi/2 < x < \pi/2) \end{cases}$$

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2 + \dots \quad (x^2 > y^2)$$

7. Derivate și integrale nedefinite

În cele ce urmează literele u și v reprezintă orice funcție de x , iar a și m sint constante. La fiecare integrală trebuie adăugată o constantă arbitrară de integrare. Cartea *A Short Table of Integrals*, de Peirce și Foster (Ginn and Co.) dă tabele mai extinse.

$$1. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$1. \int dx = x$$

$$2. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$2. \int audx = a \int udx$$

$$3. \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$3. \int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$4. \frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$$

$$4. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$5. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$7. \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$7. \int e^x dx = e^x$$

- | | |
|--|--|
| 8. $\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$ | 8. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$ |
| 9. $\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$ | 9. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$ |
| 10. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$ | 10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ |
| 11. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x$ |
| 12. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | 12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x$ |
| 13. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ | 13. $\int \sin x dx = -\cos x$ |
| 14. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ | 14. $\int \cos x dx = \sin x$ |
| 15. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$ | 19. $\int \operatorname{tg} x dx = \ln \sec x $ |
| 16. $\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$ | 20. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x $ |
| 17. $\frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$ | 21. $\int \sec x dx = \ln \sec x + \operatorname{tg} x $ |
| 18. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$ | 22. $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x $ |

8. Produse de vectori:

Fie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii în direcțiile axelor x, y, z . Atunci

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1, & \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0, \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= 0, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \end{aligned}$$

Orice vector \vec{a} cu componentele a_x, a_y, a_z de-a lungul axelor x, y, z poate fi scris astfel:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectori arbitrari cu modulii a, b, c . Atunci

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \\ (s\vec{a}) \times \vec{b} &= s(\vec{a} \times \vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ un scalar}). \end{aligned}$$

Fie θ unghiul cel mai mic dintre \vec{a} și \vec{b} . Atunci

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z) \vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{k} \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= ab \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{aligned}$$

INDICE ALFABETIC

A

Accelerație 54, 72,
 centripetă 81, 84, 85
 centrului de masă 210
 instantanee 55
 în cădere liberă 63
 gravitației 63, 107, 423
 medie 54
 în mișcarea circulară uniformă 81
 radială 81
 relativă 87
 tangențială 84
 unghiulară 267
 variabilă 55
 și viteza relativă 87,
Acțiune 103
 la distanță 434
 din aproape în aproape 435
Adeziune, suprafață de — 128
Adiabată 593
Amplitudine 372, 500, 532
 a mișcării armonice simple 372, 377
An lumină 28
Anizotropie 568
Apa, 570
 căldură specifică 579
 densitate 570
Arhimede, principiul lui — 461
Armonică 536
Aristotel 63, 67
Atmosferă 465
 a Lunii 635
 variația de presiune în — 629
 standard 460, 468
Atracția universală 411
Atwood, mașina lui — 117
Avogadro, legea lui — 627
 numărul lui — 580

B

Balanță 385
 de torsiune 385
Barometru 463
Bătăi 541
Bernoulli Daniel 478
 ecuația lui — 476

Birou de Standarde 418
Biroul Internațional de măsuri și greutăți 99
Biroul Național de Standarde 23, 99
Boltzmann L. 602, 639
 constanta lui — 610, 673
Boyle Robert 465, 602
Brache Tycho 413

C

Calorie 577, 585
Cal putere 164
Capacitate calorică 577
Carnot Sadi 577, 653, 660
 ciclul lui — 653
 teorema lui — 661
Cavendish H. 418
 balanța lui — 386, 418
Cavitate acustică 536
Cădere liberă 62
 ecuația — 64
Căldură 190, 575, 672
 conducție de — 581, 668, 672
 dependența de drum a, 589
 echivalent mecanic al, 584
 și lucrul mecanic 585
 de topire 593
 de vaporizare 592
Căldură specifică 577
 atomică 579
 a hidrogenului 622
 a unui gaz ideal 614
 molară 579
 la presiune constantă 616
 raportul 532, 616
 la volumul constant 616
Ceasornic 22
 atomic 22
 cu cesiu 22
 cu cuarț 22
Centru de greutate 350
Centru de masă 203
 ciocniri — 243
 mișcarea — 209
 sistemul — 243

CGS, 106
 unități 26, 106
 sistem 106
Ciclu 653
 Carnot 653
Cinematica 46
 particulelor 46
Ciocniri, 232
 bidimensionale 246
 conservarea energiei în, 237
 conservarea impulsului în, 235, 237
 elastice 238
 inelastice 240
 într-un gaz ideal 605
 în sistemul CM 243
 unidimensionale 237
Coeficient, de absorbție 509
 de amortizare 399
 de atenuare 509
 de compresie 531, 581
 de dilatare 566, 569
 de elasticitate 156, 373
 de frecare 127, 128
Conductivitate, 581
 tabele de, 583
 termică 582
Conservarea, 170, 191
 energiei mecanice 170, 187
 impulsului 214
 momentului cinetic 332, 337
Constantă, 156
 de fază 377
 de forță 156
 universală a gazelor 603
Copernic N. 415
Covolum 643
Curgere, compresibilă 472
 câmp de — 484
 incompresibilă 472
 irotatională 472
 laminară 485
 linii de — 473
 nestaționară 472
 nevîscoasă 472
 potențială 485
 turbulentă 485
 staționară 472
 tub de — 474
 vîscoasă 472
 vîrtejuri de — 486
Cuva cu apă 495
 difracția 510
 interferența 509
 unde de suprafață 495
 unde coerente 511

D

Dalton, legea lui — 627
Debye P. W. 580
 temperatura 580
Defazaj 377, 518
Derivată 52

parțială 507
Descriere, macroscopică 355
 microscopică 555
Dezordine 672
Difuzia 608
Dilatarea termică, 565
 liniară 566
 în volum 569
 coeficient de — 566, 569
Dimensiune 60
Dinamica, fluidelor 471
 particulelor 46, 95
Domeniu audibil 528
Doppler C. J. 543
 efect 543, 546
 la sunet 543
Drum liber mediu 630
Dulong 580
Dynă 106

E

Echilibrul 347
 corpului solid 348
 exemple 354
 în groapa de potențial 361
 indiferent 185, 361
 instabil 185, 361
 stabil 185, 361
 termic 556
 termodinamic 586
Echipartiția energiei 619
Echivalență 424
 principiul 444
Echivalentul mecanic al caloriei 584
Ecuatia
 lui Bernoulli 476
 aplicată la tubul Pitot 480, 491
 de continuitate 474
 de stare a gazului ideal 603
Efectul Doppler 543, 546
 piezoelectric 528
Efemeride 22
Einstein A. 140, 192, 482, 640
Emisferele din Magdeburg 468
Energia, 149
 și căldura 575
 cinetică 160
 conservarea 191
 de legătura 195
 legea echipartiției 619
 potențială gravitațională 436
Energia, interatomică 568, 613
 internă 590
 de legătură 195
 mecanică 176
 oscilațiilor 371
 în sisteme rezonante 401, 521
 în mișcarea oscilatorie armonică 379
Energie potențială 175
 intermoleculară 568, 613
 și lucrul mecanic 160, 175

Entropia 665
și dezordinea 672
și principiul II al termodinamicii 669
și procesele ireversibile 668
și procesele reversibile 667
Eötvös L. 423
Erg 153
Evaporare 634

F

Fahrenheit, scara — 564
Fază 377, 519
constantă de — 377
în mișcarea armonică 377
modificarea de — la reflexie 518
unghiul de — 377
viteză de — 377
Fluide 454, 471
conservarea impulsului 484
dinamica 471
mecanica 454
statica 454
Forță, clasificare 99, 137
centrifugă 138, 683
centripetă 133
conservativă 171, 179, 187
de frecare 125
gravitațională 137
de inerție 138
intermoleculară 568, 613
legea — 111
și energia potențială 178
neconservativă 171, 188
nucleară, 137
de reacție 103
portantă 481
pseudo — 137
procedeu dinamic pentru
a măsura — 101
Frecarea 126
dinamică 128
ca forță neconservativă 173
statică 126
Frecvență 370
fundamentală 536
proprie 539
Frecvență, unghiulară 500, 681
Front de undă 497

G

Galileo G. 63, 67, 75, 90—91, 97—98, 414
Gaz, ideal 602
biatomic 620
căldura specifică a, 614
constanta universală a, 603
descrierea microscopică a, 605
ecuația de stare a, 603
energia internă a, 614
monoatomic, 620
poliatomic, 621
proces adiabatic în, 617
real 642

termometru cu 561
Gauss 26
sistem de unități 26, 106
Giroscop 321
Grad, Celsius 564
Fahrenheit 564
Kelvin 562
absolut 562
Gradient 187
Gram 106
Greutatea 110
și masa 111
specifică 457
Gravitația 411, 416
constantă universală a — 416
câmp 434, 485
energie potențială 436, 440
ecran pentru — 417
forță de — 137
legea — 416
masă gravitațională 421

H

Hertz, unitate 370
Hidrodinamica 471
Hooke Robert 374
legea lui — 171, 374

I

Impuls 211
Inerție 97
forță de — 137
lege 97
masă inertă 421
moment de — 293
sistem de referință inerțial 97
Integrală 156
Interferență 509
Intermolecularare, forțe 612
Internă, energie 590
a gazului ideal 614
Invar 567
Invariantă 41, 45
Ireversibile, procese 650
variația entropiei 668
Izobar, proces 592
Izotermă 644
Izotropie 568

J

Joule J. 576, 585, 602
experiența lui, 585, 597
unitate 152

K

Kelvin, Lord 15, 660
grad 562
— Planck, formularea
principiului II 670
scara temperaturilor 563
Kepler J. 414, 431, 492
legile 414, 431, 492

Kilocalorie 577, 585
termochimică 585
Kilogram, standard 99
Kilowattoră 164
Kripton 86, metru 20
Kundt, metoda lui — 551

L

Laborator de Radiații Lawrence 86
Lagrange J. L. 471
Laplace 619
Lee T. D. 41
Legea, lui Arhimede 461
Avogadro 627
Dalton 627
forței 108, 111
gravitației 108, 416
Hooke 171, 374
inerției 97
Legile lui Kepler 414
Leonardo da Vinci 128
Limita de elasticitate 374
Lindsay R. B. 192, 475
Linii de curent 473, 485
Lissajous, figuri 409
Locke J. 556
Longitudinale, unde 495, 532
Lord Rayleigh 611
Lucrul mecanic 149
ca arie în diagrama p — V 156, 588
și căldura 585
dependența de drum 589
și energia cinetică 160, 175
produs de o forță constantă 150
— variabilă 155, 158
ca produs scalar 152
și sistemul de referință 168
Lumină, an — 28
Lună, atmosferă 635
Lungime, etalonul atomic 20
etalonul 19
exemple 18

M

Mach E. 639
Marsden 253
Maree 405
Masa, 97, 101
centrul de — 203
și energia 192
exemple 102
și greutatea 111
gravitațională 421
inertă 421
redușă 397
relativistă 192, 195, 213
de repaus 192
unitate atomică 255
variabilă 219
Măsurarea 15
„adevărată” a forței 244
densităților 456

dinamică a forței 101
statică a forței 109
Mașina 655
lui Atwood 117
eficiența (performanța) 656, 660
frigorifică 656
randament 656, 660
termică 656
Maxwell C., 633
distribuția 633, 690
McNish A. G. 25
Mecanică, 46
clasică 95, 138
cuantică 141
cuantică relativistă 142
energie 176
fluidelor 454, 471
relativistă 139, 140
Medie, accelerație 54
viteză 48, 634
Mediul ambiant 95, 555
Mercur 434
Meriam J. L. 224
Metoda Kundt 551
Metru etalon 19
Microscopică, definiție a
gazului ideal 605
descriere 605
Miller F. H. 399
Mișcare 46
armonică 375
amortizată 398
simplă 375
amplitudine 377
browniană 639
circulară 80
uniformă 81
periodică 369
plană 72
a proiectilelor 74
rectilinie 50
uniformă 49
de rotație 264, 307
de translație 47, 307
unidimensională 46, 50, 55
Mișcare armonică simplă 375
amplitudine 377
aplicații 384
a două corpuri 393, 395
ecuația 373
energie 379, 381
faza 377
frecvența 377
perioada 377
și mișcarea circulară uniformă 390
MKS, sistem 25, 106
unități 25, 106
Modul de compresibilitate (compresiu-
ne) 531, 581
Mol 580
Molare, călduri 580
Moleculară, masă 580

Molecule 631
 diametru 632
Moment al forței 285
Moment cinetic 287
Moment de inerție 293
Monoatomic, gaz ideal 620
Moore A. D. 487
Morse P. M. 602
Mott N. F. 624
Multipli și submultipli metrici 26

N

Neutron, descoperire 254
Newton I. 50, 95, 212, 411, 414, 619
 al doilea principiu 101
 legea gravitației a mișcării 108
 aplicații 112
 a răcirii 571
 primul principiu 97
 al treilea principiu 103
 unitate 99, 106
Noduri 515
Nucleare, forțe 137
Nucleu, descoperire 254
Numărul lui Avogadro 580

O

Oliver Jack 528
Operațional, punct de vedere 16
Orgă, tuburi 538
Oscilator armonic 372
 simplu 372
Oscilații 369
 amortizate 399
 armonice simple 372
 a două corpuri 395
 energia 371
 forțate 400
 frecvența 377
 perioada 377
 timp de viață 399
Ostwald W. 639
Owens Jesse 91

P

Pământ, greutatea 420
 ca sistem de referință 443
Panofsky W. 676
Paradox hidrostatic 466
Parsec 28
Particule 47, 95
 cinematica 46
 dinamica 95, 125
Pascal Blaise 462
 principiul 461, 607
Pendul 158, 384
 balistic 242
 conic 134
 fizic 387
 Foucault 452

 simplu 159, 187, 384
 de torsiune 385
Perechi, producere 194
Perioada 370, 500
Perrin J. 640
Petit 574
Phillips M. 676
Pitot, tub 480, 492
Plane, unde 497
Planete 430
 energia 441
Planck M. 660
 constanta 141
Plasma 454
Poiseuille 493
Pomeranz K. B. 224
Portanță 481
 aerodinamică 482
 dinamică 481
 statică 481
Potențială, curgere 485
 energie 175
 gravitațională 436
Poynting 418
Prefixe metriche 26
Presiune 455
 atmosferică 458
 critică 645
 statică (în fluid în repaus) 456, 479
 și teoria cinetică 606
 variația în atmosferă 459, 629
Principia (carte) 97
Principiul, lui Arhimede 461
 de echivalență 444
 inerției 97
 II al dinamicii 101
 III al dinamicii 103
 II al termodinamicii 657
 superpoziției (suprapunerii) 501
Procedeu, dinamic de măsurare a
 forței 101
 static de măsurare a forței 109
Procese 586
 adiabactice 593
 în gaze ideale 617
 cvasistatice 652
 ireversibile 650, 668
 izobare 592
 izoterme 644
 limită 652
 reversibile 650, 652
 termodinamice 586
Proiectile, mișcare 74
Producere de perechi 194
Produs scalar 37, 44, 152
 vectorial 38, 44
Pseudoforță 98
Ptolemeic, sistem 63
Ptolemeu 413
Punct triplu 561
Putere 164
 în mișcarea undelor 507

R

Rabinowicz Ernest 126
 Rachetă 222
 forță de propulsie 483
 Radială, accelerație 81
 Radioactivă, dezintegrare 217, 233
 Rainwater 638
 Ramsey N. F. 656
 Reyleigh Lord 611
 Rayne J. 563
 Rază 497
 Reacție 254
 Reacții nucleare 254
 Reacțiune, forță 103
 Reddick H. W. 399
 Referință, sistem de — 17, 137
 absolut 17, 18
 Pământul, ca — 443
 și energia cinetică 164
 Rekveld J. 515
 Relativistă, masă 192, 195, 213
 mecanică 139, 140
 cuantică 142
 teorie 140
 Relativitate, teorie 140
 generală 434
 Relații de incertitudine (nedetermina-
 re) 141
 Rezneck S. 585
 Rezonanța 400, 519, 520
 Ricci M. A. 464
 Rigid, corp 347
 echilibru 347
 Rogers W. E. 487
 rotație, inerție de — 293
 Rotatională, curgere 472
 dinamică 321, 338
 Rotor 135
 Rowland H. A. 585
 Rumford Count 576, 597
 Russel B. 413
 Rutherford Lord 252

S

Satelit 82, 425, 430
 energia 441
 Scalari 30
 Scara, Celsius 564
 Fahrenheit 564
 Kelvin a temperaturilor 563
 practică internațională a temperatu-
 rilor 564
 termodinamică a temperaturilor 662
 temperaturilor gazului ideal 561
 Schimbare de fază 518
 Schrödinger E. 142
 Secțiune (eficace) de ciocnire 250
 Simplă, mișcare armonică 375
 Sistem 25, 555
 CGS 25
 Gauss 25
 Sistem de referință, inerțial 137

neinerțial 138

Sisteme de referință 17, 137
 și energia cinetică 164
 și lucrul mecanic 168
 și viteza relativă 87
 Sistemul Lui Copernic 63, 416
 Slater J. C. 589
 Sommerfeld A. 330
 Standarde 16, 701
 Standardul kilogramului 99
 Stare, ecuație de — 602
 a gazului ideal 603
 Statica 347
 fluidelor 454
 Statistică, mecanică 555, 601
 la temperaturi negative 659
 Stern O. 636
 Stukeley 411
 Submultipli și multipli metrici 26
 Sunet 528
 surse de — 536
 viteză 617
 unde de — 529
 Superpoziție (suprapunere), principiul
 501
 Suprafață de adeziune 128
 Supraconductibilitate 583
 Surse, de sunete 536
 Șoc, unde de — 548

T

Tabor D., 128
 Temperatura 557, 562
 critică 645
 lui Debye 580
 și energia cinetică 609
 Temperatura, gradient de — 581
 negativă 563
 punctele fixe 565
 termodinamică absolută 662
 de zero absolut 664
 Teorema lui Carnot 661
 a energiei cinetice 161
 în curgere a fluidelor 477
 Teoria cinetică a gazelor 606
 a presiunii 606
 a temperaturii 609
 lui Copernic 416
 cuantică 141
 Termodinamică 555, 586, 601
 al doilea principiu 657, 665
 principiul zero 556, 665
 primul principiu 590, 657, 665
 al treilea principiu 665
 la temperaturi negative 563, 659
 scară a temperaturilor 662
 Termometru cu gaz 560
 la volum constant 560
 Thompson B. 575
 Thomsen J. S. 557, 652
 Thomson W. 15, 660
 Timpul 21
 efemeridelor 22

etalon 21
exemple 21
universal 22
Tolman R. C. 556
Tonuri 536
superioare 536
Torricelli E. 463, 464
loge 464
Tub de curent 474
Pitot 480
sonor 507

U

Undă, de șoc 548
front 497
intensitate 507
lungime de undă 500
putere 507
viteză 503
Unde audibile 528
complexe 512
elastice 494
infrasonore 528
interferență 509
longitudinale 495, 539
mecanice 494
progresive 498, 532
plane 497
sferice 498
staționare 514, 535
sonore 528
transversale 495
ultrasonore 528
Unitate, astronomică 28
atomică de masă 255
Unități 16, 25, 60
CGS 106
Gauss 106
mecanice 106
MKS 106
Uscată, apă 473
ghiață 98, 130

V

Van der Waals J. D. 642
ecuația 643
Vaporizare, căldură de — 592
Variația, entropiei 665
presiunii în atmosferă 629

Vectori 29
adunare 30
componente 32
descompunere 32
și legile fizicii 40
înmulțire 37
produs 38
scădere 32
Versori 33
în coordonate polare 83, 680
Venturi, debitmetru 480
tub 489

Vibrații 369
amortizate 399
coarde vibrante 537
sisteme vibrante 536
Viteza 48
de evadare 439
cea mai probabilă 634
instantanee 49
de maximă probabilitate 634
medie 48, 634
moleculară 606, 633
pătratică medie 607
relativă 87
sunetului 529, 531
undelor 503
unghiulară 267, 327
variabilă 50
Volum critic 645
dilatate 569
Von Guericke Otto 465
Von Helmholtz H. 577
Von Mayer J. 577
Von Neuman John 473

W

Waterston J. J. 602
Watt J. 164
unitate 164
Weinstock R. 96
Wilson C. T. R. 248

Y

Yang C. N. 41
Young, modulul 532

Z

Zero absolut 664
principiul al termodinamicii 556, 665



EDITURA DIDACTICĂ
ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI

Prefață la versiunea în limba română

Saltul de la tehnologia empirică, dominantă pînă la jumătatea secolului nostru, la tehnologia actuală bazată pe utilizarea promptă și maximală a rezultatelor științei a influențat profund predarea fizicii în institutele politehnice, determinînd pe de o parte o substanțială creștere a ponderii acestei discipline în planurile de învățămînt, iar pe de altă parte modernizarea radicală a conținutului fizicii, aceste cerințe devenind cu atît mai stringente, cu cît și ritmul de perfecționare a tehnologiei a devenit mai susținut. Cursul de fizică generală de profesorii americani David Halliday de la Universitatea din Pittsburgh și Robert Resnick de la Institutul Politehnic Rensselaer constituie un exemplu foarte elocvent asupra modului în care este înțeleasă semnificația pregătirii în fizică a viitorilor ingineri într-o țară în care prestigioasele realizări în dezvoltarea tehnologică nu mai este necesar să fie reliefate.

Ideea fundamentală „Fizica nu este o îngemănare de doctrine fixe ci o știință în dezvoltare” afirmată de autori și urmărită cu consecvență în cele peste 1 200 de pagini ale lucrării, departe de a constitui un prilej pentru improvizații frivole făcute doar de dragul evadării din făgașul convențional, este, dimpotrivă, minunat îmbinată cu prezentarea temeinică și riguroasă a bazelor fenomenologice clasice ale fizicii, absolut indispensabile unei solide însușiri a acestei discipline. Caracterul modern al expunerii constă mai întîi în formularea ideilor clasice într-un mod coerent cu concepțiile actuale ale fizicii; în al doilea rînd acest caracter apare în judicioasa selectare a temelor de fizică în raport cu ponderea pe care acestea le au în ansamblul fizicii moderne și în sfîrșit în alegerea cu grijă a acelor experiențe care beneficiind de cele mai moderne posibilități tehnice permit inducerea cea mai potrivită a adevărurilor din fizică. Punctul de vedere microscopic este introdus la finele fiecărui capitol, după expunerea bazelor fenomenologice, preferîndu-se de obicei interpretările microscopice clasice intuitive, fără a se ocoli însă scoaterea în evidență a deficiențelor acestor interpretări și semnalarea posibilităților fizicii cuantice de a se depăși aceste deficiențe.

Profund convinși de rolul pe care îl are formarea unei corecte gândiri fizice în pregătirea viitorilor ingineri, autorii nu au elaborat acest curs ca un simplu material de informare ci ca un eficient instrument de instruire. Este foarte interesantă, de exemplu, metoda de introducere a ideilor mai întâi sub o formă mai elementară, nu foarte riguroasă, dar cât mai intuitivă și ilustrată de exemple cât mai elocvente, avându-se totuși grija avertizării cititorilor asupra nerigurozităților făcute. De-abia într-o a doua etapă, ideile se rafinează și se prezintă, de data aceasta, cu toată rigoarea. Un mare număr de întrebări „provocatoare”, anexate fiecărui capitol îndeamnă nu numai la meditații asupra aspectelor mai subtile, dar și la consultarea unei bibliografii suplimentare. Participarea cititorului se desăvârșește prin invitația de a rezolva cele aproape o mie de probleme care însoțesc lucrarea. Un material ilustrativ excelent elaborat și, spre lauda celor care au realizat ediția românească, executat în condiții grafice competitive cu ediția originală, cât și numeroase anexe, optimizează condițiile de studiu al manualului.

Dacă în cadrul sistemului de învățământ din Statele Unite ale Americii poziția acestui curs este clar precizată, situându-se ca un curs de fizică generală propedeutic, destinat facultăților de fizică sau de inginerie, în raport cu structura învățământului din țara noastră această poziție este evident mai dificil de situat. Dar poate tocmai din acest motiv numărul celor care profită de lectura acestui curs este sporit, el fiind accesibil și util tuturor celor care au la bază cele douăsprezece clase de învățământ. Și poate cei mai privilegiați lectori ai acestei lucrări vor fi chiar fizicienii formați, care fiind scutiți de servituțile învățării propriu-zise vor putea să guste pe îndelete deosebita claritate a expunerii și să zăbovească mai mult asupra unor nuanțe pe care poate pînă atunci le-au lăsat neobservate.

PROF. DR. GEORGE C. MOISIL

Prefață

Intervalul de timp dintre descoperirile în științele fundamentale și aplicarea lor în practica inginerescă s-a scurtat enorm în ultimele câteva decenii. Baza ingineriei, altă dată în mare măsură empirică, este astăzi în mare măsură științifică. Astăzi se simte necesitatea de a sublinia mai degrabă principiile decât procedeele specifice, de a selecta mai degrabă domeniile de interes contemporan decât pe cele de interes mai vechi și de a pregăti pe student pentru atmosfera de schimbări pe care o va întâlni în timpul carierei sale. Aceste schimbări solicită o revizuire a cursului tradițional de fizică generală pentru ingineri și fizicieni.

Cele mai frecvente critici făcute la diferite nivele asupra manualelor folosite într-un astfel de curs, sînt următoarele: (a) conținutul este enciclopedic ceea ce înseamnă că temele nu sînt tratate cu suficientă profunzime, discuțiile sînt în mare măsură descriptive în loc să fie explicative și analitice și sînt abordate prea multe teme; (b) conținutul nu este suficient de „modern” și aplicațiile sînt extrase de cele mai multe ori din practica inginerescă a trecutului, decât din fizica contemporană; (c) organizarea materialului este prea compartimentată pentru a putea pune în evidență unitatea esențială a fizicii și a principiilor ei; (d) tratarea este mult prea deductivă și nu pune suficient accent pe legătura dintre teorie și experiență. Desigur, este puțin probabil că va fi scris vreodată un manual care să nu fie criticat dintr-un motiv sau altul.

Scriind acest manual noi am fost conștienți de aceste critici și am căutat să ținem seamă de ele. Am luat în considerare posibilitatea de a reorganiza tabla de materii. Adoptarea unei tratări din punct de vedere atomic, chiar de la început, sau unei structuri bazate pe energie în variatele ei aspecte se recomandă de la sine. Am tras concluzia că scopurile noastre pot fi atinse cel mai bine modificînd alegerea și tratarea temelor în cadrul organizării tradiționale. „A amesteca liber cărțile” ce conțin subiectele sau a abandona cu totul o succesiune care să reprezinte dezvoltarea gîndirii fizice, duc ambele la un eșec în aprecierea sintezelor newtoniană și maxwelliană a fizicii clasice și la o înțelegere superficială a fizicii moderne. După părerea noastră un fundament

solid al fizicii clasice este esențial pentru a clădi suprastructura fizicii contemporane.

Pentru a ilustra modul cum sperăm să ne realizăm scopurile în acest cadru, prezentăm aici principalele trăsături ale acestei cărți.

1. Multe teme sînt tratate mai profund decît s-a făcut de obicei pînă acum și a fost introdus mult material contemporan în cuprinsul cărții. De exemplu, gravitația, teoria cinetică, undele electromagnetice și optica fizică, printre altele, sînt tratate mai profund. Teme contemporane, precum standardele (etaloanele) atomice, secțiunea de ciocnire, forțele inter-moleculare, conversia masă-energie, separarea izotopilor, efectul Hall, modelul electronilor liberi pentru conductibilitate, stabilitatea nucleară, rezonanța nucleară și difracția neutronilor sînt discutate la locul potrivit.

Pentru a permite această tratare mai profundă și includerea materialului contemporan, am omis în întregime sau am tratat doar indirect mult material tradițional, precum mașinile simple, tensiunea superficială, vîscozitatea, calorimetria, schimbarea stării de agregare, umiditatea, pompele, motoarele practice, scările muzicale, acustica arhitecturală, electrochimia, termoelectricitatea, motoarele, circuitele de curent alternativ, electronica, aberațiile lentilelor, colorimetria, fotometria și altele.

2. Am încercat să evidențiem unitatea fizicii pe toate căile. Peste tot în carte subliniem natura generală a ideilor fundamentale, comune tuturor domeniilor fizicii. De exemplu, legile de conservare a energiei, a impulsului, a momentului cinetic și a sarcinii electrice sînt folosite de nenumărate ori. Conceptul de undă și proprietățile sistemelor oscilante, precum rezonanța, sînt folosite în mecanică, acustică, electromagnetism, optică, fizică atomică și nucleară. Conceptul de cîmp este aplicat la gravitație, curgerea fluidelor, electromagnetism și fizica nucleară.

Relațiile reciproce dintre diferitele discipline ale fizicii sînt subliniate prin folosirea analogiilor fizice și matematice și prin metoda similitudinii. De exemplu, sînt subliniate corespondențele dintre sistemul greutate-resort și circuitul LC sau dintre un tub acustic și o cavitate electromagnetică și este notată întrepătrunderea dintre tratarea microscopică și cea macroscopică a fenomenelor termice și a fenomenelor electrice și magnetice. Am încercat să netezim trecerea de la mecanica punctului material la teoria cinetică, subliniind că în aspectele lor clasice, ambele aparțin sintezei newtoniene. Am imaginat de asemenea o trecere netedă de la electromagnetism la optica ondulatorie, punînd accentul frecvent pe sinteza maxwelliană.

Noi discutăm limitele ideilor clasice și domeniul lor de valabilitate și subliniem natura generalizatoare a ideilor contemporane, aplicabile într-un domeniu mai larg. Peste tot căutăm să arătăm legătura dintre teorie și experiență și să dezvoltăm o cunoaștere conștientă a naturii și a utilizării teoriei.

3. Modul de abordare al fizicii cuantice nu este cel descriptiv tradițional. Mai degrabă, noi căutăm să dezvoltăm conceptele contemporane destul de riguros, în măsura și profunzimea adecvate unui curs introductiv. În capitolele anterioare pregătim drumul pentru sublinierea limitărilor teoriei clasice, marcînd aspectele fizicii clasice care se prelungesc în fizica contemporană și alegînd exemple ilustrative care au un aspect

modern. Astfel, punem accentul pe câmpuri mai mult decât pe circuite, pe particule mai mult decât pe corpuri extinse și pe optica ondulatorie mai mult decât pe optica geometrică. Printre exemplele ilustrative sînt curbele de energie potențială moleculară, energia de legătură a deuteriului, ciocnirile nucleare, modelul nuclear al atomului, modelul atomic al lui Thomson, dipolii moleculari, viteza de deplasare a electronilor, stabilitatea orbitelor betatronice, rezonanța magnetică nucleară, deplasarea spre roșu și altele, prea numeroase pentru a le putea menționa.

Punctul de vedere este acela de a dezvolta ideile fundamentale ale fizicii cuantice. Capitolul descriptiv obișnuit de fizică nucleară este, de exemplu, omis. În schimb sînt subliniate dualitatea undă-corpusul, principiul incertitudinii, principiul complementarității și principiul de corespondență.

4. Nivelul matematic al cărții noastre presupune un curs paralel de calcul diferențial și integral. Derivata este introdusă în capitolul 3, iar integrala în capitolul 7. Conceptele fizice înrudite de pantă și de arie mărginită de o curbă sînt dezvoltate treptat. Calculul diferențial și integral este folosit în mod curent în a doua jumătate a cărții. Nu sînt evitate ecuațiile diferențiale simple, deși nu este necesar și nu se dă nici un procedeu formal pentru rezolvarea lor. Peste tot este folosită notația vectorială și algebra vectorială, inclusiv produsul scalar și cel vectorial. Ca prototip de vector este luată deplasarea și este dezvoltată ideea de invarianță a relațiilor vectoriale.

5. Numărul problemelor este neobișnuit de mare dar puține sînt probleme „încuietoare”. Multe din ele necesită dezvoltări ale materialului din text, aplicații contemporane sau deducții. Întrebările de la sfîrșitul fiecărui capitol sînt destinate să stimuleze gîndirea; ele pot servi ca bază pentru discuții în clasă, pentru lucrări de control sau pentru studiul individual. Numai rareori se poate răspunde la întrebări printr-o citare directă din text.

6. Cartea conține un număr neobișnuit de mare de exemple, cu variante „încuietoare” folosite doar pentru a pune în evidență ordinul de mărime. Soluțiile algebrice sînt preferate celor numerice. Exemplele extind uneori tratarea din text sau discută punctele mai fine, dar de obicei ele constituie aplicații ale principiilor din fizica contemporană.

7. Manualul a fost conceput astfel încît să acopere cursuri de fizică de diferite durate. Cu textul petit a fost cules mult material suplimentar cu caracter avansat, istoric, sau filozofic, care poate fi omis sau inclus la diferite nivele depinzînd de interesul sau durata cursului. În plus, multe capitole pot fi privite ca opționale (facultative). Fiecare profesor poate face singur o alegere. În instituțiile noastre, capitolul 14 (Statica corpurilor rigide) și capitolele 41 și 42 (Optica geometrică) sînt omise. Alte posibilități sugerate, depinzînd de accentul sau profunzimea dorite, sau de natura cursurilor care se succed, sînt capitolele 12 (Dinamica rotației), capitolele 17 și 18 (Fluide), capitolul 24 (Teoria cinetică II), capitolul 32 (T.e.m. și circuite), capitolul 46 (Polarizarea) și capitolele 47 și 48 (Fizica cuantică).

8. Am adoptat sistemul de unități SI (MKS) peste tot, deși sistemul tehnic este și el uneori folosit în mecanică. Deoarece sistemul CGS este

exclus treptat, an de an, din manualele avansate, ne-am văzut siliți să ne restrângem la o simplă definiție a unităților fundamentale CGS. O listă bogată a factorilor de transformare este dată în anexa G.

Dorim să mulțumim studenților în științe și inginerie atât de la Institutul politehnic Rensselaer cât și de la Universitatea din Pittsburgh care au parcurs odată cu noi cele două ediții preliminare succesive. Criticile constructive din partea colegilor noștri de la fiecare institut și de la unii recenzenți au condus la mai multe schimbări. Benjamin Chi de la I.P.R. a fost de un real folos în toate aspectele de pregătire a manuscrisului. În sfârșit, ne exprimăm recunoștința profundă față de soțiile noastre, nu numai pentru ajutorul dat în dactilografierea și în citirea corecturilor, dar și pentru răbdarea și încurajarea fără de care această carte nu ar fi fost niciodată scrisă.

David Halliday

Universitatea din Pittsburgh
Pittsburgh, Pennsylvania.

Robert Resnick

Institutul Politehnic Rensselaer
Troy, New York.

2
2
3
3-
3-
3-
3-
3-4
3-5
3-6
3-7
3-8
3-9
3-10
3-11

Cuprinsul volumului I

1. MĂSURAREA		4. MIȘCAREA ÎNTR-UN PLAN	
1-1	Măsurarea	15	
1-2	Mărimi fizice, etaloane și unități	16	4-1 Deplasarea, viteza și accelerația 72
1-3	Sisteme de referință	17	4-2 Mișcarea într-un plan cu accelerație constantă 73
1-4	Etalonul de lungime	19	4-3 Mișcarea unui proiectil 74
1-5	Etalonul de timp	21	4-4 Mișcarea circulară uniformă 80
1-6	Sisteme de unități	25	4-5 Accelerația tangențială în mișcarea circulară 84
2. VECTORI		4-6 Viteza relativă și accelerația 87	
2-1	Vectori și scalari	29	
2-2	Adunarea (compunerea) vectorilor. Metoda geometrică	30	
2-3	Descompunerea și compunerea vectorilor. Metoda analitică	32	5. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL. I
2-4	Înmulțirea vectorilor	37	5-1 Mecanica clasică 95
2-5	Vectorii și legile fizicii	40	5-2 Prima lege a lui Newton 97
3. MIȘCAREA UNIDIMENSIONALĂ		5-3 Forța 99	
3-1	Mecanica	46	5-4 Masa; legea a doua a lui Newton 101
3-2	Cinematica punctului material	46	5-5 Legea a treia a mișcării a lui Newton 103
3-3	Viteza medie	48	5-6 Sisteme de unități mecanice 106
3-4	Viteza instantanee	49	5-7 Legile forței 108
3-5	Mișcarea unidimensională — viteza variabilă	50	5-8 Greutatea și masa 109
3-6	Accelerația	54	5-9 Un procedeu static de măsurare a forțelor 111
3-7	Mișcarea unidimensională — accelerația variabilă	55	5-10 Unele aplicații ale legilor mișcării ale lui Newton 112
3-8	Mișcarea unidimensională — accelerația constantă	56	6. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL. II
3-9	Bilanțul unităților și dimensiunilor	60	6-1 Introducere 123
3-10	Corpuri în cădere liberă	62	6-2 Forțele de frecare 125
3-11	Ecuatiile mișcării în cădere liberă	64	6-3 Dinamica mișcării circulare uniforme 132
			6-4 Forțele și pseudoforțele 137